ΔΥΟ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΜΠΕΪΖΙΑΝΗ ΕΠΙΣΤΗΜΟΛΟΓΙΑ

Άσκηση 1. Έστω h η υπόθεση ότι το καθιερωμένο πρότυπο (standard model) περιγράφει το σύνολο των αλληλεπιδράσεων στον κόσμο μας εκτός της βαρυτικής. Και e η πρόταση ότι για ορισμένο χρονικό διάστημα, σε ορισμένη ποσότητα ύλης δεν έχει παρατηρηθεί διάσπαση πρωτονίου. Ο βαθμός πεποίθησης που αποδίδουν οι επιστήμονες στην πρόταση e με δεδομένη την αποδοχή του καθιερωμένου προτύπου είναι 0,001. Να απαντήσετε στις ακόλουθες ερωτήσεις: (1) Η παρατήρηση της διάσπασης πρωτονίου επικυρώνει, αντικρούει ή είναι ουδέτερη για την υπόθεση του καθιερωμένου προτύπου, σύμφωνα με την μπεϊζιανή άποψη; (2) Οι πεποιθήσεις δύο επιστημόνων όσον αφορά το καθιερωμένο πρότυπο έχουν διαφορετική ισχύ. Ο πρώτος αποδίδει βαθμό πεποίθησης στην h, ανεξάρτητα από την αλήθεια της e, 0,7, ενώ ο δεύτερος 0,3. Για ποιον από τους δύο επιστήμονες ο βαθμός πίστης στο καθιερωμένο πρότυπο μεταβάλλεται περισσότερο από την παρατήρηση της διάσπασης του πρωτονίου; (3) Με βάση την απάντησή σας στην προηγούμενη ερώτηση. Τι θα λέγατε σε κάποιον που θα ήθελε να προτείνει ως "βαθμό επικύρωσης" τη διαφορά του πρότερου από τον ύστερο βαθμό πεποίθησης στην υπόθεση· Εναλλακτικά τι θα προτείνατε ως βαθμό επικύρωσης μιας υπόθεσης από κάποιο εμπειρικό τεκμήριο; (4) Ένας τρίτος επιστήμονας αποδίδει βαθμό πεποίθησης 0,7 στην h και 0,4 σε μια εναλλακτική υπόθεση h' η οποία είναι αντιφατική της h. Τι θα έλεγε ένας μπεϊζιανός φιλόσοφος σε αυτόν τον επιστήμονα;

Λύση. (1) Έστω $\sim e$: "Παρατηρήθηκε διάσπαση πρωτονίου σε ορισμένη ποσότητα ύλης σε ορισμένο χρονικό διάστημα". Εφόσον η παρατήρηση έχει λάβει χώρα, $Pr(\sim e) = 1$, και, σύμφωνα με τους νόμους των πιθανοτήτων, $Pr(\sim e|h) = 1 - p(e|h) = 0,999$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Μπέιζ, $Pr(h| \sim e) = \frac{Pr(h)Pr(\sim e|h)}{Pr(\sim e)} \Rightarrow \frac{Pr(h|\sim e)}{Pr(h)} = 0,999 < 1$. Επομένως, η παρατήρηση της διάσπασης πρωτονίου αντικρούει το καθιερωμένο πρότυπο. (2) Από το θεώρημα Μπέιζ ισχύει ότι $\frac{Pr(h|\sim e)}{Pr(h)} = 0,999$. Οι δύο επιστήμονες αποδίδουν διαφορετικούς αρχικούς βαθμούς πεποίθησης στην υπόθεση του καθιερωμένου προτύπου, άρα: $\frac{Pr_1(h|\sim e)}{Pr_1(h)} = \frac{Pr_2(h|\sim e)}{Pr_2(h)} = 0,999$. Με απλές πράξεις καταλήγουμε ότι, $\frac{Pr_1(h|\sim e)-Pr_1(h)}{Pr_2(h|\sim e)-Pr_2(h)} = \frac{Pr_1(h)}{Pr_2(h)} = \frac{7}{3} > 1$. Επομένως, ο βαθμός πεποίθησης του πρώτου επιστήμονα στην υπόθεση h μεταβάλλεται περισσότερο από τον βαθμό πεποίθησης του δεύτερου, με δεδομένη την παρατήρηση της διάσπασης πρωτονίου. (3) Αν ο βαθμός επικύρωσης μιας υπόθεσης από κάποιο εμπειρικό τεκμήριο εκφράζει τη σχέση της υπόθεσης με το εμπειρικό τεκμήριο τότε η μεταβολή του βαθμού πίστης στην h δεδομένου κάποιου τεκμηρίου δεν αποτελεί «καλό» μέτρο του βαθμού επικύρωσης διότι εξαρτάται από την πρότερη πιθανότητα που αποδίδεται στην h από τον εκάστοτε επιστήμονα. Αντίθετα, ο λόγος $\frac{Pr(h|\sim e)}{Pr(h)}$ αποτελεί καλό μέτρο του βαθμού επικύρωσης, διότι είναι ανεξάρτητος από τις πρότερες πιθανότητες, όπως δείξαμε στην απάντηση (1). (4) Ο τρίτος επιστήμονας είναι ανορθολογικός αφού αποδίδει μη συνεκτικούς βαθμούς πεποίθησης.

Άσκηση 2. Ο Laplace (1814) απέδειξε τον επαγωγικό «κανόνα της διαδοχής» σύμφωνα με τον οποίο η πιθανότητα κάποιο συμβάν, οριζόμενο ως η εκδήλωση κάποιας ιδιότητας A από ένα άτομο x, Ax, να λάβει χώρα εκ νέου, με δεδομένο ότι έχει ήδη λάβει χώρα N φορές διαδοχικά, δίδεται από τη σχέση $Pr(A_{n+1}x|A_n x \wedge ... \wedge A_1 x) = \frac{n+1}{n+2}$. Για άπειρο πλήθος παρατηρήσεων εκδήλωσης της A ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty} Pr(A_{n+1}x|A_n x \wedge ... \wedge A_1 x) = 1$, δηλαδή, η ιδιότητα A αναπαρίσταται από ένα ασθενώς προβολικό στην κατεύθυνση του μέλλοντος κατηγόρημα. Ο Harold Jeffreys (1957) απέδειξε ότι, γενικά, για οποιοδήποτε συνάρτηση πιθανότητας, αν $Pr(\bigwedge_{n=1}^{\infty} A_n x) > 0$ τότε $\lim_{n\to\infty} Pr(A_{n+1}x|A_n x \wedge ... \wedge A_1 x) = 1$. Το αποτέλεσμα αυτό ερμηνεύεται ως εξής: αν αποδώσουμε μη μηδενική πρότερη πιθανότητα σε μια καθολική γενίκευση (η οποία αναφέρεται σε εκδήλωση αριθμήσιμου πλήθους εκδηλώσεων μιας ιδιότητας A) τότε η ιδιότητα A αναπαρίσταται από ένα ασθενώς προβολικό στην κατεύθυνση του μέλλοντος κατηγόρημα. (1) Εξηγείστε για ποιον λόγο ο κανόνας της διαδοχής και η πρόταση του Jeffreys δεν επιλύουν το πρόβλημα του επαγωγικού σκεπτικισμού. (2) Εξετάζοντας τις προϋποθέσεις της απόδειξης του κανόνα της διαδοχής, να εξηγήσετε γιατί η συνθήκη $Pr(\bigwedge_{n=1}^{\infty} A_n) > 0$ της πρότασης του Jeffreys δεν αποτελεί αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα κατηγόρημα ασθενώς προβολικό στην κατεύθυνση του μέλλοντος.

Λύση. (1) Το πρόβλημα του Hume δεν αναφέρεται σε βεβαιότητα που προκύπτει στο τέλος του χρόνου όταν άπειρο πλήθος εμπειρικών τεκμηρίων μπορεί να ληφθεί υπόψη για τη συναγωγή της επόμενης πραγμάτωσης μιας ιδιότητας αλλά σε ένα επαγωγικό επιχείρημα που συναγάγει τι θα συμβεί στην επόμενη παρατήρηση δεδομένων πεπερασμένου πλήθους εμπειρικών τεκμηρίων. Επιπλέον, η χιουμιανή επαγωγή δεν αφορά το τι θα γίνει στο μέλλον αλλά και το τι έχει γίνει στο απώτερο παρελθόν εφόσον πεπερασμένου πλήθους τεκμήρια ληφθούν υπόψη.

(2) Κατά την απόδειξη του κανόνα της διαδοχής υποθέτουμε ότι όλες οι εκδηλώσεις της ιδιότητας A είναι ισοπίθανες $Pr(A_n x) = p$, $n \in \mathbb{N}$ και στατιστικώς ανεξάρτητες μεταξύ τους: $Pr(A_n x \wedge ... \wedge A_1 x) = Pr(A_n x) \cdot ... \cdot Pr(A_1 x) = p^n$, $n \in \mathbb{N}$. Επειδή, $\bigwedge_{n=1}^{\infty} A_n x \vdash A_n x \wedge ... \wedge A_1 x$, συμπεραίνουμε ότι $Pr(\bigwedge_{n=1}^{\infty} A_n x) \leq Pr(A_n x \wedge ... \wedge A_1 x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα, $Pr(\bigwedge_{n=1}^{\infty} A_n x) \leq \lim_{n\to\infty} Pr(A_n x \wedge ... \wedge A_1 x) = \lim_{n\to\infty} p^n = 0$. Επομένως, $Pr(\bigwedge_{n=1}^{\infty} A_n x) = 0$ και $\lim_{n\to\infty} Pr(A_{n+1} x | A_n x \wedge ... \wedge A_1 x) = 1$.