ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ-ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ενότητα 7

Γεωμετρικές Κατασκευές και Γεωμετρικοί Τόποι

Συντονιστής: Χρίστου Κωνσταντίνος, *Καθηγητής Πανεπιστημίου Κύπρου*

Εποπτεία: Φιλίππου Ανδρέας, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
Γιασουμής Νικόλας, *Επιθεωρήτής Μέσης Εκπαίδευσης*
Παπαγιάννη Όλγα, *Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης*

Συντονισμός έκδοσης: Χρίστος Παρπούνας, *Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Α΄ Έκδοση 2016

Εκτύπωση: ΚΩΝΟΣ ΛΤΔ

ISBN: 978-9963-54-067-9

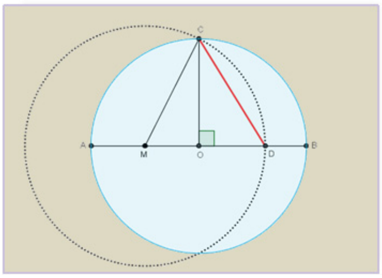
ΕΝΟΤΗΤΑ 7

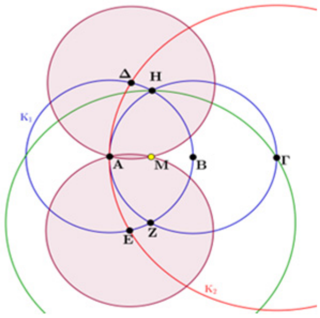
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

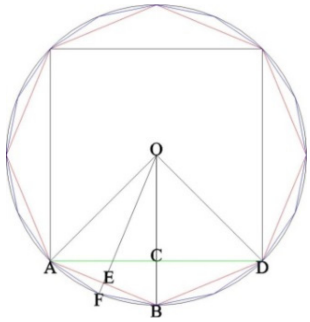
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

7.1 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ

Η κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων, όταν δίνονται ορισμένα στοιχεία τους ή συγκεκριμένες γεωμετρικές ιδιότητες, είναι ένα θέμα που μας απασχολεί συχνά.
Η κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων δεν είναι πάντα απλή υπόθεση και ούτε πάντοτε εφικτή.







Πρόβλημα: Να κατασκευαστεί τρίγωνο $ΑΒΓ$, όταν δίνονται οι πλευρές του $ΒΓ = α,\ ΑΒ = γ$ και η διάμεσός του $ΑΜ = μ_α$

- Πρόβλημα, όπως το προηγούμενο, λέμε ότι είναι ένα γεωμετρικό πρόβλημα.
- Λύση ενός γεωμετρικού προβλήματος ονομάζεται η διαδικασία που ακολουθούμε, για να κατασκευάσουμε το ζητούμενο σχήμα.
- Αν κατασκευάσουμε το σχήμα, χρησιμοποιώντας, **αποκλειστικά κανόνα** και **διαβήτη,** τότε λέμε ότι έχουμε μια **γεωμετρική κατασκευή.**
- Ένα πρόβλημα κατασκευής λέμε ότι **δε λύνεται γεωμετρικά,** όταν το σχήμα δεν μπορεί να κατασκευαστεί με χρήση **μόνο κανόνα και διαβήτη.**

Μερικά προβλήματα που δεν έχουν γεωμετρική λύση είναι:

1. Η τριχοτόμηση της γωνίας, η διαίρεση δηλαδή, τυχαίας γωνίας (εκτός της ορθής) σε τρείς ίσες γωνίες.
2. Ο τετραγωνισμός του κύκλου, η κατασκευή δηλαδή, τετραγώνου που να έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν δεδομένου κύκλου.
3. Η κατασκευή τριγώνου, αν γνωρίζουμε τα μήκη των διχοτόμων των γωνιών του.
4. Η κατασκευή ευθείας από δεδομένο σημείο που να τέμνει δύο γνωστούς κύκλους, έτσι ώστε η διαφορά των χορδών που αποκόπτονται από τους δύο κύκλους να είναι ίση με $λ,\ λ \in \mathbb{R}$

Ιστορικό Σημείωμα

Ένα από τα βασικά στοιχεία της Ελληνικής Γεωμετρίας ήταν οι Γεωμετρικές κατασκευές. Περίπου τον $5^{ο}$ π.Χ αιώνα, εικάζεται ότι επιλέχθηκαν από τους Αρχαίους Έλληνες Γεωμέτρες, ως θεμελιώδη σχήματα για τις Γεωμετρικές κατασκευές οι ευθείες και οι κύκλοι.

Στα προβλήματα των **Γεωμετρικών κατασκευών** μας δίνονται κάποια στοιχειώδη γεωμετρικά στοιχεία, όπως για παράδειγμα σημεία, ευθείες, κύκλοι και με βάση αυτά, χρησιμοποιώντας **αποκλειστικά κανόνα και διαβήτη,** πρέπει να κατασκευάσουμε γεωμετρικά σχήματα, τα οποία να ικανοποιούν ορισμένες συνθήκες.

Οι Αρχαίοι Έλληνες Μαθηματικοί, ως θεμελιωτές της Θεωρητικής Γεωμετρίας, παρατήρησαν ότι υπήρχαν προβλήματα Γεωμετρικών κατασκευών που δεν μπορούσαν να λυθούν μόνο με **κανόνα και διαβήτη**. Αυτά ήταν τα τρία περίφημα Άλυτα Προβλήματα της Αρχαιότητας που αποτέλεσαν για αιώνες, πρόκληση για τους Μαθηματικούς και τελικά αποδείχθηκε, ότι τα προβλήματα αυτά δεν έχουν λύση, δηλαδή οι γεωμετρικές αυτές κατασκευές δεν μπορούν να γίνουν, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά κανόνα και διαβήτη. Τα προβλήματα αυτά είναι:

- **Ο τετραγωνισμός του κύκλου**
- **Η τριχοτόμηση τυχαίας γωνίας**
- **Ο διπλασιασμός του κύβου**

Ο Ευκλείδης στα « Στοιχεία» του τις μόνες γεωμετρικές κατασκευές που επιτρέπει αυστηρά είναι αυτές που χρησιμοποιούν αποκλειστικά κανόνα και διαβήτη. Ο Ευκλείδης όμως, ήταν μαθητής του φιλόσοφου Πλάτωνα από τον οποίο είχε επηρεαστεί καταλυτικά. Επομένως, τα γεωμετρικά προβλήματα ήταν γνωστά από την εποχή του Πλάτωνα (427-347 π.Χ).

Αργότερα τον $16^{ον}$ και $17^{ον}$ αιώνα αποδείχθηκε ότι «Οτιδήποτε μπορεί να κατασκευαστεί με κανόνα και διαβήτη, μπορεί να κατασκευαστεί και μόνο με διαβήτη».

Η ιδέα της κατασκευής μόνο με διαβήτη ξεκίνησε από τον Ιταλό επιστήμονα Giovanni Batista Benedetti (1530-1590) και αργότερα ο Δανός Γεωμέτρης Georg Mohr (1640-1697) απέδειξε ότι κάθε πρόβλημα κατασκευής που ανάγεται σε δευτεροβάθμια εξίσωση, μπορεί να κατασκευασθεί μόνο με διαβήτη. Ένα αιώνα μετέπειτα ο Ιταλός Lorenzo Mascheroni (1750-1800) διατύπωσε ξανά το πρόβλημα και πρότεινε μια λύση που έκτοτε αναφέρεται ως Θεώρημα των Mohr - Mascheroni.

7.2 ΑΠΛΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ

ΕΞΕΡΕΥΝΗΣΗ

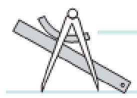
Στη διπλανή εικόνα φαίνεται η κυκλική επιφάνεια ενός ξύλινου τραπεζιού, της οποίας ο ξυλουργός πρέπει να εντοπίσει το κέντρο της, για να τοποθετήσει το ξύλινο πόδι της βάσης στήριξης. Χρησιμοποιώντας μόνο τον κανόνα (αβαθμολόγητο) και το διαβήτη σας, να βρείτε με ποιο τρόπο ο ξυλουργός θα προσδιορίσει το κέντρο της κυκλικής επιφάνειας και να καταγράψετε τα βήματα των ενεργειών σας.

Στη παρακάτω εικόνα φαίνεται ένα κομμάτι ίσιο ξύλο του οποίου οι απέναντι κατά μήκος πλευρές του, είναι παράλληλες. Το πλάτος του ξύλου είναι μικρότερο της διαμέτρου της κυκλικής επιφάνειας του τραπεζιού ,ενώ το μήκος του είναι μεγαλύτερο της διαμέτρου της.

- Να διερευνήσετε, αν μπορεί ο ξυλουργός, έχοντας στη διάθεσή του μόνο ένα τέτοιο κομμάτι ξύλο , να προσδιορίσει το κέντρο της κυκλικής επιφάνειας του τραπεζιού.
- Να εξηγήσετε γιατί το σημείο που βρήκατε είναι το κέντρο της κυκλικής επιφάνειας.

Θεωρήματα και προτάσεις που αποδείξαμε στη Γεωμετρία σε προηγούμενες τάξεις, μας επιτρέπουν να λύσουμε κάποια βασικά προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών.

Για να επιλύσουμε ένα πρόβλημα γεωμετρικής κατασκευής ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:



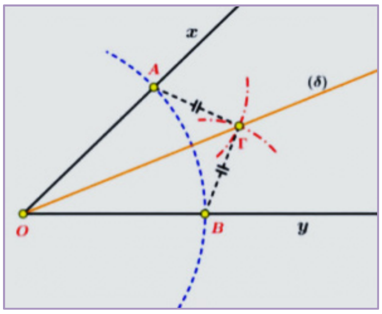
1. **Κατασκευή:** είναι όλες εκείνες οι διαδικασίες και ενέργειες που ακολουθούμε, για να επιτύχουμε την ακριβή σχεδίαση του σχήματος, με χρήση μόνο κανόνα και διαβήτη.
2. **Απόδειξη:** είναι η διαδικασία με την οποία, χρησιμοποιώντας θεωρήματα και προτάσεις της Γεωμετρίας, αποδεικνύουμε ότι το σχήμα που κατασκευάστηκε έχει ως στοιχεία του τα δεδομένα του προβλήματος.
3. **Διερεύνηση:** γράφουμε όλες τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται, λαμβάνοντας υπόψη τα δεδομένα, ώστε το πρόβλημα να έχει λύση. Στο βήμα αυτό εξετάζουμε επίσης , αν το πρόβλημα έχει και άλλες λύσεις. Σε απλές κατασκευές το βήμα αυτό παραλείπεται.

7.2.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ

1. Κατασκευή διχοτόμου δεδομένης γωνίας

Κατασκευή

Με κέντρο το σημείο O και τυχαία ακτίνα , γράφουμε κύκλο που τέμνει τις πλευρές της δεδομένης γωνίας $\angle xOy$ στα σημεία A, B. Στη συνέχεια, με ακτίνα μεγαλύτερη από το μισό της απόστασης AB γράφουμε δύο τόξα με κέντρα τα σημεία A, B τα οποία τέμνονται στο σημείο Γ. Η ημιευθεία $O\Gamma$ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\angle xOy$



Σχήμα 1

Απόδειξη: Τα τρίγωνα $\Delta AO\Gamma$ $και$ $\Delta BO\Gamma$ είναι ίσα, αφού $O\Gamma$ είναι κοινή πλευρά των τριγώνων, $OB = OA$ $και$ $B\Gamma = A\Gamma$ από κατασκευής. Επομένως $\angle AO\Gamma = \angle BO\Gamma$

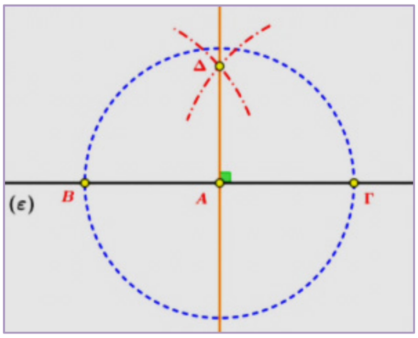
Άρα, η ημιευθεία $O\Gamma$ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\angle xOy$

Μπορείτε να δείτε τα βήματα της κατασκευής μέσα από τα εφαρμογίδια:
Do.01.ggb και **show.01.ggb**

2. Κατασκευή κάθετης σε σημείο A ευθείας (ε)

Κατασκευή

Με κέντρο το σημείο A και τυχαία ακτίνα ρ, γράφουμε κύκλο (A, ρ) που τέμνει την ευθεία (ε) στα σημεία B $και$ Γ. Στη συνέχεια, με ακτίνα μεγαλύτερη από την απόσταση AB γράφουμε δύο τόξα με κέντρα τα σημεία B $και$ Γ. Αν Δ το σημείο τομής τους στο ένα ημιεπίπεδο που ορίζει η (ε) ,τότε η ευθεία ΔA είναι η ζητούμενη κάθετη ευθεία στην (ε).



Σχήμα 2

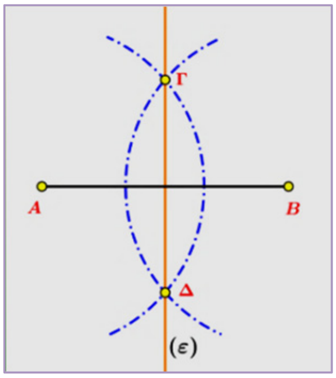
Απόδειξη: Από την κατασκευή είναι προφανές ότι $\Delta B = \Delta\Gamma$, επομένως το τρίγωνο $\Delta B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές. Το σημείο A είναι το μέσον της βάσης $B\Gamma$, άρα το ΔA είναι **διάμεσος** του τριγώνου, συνεπώς και **ύψος**, δηλαδή $\boldsymbol{\Delta A} \perp \boldsymbol{B\Gamma}$.

show.02.ggb

3. Κατασκευή μέσου και μεσοκάθετης ευθυγράμμου τμήματος AB.

Κατασκευή

Με κέντρα τα σημεία $A\ και\ B$ και τυχαία ακτίνα $\rho > \frac{AB}{2}$ γράφουμε δύο ίσους κύκλους. Έστω Γ, Δ τα σημεία τομής των κύκλων. Η ευθεία (ε) που ορίζεται από τα Γ, Δ είναι η ζητούμενη μεσοκάθετη του AB.



Σχήμα 3

Απόδειξη

Η ευθεία (ε) από την κατασκευή είναι κοινή χορδή των δύο κύκλων και επομένως θα είναι κάθετη στη διάκεντρο AB και επειδή οι κύκλοι είναι ίσοι η ευθεία (ε) είναι μεσοκάθετη.

Διερεύνηση

Για να έχει λύση το πρόβλημα, θα πρέπει οι δύο κύκλοι που κατασκευάσαμε να τέμνονται. Επειδή, όμως, ισχύει: $\rho - \rho < AB < \rho + \rho$, συμπεραίνουμε ότι οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι.

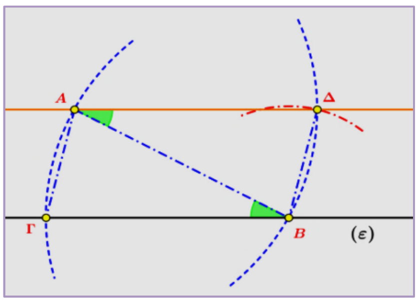
Παρατήρηση: Με την ίδια κατασκευή βρίσκουμε και το μέσο ευθυγράμμου τμήματος.

Do.03.ggb και **show.03.ggb**

4. Κατασκευή παράλληλης από σημείο A εκτός ευθείας (ε) προς την (ε).

Κατασκευή

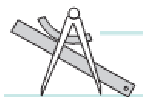
Με κέντρο το σημείο A και τυχαία ακτίνα ρ μεγαλύτερη της απόστασης του σημείου A από την ευθεία (ε), κατασκευάζουμε κύκλο (A, ρ). Έστω B το ένα σημείο τομής του με την (ε). Με κέντρο το B και ακτίνα BA γράφουμε τόξο που τέμνει την (ε) στο σημείο Γ.



Σχήμα 4

Στη συνέχεια με κέντρο το B και ακτίνα ίση με το $ΑΓ$ γράφουμε τόξο και έστω $Δ$ το σημείο τομής του με τον κύκλο $(A, ρ)$ που βρίσκεται στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η (ε) με το σημείο Α.
Ισχυριζόμαστε ότι η ευθεία $ΑΔ \parallel (ε)$

Απόδειξη
Από την κατασκευή $ΔΑΔΒ = ΔΑΒΓ$ αφού $ΑΒ = ΑΒ$, $ΑΔ = ΒΓ \text{ και } ΑΓ = ΒΔ$
Επομένως, $\angle ΔΑΒ = \angle ΑΒΓ \Longrightarrow \boldsymbol{ΑΔ} \parallel \boldsymbol{ΒΓ}$, αφού δύο εντός εναλλάξ γωνίες που σχηματίζουν με την $ΑΒ$ είναι ίσες.

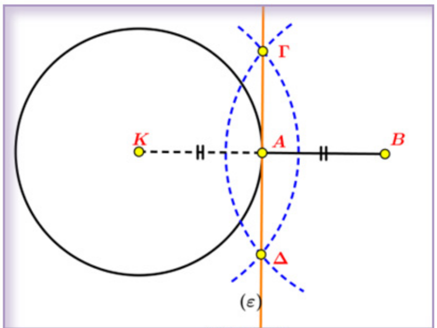


Do.04.ggb και **show.04.ggb**

---

5. Κατασκευή εφαπτομένης κύκλου (Κ,ρ) σε ένα σημείο του Α

Κατασκευή
Στην προέκταση της ακτίνας $ΚΑ$ παίρνουμε σημείο B ,τέτοιο ώστε $ΚΑ = ΑΒ$. Κατασκευάζουμε τη μεσοκάθετη $(ε)$ του τμήματος $ΚΒ$, που είναι η ζητούμενη εφαπτομένη του κύκλου $(Κ, ρ)$ στο σημείο A του κύκλου $(Κ, ρ)$



Σχήμα 5

Απόδειξη
Η ευθεία $(ε)$, από την κατασκευή, είναι κάθετη στην ακτίνα $ΚΑ$ στο άκρο της A, άρα είναι εφαπτομένη του κύκλου στο A.

Do.05.ggb και **show.05.ggb**

---

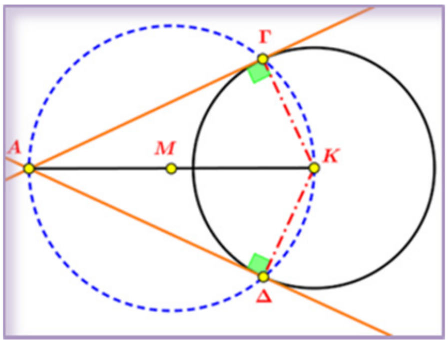
6. Κατασκευή εφαπτομένων από σημείο A εκτός κύκλου (K,ρ)

Κατασκευή

Αρχικά βρίσκουμε το μέσο M του τμήματος AK (κατασκευή 3 σελ.5)

Το μέσο M μπορεί να είναι έξω από τον δεδομένο κύκλο, όπως φαίνεται στο (Σχήμα 6), μπορεί όμως, να είναι και εσωτερικό σημείο του κύκλου.

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε τον κύκλο διαμέτρου KA και έστω $\Gamma\ \kappa\alpha\iota\ \Delta$ τα σημεία τομής του με τον κύκλο (K,ρ).



Σχήμα 6

Φέρουμε τις ευθείες $A\Gamma\ \ \kappa\alpha\iota\ A\Delta$, που είναι οι ζητούμενες εφαπτόμενες του κύκλου (K,ρ) από το σημείο $\boldsymbol{A} \notin (K,\rho)$

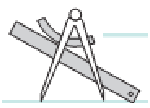
Απόδειξη

Οι γωνίες $\angle A\Gamma K\ \kappa\alpha\iota\ \angle A\Delta K$ είναι εγγεγραμμένες γωνίες στον κύκλο διαμέτρου KA και βαίνουν σε ημικύκλιο, επομένως $\angle A\Gamma K = \angle A\Delta K = 90°$

Άρα, οι ακτίνες $K\Gamma\ \kappa\alpha\iota\ K\Delta$ του κύκλου (K,ρ) είναι κάθετες, αντίστοιχα, στις $A\Gamma$, $A\Delta$ και επομένως είναι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία $\Gamma\ \kappa\alpha\iota\ \Delta$, αντίστοιχα.

Διερεύνηση

Το πρόβλημα έχει πάντοτε λύση, γιατί οι δύο κύκλοι (K,ρ) και (M,MA) είναι πάντοτε τεμνόμενοι, αφού ο κύκλος (M,MA) διέρχεται από τα σημεία A,K με το ένα σημείο να είναι εξωτερικό και το άλλο εσωτερικό του κύκλου (K,ρ).



Do.06.ggb και **show.06.ggb**

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

1. Να κατασκευάσετε γεωμετρικά μια γωνία ίση με : $\alpha)$ 45° , β) 30°, γ) 75°

2. Να κατασκευάσετε τετράγωνο $ΑΒΓΔ$, που να έχει διαγώνιο ίση με ένα δεδομένο ευθύγραμμο τμήμα $ΑΓ = \mu$.

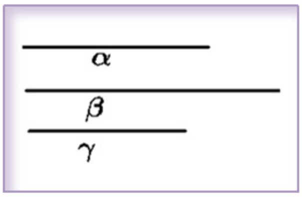
3. Να κατασκευάσετε ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά δεδομένο τμήμα α.

4. Δίνεται γωνία $\angle xOy$ και ένα σημείο A στο εσωτερικό της.
   Να κατασκευάσετε μια ευθεία που να διέρχεται από το σημείο A και να αποκόπτει ίσα ευθύγραμμα τμήματα από τις πλευρές της γωνίας.

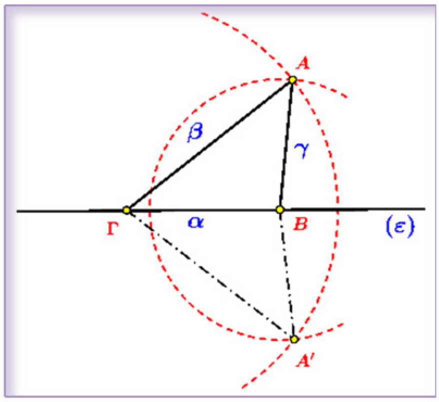
5. Δίνεται κύκλος (κ) και ευθεία (ε). Να κατασκευάσετε ευθεία $(\varepsilon') \parallel (\varepsilon)$, που να εφάπτεται του δεδομένου κύκλου (κ)

7.2.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

1. Κατασκευή τριγώνου $\varDelta\mathrm{AB\Gamma}$ όταν δίνονται οι πλευρές του α, β, γ



Do.07.ggb και **show.07.ggb**



Σχήμα 7

Κατασκευή

Πάνω σε ευθεία (ε), **(Σχήμα 7),** παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$ ίσο με ένα από τα δεδομένα τμήματα, έστω $B\Gamma = \alpha$. Γράφουμε δύο κύκλους με κέντρα τα σημεία $B\ και\ \Gamma$ και με ακτίνες ίσες με $\gamma\ και\ \beta$, αντίστοιχα.

Αν οι κύκλοι τέμνονται, το σημείο τομής τους θα είναι η τρίτη κορυφή του τριγώνου (A ή A' στο παραπάνω σχήμα).

Απόδειξη

Πράγματι, από την κατασκευή που κάναμε, το τρίγωνο $\varDelta AB\Gamma$ έχει ως πλευρές του τα δεδομένα ευθύγραμμα τμήματα, γιατί $B\Gamma = \alpha$, $AB = \gamma$ ως ακτίνα του κύκλου (B,γ) και $A\Gamma = \beta$ ως ακτίνα του κύκλου (Γ,β).

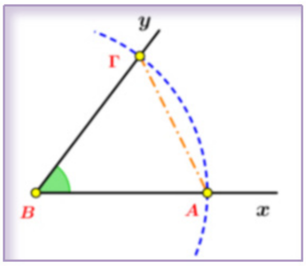
Διερεύνηση

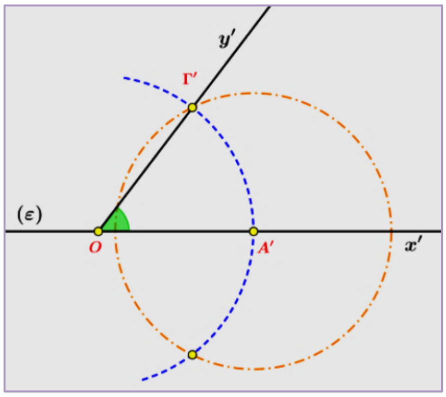
Για να έχει λύση το πρόβλημα πρέπει οι δύο κύκλοι $(B,\gamma)\ και\ (\Gamma,\beta)$ να τέμνονται. Για να ισχύει αυτό, αν υποθέσουμε ότι $\beta > \gamma$, θα πρέπει να ισχύει η τριγωνική ανισότητα, δηλαδή $\beta - \gamma < \alpha < \beta + \gamma$

Αν A' το δεύτερο σημείο τομής των δύο κύκλων $(B,\gamma)\ και\ (\Gamma,\beta)$, το τρίγωνο $\varDelta A'B\Gamma$ είναι ίσο με το τρίγωνο $\varDelta AB\Gamma$ και άρα δεν αποτελεί άλλη λύση του προβλήματος.

Η παρακάτω βασική κατασκευή γωνίας ίση με μια δεδομένη γωνία, είναι χρήσιμη και απαραίτητη στην κατασκευή τριγώνων.

Κατασκευή γωνίας ίση με μια δεδομένη γωνία $\angle xBy$ και τέτοια ώστε μία από τις πλευρές της να είναι δεδομένη ευθεία (ε), και η κορυφή της σημείο O πάνω στην (ε) .





Σχήμα 7

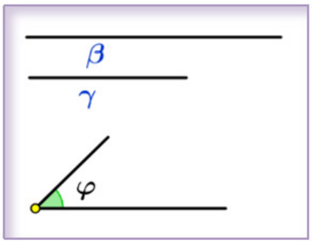
Κατασκευή

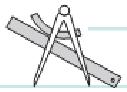
Πάνω στην πλευρά Bx της δεδομένης γωνίας $\angle xBy$ παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο A και κατασκευάζουμε τον κύκλο (B, BA). Με τον τρόπο αυτό έχουμε κάνει την δεδομένη γωνία επίκεντρη, με το αντίστοιχο τόξο της να είναι $\widehat{A\Gamma}$. Με κέντρο το σημείο O και ακτίνα ίση με BA γράφουμε κύκλο ο οποίος τέμνει την ημιευθεία Ox' στο σημείο A'. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε κύκλο $(A', A\Gamma)$ ο οποίος τέμνει τον κύκλο (O, OA') σε δύο σημεία και έστω ότι ένα από αυτά είναι το Γ' **(Σχήμα 7).** Φέρουμε την ημιευθεία $O\Gamma'$ και η γωνία $\angle A'O\Gamma'$ είναι η ζητούμενη.

Απόδειξη

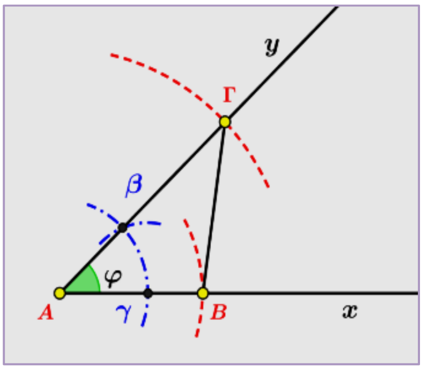
Οι γωνίες $\angle xBy$ και $\angle x'Oy'$ είναι ίσες, γιατί είναι επίκεντρες γωνίες των ίσων κύκλων $(B, BA)\, και\, (O, OA')$ και τα αντίστοιχα τόξα τους $\widehat{A\Gamma}$ και $\widehat{A'\Gamma'}$ είναι ίσα από κατασκευής.

2. Κατασκευή τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ όταν δίνονται οι δύο πλευρές του $AB = \gamma$, $A\Gamma = \beta$ και η περιεχόμενη σε αυτές γωνία, $\angle A = \varphi$.





Do.08.ggb και **show.08.ggb**



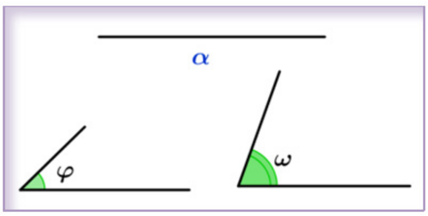
Σχήμα 8

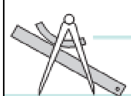
Κατασκευή
Αρχικά κατασκευάζουμε γωνία $\angle xAy = \varphi$ **(Σχήμα 8)** *(Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη κατασκευή)* και στις πλευρές Ax, Ay της γωνίας φ παίρνουμε, χρησιμοποιώντας τον διαβήτη, τα σημεία $B \; και \; \Gamma$, αντίστοιχα, τέτοια ώστε $A\Gamma = \beta \; και \; AB = \gamma$. Το τρίγωνο $\triangle$ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.

Απόδειξη
Πράγματι, από την κατασκευή που κάναμε το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι το ζητούμενο, γιατί έχει $A\Gamma = \beta \;\; και \;\; AB = \gamma$ και $\angle A = \varphi$.

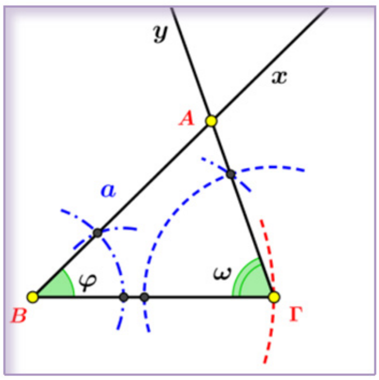
Διερεύνηση
Για να έχει λύση το πρόβλημα πρέπει να ισχύει $0° < \varphi < 180°$. Το πρόβλημα έχει μια μοναδική λύση.

3. Κατασκευή τριγώνου $\triangle$ΑΒΓ όταν δίνονται η πλευρά του $\mathrm{B\Gamma} = \alpha$ και οι προσκείμενες σε αυτήν γωνίες $\angle\Gamma = \varphi$ και $\angle \mathrm{B} = \omega$.





Do.09.ggb και **show.09.ggb**



Σχήμα 10

Κατασκευή

Παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα $ΒΓ = α$, **(Σχήμα 10),** και με κορυφές τα σημεία $Β \ και \ Γ$ κατασκευάζουμε στο ίδιο ημιεπίπεδο που καθορίζει η ευθεία $ΒΓ$, γωνίες τέτοιες ώστε $\angle ΓΒx = φ \ \ και \ \angle ΒΓy = ω$.

Οι πλευρές $Bx \ και \ Γy$ των γωνιών αυτών τέμνονται στο σημείο $Α$. Το τρίγωνο $\varDelta ΑΒΓ$ είναι το ζητούμενο.

Απόδειξη

Από την κατασκευή το τρίγωνο $\varDelta ΑΒΓ$ έχει $ΒΓ = α, \ \angle Β = φ \ \ και \ \ \angle Γ = ω$

Διερεύνηση

Το πρόβλημα έχει μοναδική λύση, αν $0° < ω + φ < 180°$, γιατί τότε οι ημιευθείες $Bx \ και \ Γy$ τέμνονται.

Ιστορικό Σημείωμα

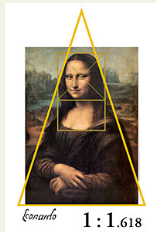
Από όλα αυτά εκείνο που κεντρίζει ιδιαίτερα τον αναγνώστη, με επιστημονική περιέργεια, είναι η ομολογουμένως συγκλονιστική διαιώνιση στον κόσμο μας ενός «χρυσού κανόνα». Οι Ευρωπαίοι τον πρωτογνώρισαν στα κείμενα και στα οικοδομήματα των δικών μας προγόνων, ως μια γεωμετρική αναλογία διαδοχικών ευθύγραμμων τμημάτων, ορθογωνίων ή όγκων, που είναι **«η πιο αρμονική και αισθητικά ευχάριστη στο μάτι».**

Την είχε βρει ο Πυθαγόρας (580π.Χ-490 π.Χ) και την είχε απεικονίσει στο σύμβολο της σχολής του, το πεντάλφα και τη διατύπωσε μαθηματικά ο Ευκλείδης το 300 π.Χ.

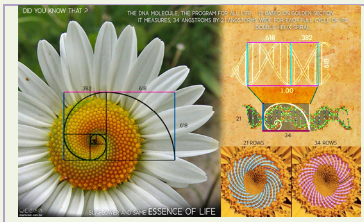
Την υιοθέτησε επίσης ο Πλάτωνας στα ιδεατά σχήματά του, τα κανονικά πολύεδρα, που συνθέτουν τον κόσμο.

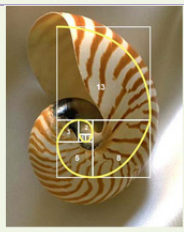
Έπειτα την εφάρμοσαν ο Ικτίνος, ο Καλλικράτης και ο Φειδίας στον Παρθενώνα. Την ίδια αυτή αναλογία ξαναβρήκαν οι επιστήμονες του Ναπολέοντα στην Αίγυπτο όταν μέτρησαν τις Πυραμίδες.

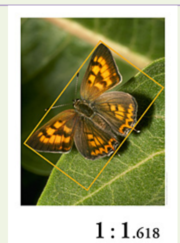
Μετά τον Μεσαίωνα και με το πέρασμα της πνευματικής σκυτάλης στους Δυτικούς, την ξαναβρήκε ο Φιμπονάτσι. Την εισήγαγε στις αρχές του 12ου αιώνα στην Ιταλία και την υιοθέτησαν προπομποί της Αναγέννησης όπως ο Ντα Βίντσι, αργότερα ζωγράφοι όπως ο Μοντριάν και πολύ μετά ο Σαλβαντόρ Νταλί, μουσικοσυνθέτες όπως ο Μότσαρτ, ο Μπέλα Μπάρτοκ και ο Ντεμπυσί αλλά και σπουδαίοι αρχιτέκτονες του 20ού αιώνα, όπως ο Λε Κορμπυζιέ.

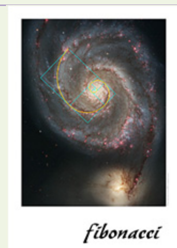


Τα τελευταία 150 χρόνια, από τότε που ανακίνησε το θέμα ο Γερμανός ψυχολόγος Theodor Fechner ο «χρυσός κανόνας» αποκαλύπτεται συνεχώς να υπάρχει παντού στη φύση ως η βέλτιστη επιλογή ανάπτυξης. Από τα πέταλα των λουλουδιών ως τα φύλλα των δένδρων και από τις έλικες των κοχυλιών ως τα τμήματα του σώματος των πεταλούδων, όλα μοιάζουν να ακολουθούν τη χρυσή αναλογία. Την ίδια εκείνη αναλογία που βρίσκουμε μεταξύ των μελών καλοσχηματισμένων ανθρώπινων σωμάτων, των χαρακτηριστικών «κατά κοινή ομολογία» όμορφων προσώπων και ακόμη στη διατομή αυτού του DNA μας, στις έλικες των γαλαξιών , ακόμη και στη στροφορμή μιας μαύρης τρύπας!









Πρόσφατα, διαπιστώθηκε ότι και τα καλύτερα τεχνητά υλικά που κατασκεύασε ο άνθρωπος, οι νανοσωλήνες άνθρακα, έχουν δομή βασισμένη στα πλατωνικά πολύεδρα, που επίσης εμφανίζουν αυτή την αναλογία μεταξύ των τριγώνων που τα απαρτίζουν. Τέλος μια μαθηματική θεωρία αποφάνθηκε ότι το Σύμπαν είναι ένα πολύεδρο που, φυσικά, υπόκειται στον «χρυσό κανόνα». Το όνομα «χρυσός κανόνας» της αναλογίας αυτής δόθηκε από τον Λατίνο ποιητή Οράτιο και αργότερα από τον Κέπλερ. Οι καλλιτέχνες της Αναγέννησης όμως προτίμησαν τον όρο «Θεία Αναλογία», θεωρώντας ότι μια τόσο τέλεια και θαυμαστή αρμονία θα πρέπει να δόθηκε στους ανθρώπους από τον ίδιο τον Θεό. Η «Χρυσή τομή» είναι λοιπόν ο μηχανισμός όπου κατέληξε η φύση μετά τις άπειρες δοκιμές της, στα δισεκατομμύρια χρόνια που πέρασαν. Οι Έλληνες την ανακάλυψαν όταν μετρούσαν τις αναλογίες του ανθρώπινου σώματος, για να σμιλέψουν τα υπέροχα γλυπτά τους.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

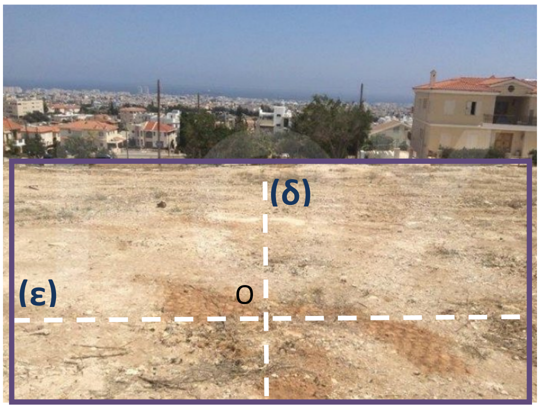
1. Να κατασκευάσετε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $\varDelta AB\varGamma\ \mu\varepsilon\ \angle A = 90°$, όταν δίνονται:
   α) $B\varGamma = \alpha\ \ \kappa\alpha\iota\ \ A\varGamma = \beta$
   β) $AB = \gamma\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \angle B = \varphi$

2. Να κατασκευάσετε ορθογώνιο τρίγωνο $\varDelta AB\varGamma$ $(\angle A = 90°)$, όταν δίνονται η πλευρά $B\varGamma = \alpha$ και το ύψος του υ_α

3. Να κατασκευάσετε τρίγωνο $\varDelta$ΑΒΓ όταν δίνονται η γωνία $\angle B = \omega$, η γωνία $\angle \varGamma = \varphi$ και το ύψος του υ_α

7.3 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΤΟΠΟΥ

Διερεύνηση



Στη διπλανή εικόνα φαίνεται ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις $28m \times 15m$, στο οποίο πρόκειται να ανεγερθεί οικοδομή. Οι μεσοκάθετοι (ε) και (δ) των πλευρών του τέμνονται στο σημείο O.

Οι τέσσερις βάσεις για τις γωνιακές δοκούς της οικοδομής θα πρέπει να τοποθετηθούν στα σημεία του οικοπέδου που απέχουν από την ευθεία (ε) $5m$ και από το κέντρο O του οικοπέδου $7m$

α) Να βρείτε ένα πρακτικό τρόπο με τον οποίο ο εργολάβος της οικοδομής μπορεί να προσδιορίσει τις τέσσερις θέσεις για τις βάσεις των δοκών.

β) Να διερευνήσετε αν τα σημεία αυτά που ικανοποιούν τις παραπάνω συνθήκες είναι μοναδικά και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον στην Ευκλείδεια Γεωμετρία παρουσιάζουν προβλήματα του τύπου: « Να προσδιορίσετε ένα σύνολο σημείων (σημειοσύνολο) του οποίου κάθε στοιχείο (σημείο) ικανοποιεί μια δεδομένη συνθήκη (ιδιότητα) I ή και περισσότερες.» Η επίλυση αυτών των προβλημάτων συνίσταται στον προσδιορισμό της μορφής αυτού του σημειοσυνόλου G στο επίπεδο ή στο χώρο, με την βοήθεια άλλων γνωστών σχημάτων ή γραμμών των οποίων γνωρίζουμε τις ιδιότητες και μπορούμε να τα κατασκευάσουμε. Αυτά τα προβλήματα λέμε, ότι είναι προβλήματα **γεωμετρικών τόπων** και με αυτά θα ασχοληθούμε στην ενότητα αυτή.

Ιστορικό Σημείωμα

Στην Ακαδημία του Πλάτωνα στην Αρχαία Αθήνα $(430 - 347 \text{ π.Χ})$ αναπτύχθηκαν κατ' αρχάς οι γεωμετρικοί τόποι, σε συνδυασμό με την αναλυτική-συνθετική μέθοδο απόδειξης γεωμετρικών και όχι μόνο προβλημάτων.

Αργότερα, όμως, ο «μέγας Γεωμέτρης» Απολλώνιος ο Περγαίος ασχολήθηκε με τους Γεωμετρικούς τόπους πιο συστηματικά. Ο Απολλώνιος έγραψε δύο βιβλία με τίτλο «Επίπεδοι τόποι», τα οποία δυστυχώς δεν σώζονται. Στα βιβλία αυτά ο Απολλώνιος αναφέρεται στην εύρεση του γεωμετρικού τόπου ενός σημείου στο επίπεδο, σε πολλές περιπτώσεις, αν ο τόπος είναι ευθεία γραμμή ή περιφέρεια.

Παράδειγμα 1

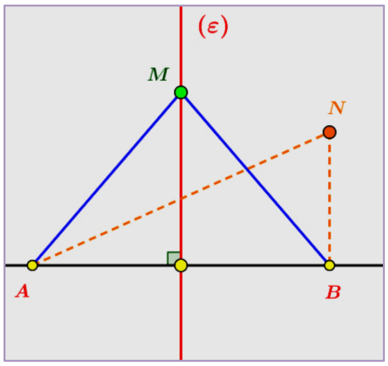
Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και κατασκευάζουμε τη μεσοκάθετη (ε) του τμήματος ΑΒ. Γνωρίζουμε ότι κάθε σημείο M της (ε) έχει την παρακάτω ιδιότητα I

I: **«*Κάθε σημείο M της (ε) ισαπέχει από τα άκρα A και B του τμήματος AB»***

δηλαδή, ισχύει $MA = MB$

Αν πάρουμε οποιοδήποτε άλλο σημείο N του επιπέδου, που δεν ανήκει στην (ε), τότε θα έχουμε $NA \neq NB$.

Βλέπουμε λοιπόν ότι όλα τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται πάνω στην (ε) ***και μόνο αυτά ικανοποιούν την ιδιότητα I***.



Σχήμα 13

Τότε, λέμε ότι, ο **γεωμετρικός τόπος** των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος AB είναι η **μεσοκάθετη (ε)** του AB.

Παράδειγμα 2

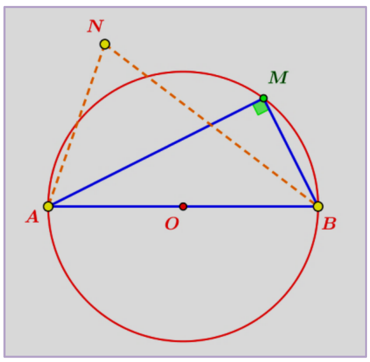
Δίνεται κύκλος με διάμετρο AB. Γνωρίζουμε ότι κάθε σημείο M του κύκλου έχει την παρακάτω ιδιότητα I.

I: **«Κάθε σημείο M του κύκλου $\left(O, \frac{AB}{2}\right)$ βλέπει τη διάμετρο AB υπό γωνία $90°$» , *δηλαδή***

$\angle AMB = 90°$

Αν πάρουμε οποιοδήποτε άλλο σημείο N που δεν ανήκει στον κύκλο $\left(O, \frac{AB}{2}\right)$, τότε:

- Αν το σημείο N είναι μέσα στον κύκλο θα έχουμε $\angle ANB > 90°$
- Αν το σημείο N είναι έξω από τον κύκλο θα έχουμε $\angle ANB < 90°$



Σχήμα 14

Βλέπουμε λοιπόν ότι όλα τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται πάνω στον κύκλο $\boldsymbol{\left(O,\frac{AB}{2}\right)}$ ***και μόνο αυτά ικανοποιούν την ιδιότητα $\boldsymbol{I}$***.

Έτσι λέμε ότι, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που **«βλέπουν»** το ευθύγραμμο τμήμα AB υπό γωνία $90°$, είναι **ο κύκλος $\boldsymbol{\left(O,\frac{AB}{2}\right)}$,** όπου O το μέσον του AB. Από τα προηγούμενα παραδείγματα βλέπουμε ότι υπάρχουν σημειοσύνολα (ευθεία, κύκλος ή μέρη αυτών) που **όλα τα σημεία τους και μόνο αυτά**, έχουν μια ορισμένη χαρακτηριστική ιδιότητα I.Τα σημειοσύνολα αυτά ονομάζονται γεωμετρικοί τόποι, με την ιδιότητα I.

Ορισμός

Γεωμετρικός τόπος ονομάζεται κάθε *σημειοσύνολο* G του οποίου **όλα** τα σημεία και **μόνο αυτά** έχουν μια δεδομένη ιδιότητα I.

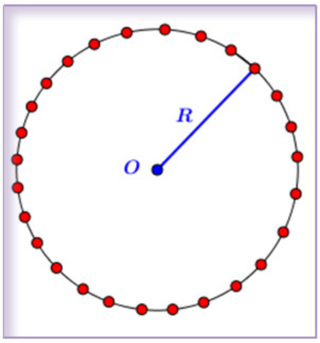
Η φράση « **όλα τα σημεία του συνόλου και μόνο αυτά»** έχει διπλή σημασία:

I. Όλα τα σημεία του γεωμετρικού τόπου ικανοποιούν την δεδομένη ιδιότητα.

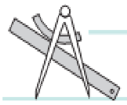
II. Όλα τα σημεία που ικανοποιούν την δεδομένη ιδιότητα βρίσκονται πάνω στο γεωμετρικό τόπο.

7.4 ΒΑΣΙΚΟΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

1. **« Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου τα οποία απέχουν σταθερή απόσταση R από ένα δεδομένο σταθερό σημείο O είναι ο κύκλος με κέντρο O και ακτίνα R»**

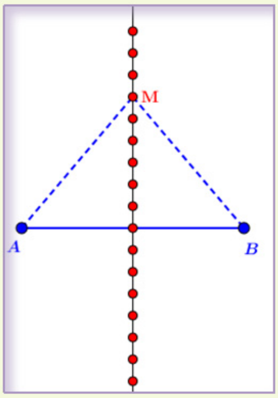


Σχήμα 15

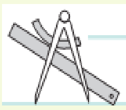


Do.15.ggb

2. **« Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δύο δεδομένα σημεία A και B είναι η μεσοκάθετος του τμήματος AB »**

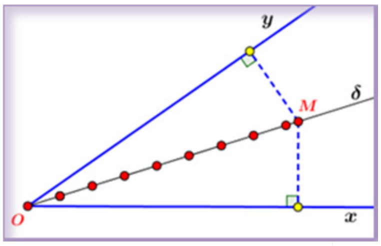


Σχήμα 16

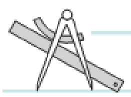


Do.16.ggb

3. **« Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου τα οποία βρίσκονται στο εσωτερικό μιας γωνίας $\angle xOy$ και ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας είναι η διχοτόμος της γωνίας »**

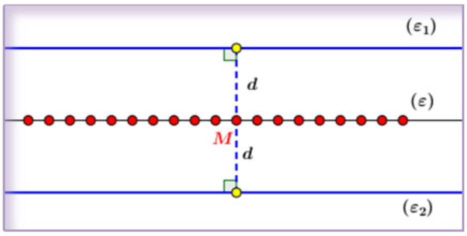


Σχήμα 17



Do.17.ggb

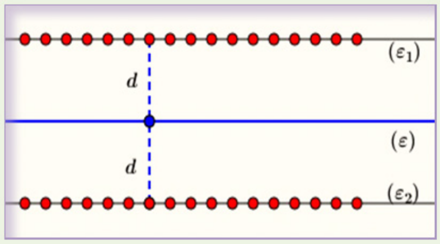
4. « Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δύο παράλληλες ευθείες (ε_1) $\kappa\alpha\iota$ (ε_2) είναι η μεσοπαράλληλος (ε) των δύο ευθειών»



Do.18.ggb

Σχήμα 18

5. « Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου τα οποία απέχουν απόσταση d από μια ευθεία (ε) του επιπέδου είναι δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2) παράλληλες προς την (ε) και σε απόσταση d από αυτήν.»

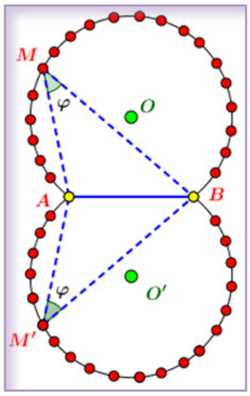


Σχήμα 19

Do.19.ggb

6. «Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου από τα οποία φαίνεται το σταθερό ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ υπό γνωστή γωνία ∠φ, είναι δύο τόξα συμμετρικά ως προς την AB που δέχονται γωνία ίση με $\angle\varphi$»

Αν $\widehat{AMB}$ είναι ένα τόξο κύκλου που έχει χορδή την AB και διέρχεται από το M, τότε λέμε ότι το τόξο $\widehat{AMB}$ δέχεται γωνία ∠φ.



Σχήμα 20

Do.20.ggb

7.5 ΕΥΡΕΣΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΤΟΠΟΥ

Τα προβλήματα των γεωμετρικών τόπων στην Ευκλείδεια Γεωμετρία έχουν την εξής δομή:

- Δίνεται μια χαρακτηριστική **ιδιότητα I**
- Ζητείται, να προσδιορισθεί το **σημειοσύνολο** που δημιουργεί το **μεταβλητό σημείο M,** καθώς κινείται πάνω στο επίπεδο, κάτω από τη δεδομένη ιδιότητα I , δηλαδή ικανοποιώντας σε κάθε θέση του την ιδιότητα-συνθήκη I.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΥΡΕΣΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΤΟΠΟΥ

α) Πιθανολόγηση του Γεωμετρικού τόπου

Για την εύρεση του γεωμετρικού τόπου, διευκολύνει πολύ να γνωρίζουμε αν ο γεωμετρικός τόπος θα βρίσκεται πάνω σε ευθεία ή σε κύκλο ή σε οποιοδήποτε άλλο γεωμετρικό σχήμα.

Για να ¨πιθανολογήσουμε¨ το σχήμα του γεωμετρικού τόπου παίρνουμε μερικά **σημεία του επιπέδου,** που ικανοποιούν την ιδιότητα I.

Οι διαδοχικές θέσεις των σημείων αυτών θα μας υποδείξουν το είδος της γραμμής πάνω στην οποία θα βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος (ευθεία, περιφέρεια, κτλ.)

Η διαδικασία αυτή δεν αποτελεί απόδειξη, αλλά απλά μας βοήθα στην εύρεση του γεωμετρικού τόπου. Συνήθως στην επιπεδομετρία οι γεωμετρικοί τόποι είναι ευθείες (ή τμήματα ευθειών) ή κύκλοι (ή τόξα κύκλων).

β) Για την εύρεση του Γεωμετρικού τόπου ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα

1^o . Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο M του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου και με βάση την ιδιότητα I που έχει, **προσδιορίζουμε τη γραμμή G** πάνω στην οποία βρίσκεται το σημείο αυτό.

2^o. Κατασκευάζουμε με κανόνα και διαβήτη τη γραμμή G .

3^o. Αποδεικνύουμε το **αντίστροφο,** δηλαδή παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο της γραμμής G και εξετάζουμε αν αυτό ικανοποιεί τη δεδομένη ιδιότητα I του γεωμετρικού τόπου.

4^o. **Διερεύνηση:** Το αντίστροφο μπορεί να μην ισχύει γενικά, δηλαδή μπορεί να υπάρχουν σημεία του σημειοσυνόλου G που δεν επαληθεύουν την ιδιότητα Ι. Τότε, ο γεωμετρικός τόπος δεν θα είναι ολόκληρη η γραμμή, αλλά ένα μέρος της, το οποίο πρέπει να προσδιορίσουμε.

ΣΧΟΛΙΟ

Σε κάθε πρόβλημα γεωμετρικού τόπου μας δίνονται πάνω στο επίπεδο ένα ή περισσότερα **σταθερά στοιχεία** (σημεία, γωνίες, ευθύγραμμα τμήματα, κτλ) στα οποία πρέπει να δίνεται ιδιαίτερη σημασία και να διακρίνονται στο σχήμα.

Πρόβλημα 1	**Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που διέρχονται από δύο σταθερά σημεία A και B.**

Πιθανολόγηση του Γεωμετρικού τόπου

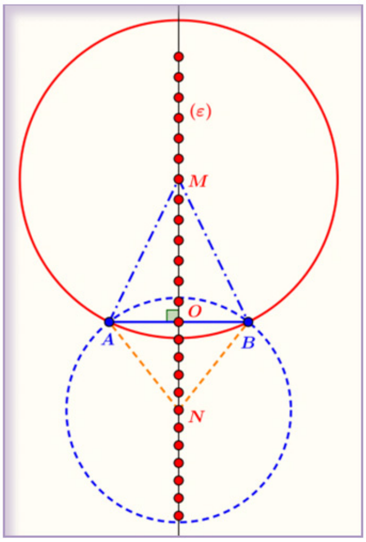
Τα σταθερά στοιχεία του προβλήματος είναι το ευθύγραμμο τμήμα AB και επομένως και το μέσον του. Ο κύκλος $(O, \frac{AB}{2})$ περνά από τα A και B. Άρα το σημείο O είναι σημείο του τόπου. Παίρνοντας μερικά σημεία του τόπου, πιθανολογούμε ότι τα κέντρα των κύκλων βρίσκονται πάνω σε ευθεία που διέρχεται από το σημείο O.

Έστω M ένα σημείο του ζητούμενου τόπου, δηλαδή το M είναι κέντρο κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A και B **(Σχήμα 21)**.

Τότε, $MA = MB$ ως ακτίνες του ίδιου κύκλου.

Άρα, το σημείο M ανήκει στην **μεσοκάθετη** (ε) του τμήματος AB.

Αντίστροφα, έστω N σημείο της μεσοκαθέτου (ε) του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ. Θα εξετάσουμε αν το σημείο $N \in (\varepsilon)$ έχει την ιδιότητα του γεωμετρικού τόπου.
Το N είναι σημείο της μεσοκαθέτου του τμήματος AB άρα $\boldsymbol{NA = NB}$.



Σχήμα 21

Επομένως, ο κύκλος (N, NB) διέρχεται και από το σημείο A. Άρα, κάθε σημείο της (ε) είναι κέντρο ενός κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A και B, δηλαδή το τυχαίο σημείο $N \in (\varepsilon)$ **έχει την ιδιότητα του γεωμετρικού τόπου.**

Διερεύνηση

Το τυχαίο σημείο $N \in (\varepsilon)$ έχει την ιδιότητα του γεωμετρικού τόπου, συνεπώς όλα τα σημεία της (ε) ικανοποιούν την ιδιότητα αυτή.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι ο ζητούμενος **γεωμετρικός τόπος** είναι η **μεσοκάθετη (ε) του τμήματος AB.**

Do.21.ggb και show.21.ggb

Πρόβλημα 2	**Πάνω στους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy παίρνουμε μεταβλητά σημεία A και B, αντίστοιχα, έτσι ώστε $AB = \lambda$, *σταθερό*. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του μέσου M του AB.**

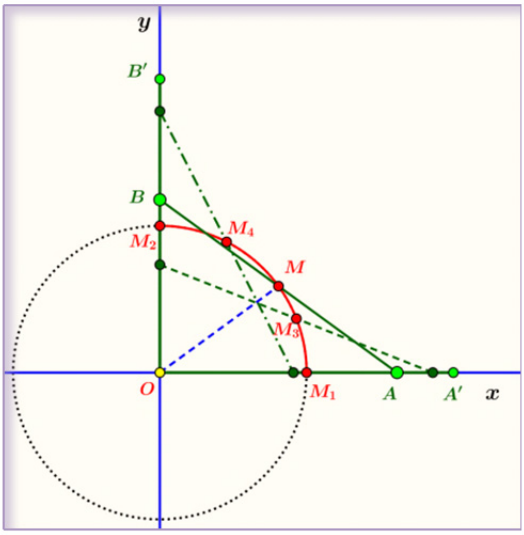
Πιθανολόγηση του Γεωμετρικού τόπου

Τα σταθερά στοιχεία του προβλήματος είναι το μήκος $AB = \lambda$ και το σημείο O. Παρατηρούμε ότι στο πρόβλημα αυτό έχουμε οριακές θέσεις για το ευθύγραμμο τμήμα AB.

- Αν $B \equiv O$ τότε το $A \equiv A'$ έτσι ώστε $OA' = \lambda$, **(Σχήμα 22).** Τότε, το μέσον M_1 του OA' είναι σημείο του ζητούμενου τόπου.
- Αν $A \equiv O$ τότε το $B \equiv B'$ έτσι ώστε $OB' = \lambda$. Τότε, το μέσο M_2 του OB' είναι σημείο του ζητούμενου τόπου.

Παίρνοντας μερικές θέσεις ακόμη για το AB παρατηρούμε ότι τα μέσα του ανήκουν σε κύκλο.

Κατασκευή



Σχήμα 22

Έστω ένα σημείο M του γεωμετρικού τόπου. Τότε $MA = MB$

Άρα το σημείο M είναι το μέσον της υποτείνουσας του ορθογωνίου τριγώνου $\varDelta AOB$. Όμως ξέρουμε ότι

$$OM = \frac{AB}{2} = \frac{\lambda}{2} := \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$$

Επομένως, το σημείο M βρίσκεται πάνω στον κύκλο $\left(O, \frac{\lambda}{2}\right)$.

Αντίστροφα

Παίρνουμε σημείο $M \in \left(O, \frac{\lambda}{2}\right)$. Θα δείξουμε ότι το σημείο αυτό είναι το μέσον ενός ευθυγράμμου τμήματος AB με μήκος λ με τα σημεία A και B να ανήκουν αντίστοιχα στους ημιάξονες Ox και Oy.

Πράγματι, πάνω στην Ox παίρνουμε σημείο A τέτοιο ώστε $MO = MA = \frac{\lambda}{2}$.

(το σημείο A κατασκευάζεται ως εξής: φέρουμε από το M ευθεία (ε_1) κάθετη στην Ox. Το συμμετρικό του O ως προς την (ε_1) είναι το σημείο A)

Προεκτείνουμε την AM και έστω B το σημείο τομής της με την Oy. Τότε, θα έχουμε:

$\angle MOA = \angle MAO$ (αφού MO = MA το τρίγωνο ⊿MOA είναι ισοσκελές)

Επομένως, $\angle MBO = \angle MOB$ (Συμπληρωματικές ίσων γωνιών)

Άρα, από το ισοσκελές τρίγωνο $\triangle MOB$ έχουμε

$$MB = MO \Longrightarrow \text{το } M \text{ είναι το μέσο του } AB \Longrightarrow AB = 2OM = 2 \cdot \frac{\lambda}{2} \Longrightarrow AB = \lambda.$$

Επομένως, το ***M* είναι σημείο του γεωμετρικού τόπου.**

Διερεύνηση

Ο γεωμετρικός τόπος ανήκει σε κύκλο $\left(O, \frac{\lambda}{2}\right)$ αλλά όπως είδαμε υπάρχουν οριακές θέσεις στο πρόβλημα, τα σημεία M_1 *και* M_2. Άρα ο **γεωμετρικός τόπος είναι το τόξο του κύκλου** με επίκεντρη γωνία 90° και ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο του ορθογωνίου συστήματος αξόνων.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

1. Δίνεται ένας κύκλος (O, ρ).
   α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μέσων M των ακτινών του κύκλου
   β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μέσων M των χορδών του κύκλου (O, ρ) που είναι παράλληλες προς μια διάμετρο AB αυτού.

2. Δίνονται δύο ευθείες (ε_1) *και* (ε_2) που τέμνονται στο σημείο O. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου που ορίζουν οι ευθείες (ε_1) *και* (ε_2) και απέχουν από την (ε_1) $2cm$ και ταυτόχρονα και από την ευθεία (ε_2) $3cm$.

3. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κορυφών A των τριγώνων $\triangle AB\Gamma$ που έχουν την πλευρά $B\Gamma$ ίση με δεδομένο σταθερό τμήμα $B\Gamma = \alpha$ και την διάμεσο μ_α ίση με δεδομένο τμήμα λ.

4. Δίνεται κύκλος (O, ρ). Αν N τυχαίο σημείο του κύκλου και M σημείο στην προέκταση της ακτίνας ON έτσι ώστε $ON = NM$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του σημείου M όταν το σημείο N κινείται πάνω στον κύκλο (O, ρ).

5. Δίνεται ευθεία (ε) και ένα σημείο A εκτός αυτής. Αν σημείο B κινείται πάνω στην (ε) να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του μέσου M του AB.

7.6 ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΤΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ

Ιστορικό Σημείωμα

Η αναλυτική-συνθετική μέθοδος στη Γεωμετρία συνδέεται στενά με την Πλατωνική φιλοσοφία. Για τον φιλόσοφο Πλάτωνα η Γεωμετρία και γενικά τα Μαθηματικά ήταν ο ασφαλέστερος δρόμος, για να προσεγγίσει κάποιος τον Κόσμο των Ιδεών. Για να αναδείξει ο Πλάτωνας την αξία της Γεωμετρίας, όταν ίδρυσε την Ακαδημία του στην Αθήνα γύρω στο 387 $\pi.X$, στο υπέρθυρο της αναγραφόταν η επιγραφή:

«Μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω».

Αργότερα ο Αριστοτέλης, που υπήρξε μαθητής της Ακαδημίας του Πλάτωνα, επηρεάστηκε από τη Γεωμετρία και τα Μαθηματικά της εποχής του, χρησιμοποίησε τη μέθοδο της ανάλυσης για την εξαγωγή συμπερασμάτων στις δικές του φιλοσοφικές θεωρίες. Ο Αριστοτέλης, στο έργο του «Ηθικά Νικομάχεια» (1112b. 12-26), παραθέτει ένα απόσπασμα στο οποίο φαίνεται να θεωρεί την ***ανάλυση*** *ως τη μέθοδο σκέψης και απόφασης πάνω σε κάποιο ζήτημα και συνδέει τη διαλεκτική μέθοδο με την ανάλυση ενός σχήματος στη Γεωμετρία. Ο πρώτος ορισμός της μεθόδου ανάλυσης – σύνθεσης εντοπίζεται σε αναφορά κάποιου από τους σχολιαστές του έργου «Στοιχεία» του Ευκλείδη. Αναφέρεται:*

> *«Τί ἐστιν ἀνάλυσις καὶ τί ἐστι σύνθεσις.*
>
> *Ἀνάλυσις μὲν οὖν ἐστι λῆψις τοῦ ζητουμένου ὡς ὁμολογουμένου <και το πέρασμα> διὰ τῶν ἀκολούθων ἐπί τι ἀληθὲς ὁμολογούμενον.*
>
> *Σύνθεσις δὲ λῆψις τοῦ ὁμολογουμένου <και το πέρασμα> διὰ τῶν ἀκολούθων ἐπί τι ἀληθὲς ὁμολογούμενον»*

Σύμφωνα λοιπόν με τον ορισμό της Αναλυτικής – Συνθετικής μεθόδου έχουμε:

Ανάλυση είναι η διαδικασία που ξεκινά με την υπόθεση ότι το ζητούμενο είναι αληθές και προχωρά με ακολουθία λογικών αληθών προτάσεων, μέχρι να φτάσουμε σε μια πρόταση που είναι γνωστό εκ των προτέρων ότι είναι αληθής και ανεξάρτητη από το ζητούμενο.

Δηλαδή, έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε

$$\ll \textbf{Αν ισχύει Α, τότε ισχύει Β} \gg$$

Στην αναλυτική μέθοδο δεχόμαστε το συμπέρασμα Β αληθές και προσπαθούμε με αναγκαίες συνθήκες

$$\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_\nu$$

να φτάσουμε σε μια πρόταση P_ν , της οποίας η αλήθεια είναι ανεξάρτητη από την υπόθεση Β . Παραστατικά έχουμε

$$\mathrm{B} \Longrightarrow \mathrm{P}_1 \Longrightarrow \mathrm{P}_2 \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow \mathrm{P}_\nu$$

- Αν οι συνθήκες είναι αναγκαίες και ικανές τότε, γράφουμε:

$$\mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{P}_1 \Leftrightarrow \mathrm{P}_2 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \mathrm{P}_\nu$$

- Η αναλυτική μέθοδος είναι η **μέθοδος της αναζήτησης**.
  Με τη μέθοδο αυτή προσπαθούμε να **ανακαλύψουμε τον δρόμο $\mathbf{P}_\nu$** , για να φτάσουμε στο συμπέρασμα Β.

Σύνθεση είναι η διαδικασία που ξεκινά από μια αληθή πρόταση και προχωρά με ακολουθία λογικών αληθών προτάσεων, μέχρι να φτάσουμε στην απόδειξη της ζητούμενης πρότασης. Πιο συγκεκριμένα, ή σύνθεση ξεκινά από το τελευταίο βήμα της ανάλυσης και με αντίστροφα βήματα φτάνουμε στο ζητούμενο.

Δηλαδή, είναι η αντίστροφη πορεία της ανάλυσης. Ξεκινούμε από μια αληθή πρόταση και με μια σειρά αναγκαίων συνθηκών καταλήγουμε στο συμπέρασμα.

Παραστατικά, $P_\nu \Longrightarrow P_{\nu-1} \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow P_1 \Longrightarrow B$

Ο **Αρχιμήδης** χρησιμοποιεί την Αναλυτική-Συνθετική μέθοδο στο έργο του «Περί σφαίρας και κυλίνδρου», ενώ ο μέγας Γεωμέτρης **Απολλώνιος ο Περγαίος** στο έργο του «Κωνικά».

Ο **Πάππος ο Αλεξανδρεύς,** που έζησε τον $3^{ο}$ αιώνα μ.Χ, στο έργο του «Συναγωγή», που αποτελείται από οκτώ βιβλία και περιλαμβάνει δύσκολα προβλήματα και θεωρήματα, χρησιμοποιεί την Αναλυτική-Συνθετική μέθοδο.

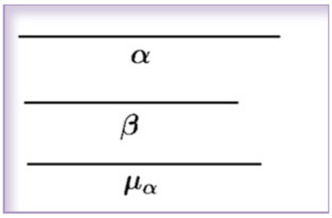
Από τον ίδιο τον Πάππο το VII βιβλίο αναφέρεται ως «ο θησαυρός της Ανάλυσης» και περιλαμβάνει ένα δεύτερο πληρέστερο ορισμό της μεθόδου.

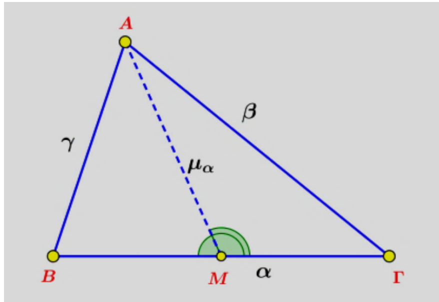
Την Αναλυτική- Συνθετική μέθοδο χρησιμοποιούμε και για να αντιμετωπίσουμε σύνθετες Γεωμετρικές κατασκευές, ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

1. **Ανάλυση**
   Στο στάδιο της ανάλυσης αρχικά υποθέτουμε ότι το πρόβλημα που μας δίνεται έχει λυθεί και θεωρούμε ένα σχήμα που ικανοποιεί όλα τα δεδομένα του προβλήματος. Κατόπιν με διάφορες παρατηρήσεις , χρησιμοποιώντας τα δεδομένα και φέροντας κατάλληλες γραμμές (ευθείες και κύκλους) προσπαθούμε να δημιουργήσουμε ένα άλλο σχήμα που κατασκευάζεται με γνωστές απλές γεωμετρικές κατασκευές.
   Τέλος, **συνδυάζοντας τις διάφορες απλές γεωμετρικές κατασκευές που συναντούμε,** διαδοχικά, προσπαθούμε να φτάσουμε στο ζητούμενο σχήμα.
   Σκοπός της Ανάλυσης είναι να μας υποδείξει τον δρόμο για να ξεκινήσουμε να λύσουμε το πρόβλημα.
2. **Σύνθεση (Κατασκευή)**
   Είναι η αντίστροφη πορεία της Ανάλυσης και ουσιαστικά η λύση του προβλήματος. Στη διαδικασία της σύνθεσης κατασκευάζουμε σταδιακά τα σχήματα που συναντούμε στην Ανάλυση και βήμα –βήμα οδηγούμαστε στο ζητούμενο σχήμα.

3. **Απόδειξη**
   Αποδεικνύουμε ότι το σχήμα που κατασκευάσαμε έχει όλα τα δεδομένα που μας δόθηκαν και άρα είναι το ζητούμενο.
4. **Διερεύνηση**
   Στο στάδιο αυτό αναζητούμε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα δεδομένα, για να υπάρχει λύση και αναζητούμε όλες τις δυνατές λύσεις του προβλήματος. Με τα δεδομένα του προβλήματος μπορεί να κατασκευάζονται περισσότερα από ένα σχήματα ή να μην κατασκευάζεται κανένα σχήμα.

Πρόβλημα 1	**Να κατασκευαστεί τρίγωνο $\varDelta AB\Gamma$ όταν δίνονται οι πλευρές του $\alpha = B\Gamma,\ \beta = A\Gamma$ και η διάμεσος του $AM = \mu_\alpha$**





Σχήμα 23

- **Ανάλυση**

Υποθέτουμε ότι το τρίγωνο $\varDelta AB\Gamma$ έχει κατασκευαστεί με τα δεδομένα του προβλήματος **(Σχήμα23).** Παρατηρώντας το σχήμα που σχεδιάσαμε προσπαθούμε να αναζητήσουμε σε αυτό γεωμετρικά σχήματα που μπορούν να κατασκευαστούν με απλές γεωμετρικές κατασκευές.

Πράγματι, παρατηρούμε ότι το τρίγωνο $\varDelta A\Gamma M$ μπορεί να κατασκευαστεί γιατί γνωρίζουμε τις τρείς πλευρές του: $A\Gamma = \beta,\ AM = \mu_\alpha$ και $\Gamma M = \frac{\alpha}{2}$

- **Σύνθεση-κατασκευή**

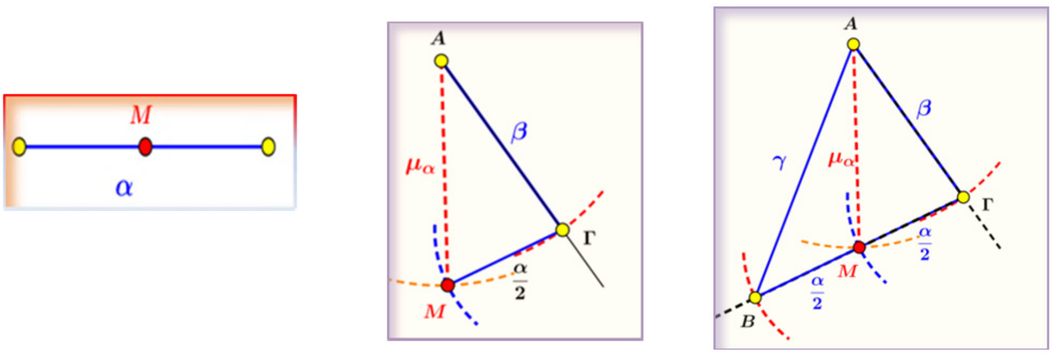
Η κατασκευή του τριγώνου φαίνεται βήμα-βήμα στο επόμενο **(Σχήμα 24).**

Βήμα 1º : Κατασκευάζουμε το μέσον του δεδομένου τμήματος $B\Gamma = \alpha$.

Βήμα 2º : Με πλευρές $\frac{B\Gamma}{2} = \frac{\alpha}{2},\ A\Gamma = \beta$ και $AM = \mu_\alpha$ κατασκευάζουμε το τρίγωνο $\varDelta A\Gamma M$.

Βήμα 3º: Προεκτείνουμε την ημιευθεία ΓM και παίρνουμε σημείο B στην προέκταση της τέτοιο ώστε $MB = \Gamma M = \frac{\alpha}{2}$

Το τρίγωνο $\varDelta AB\Gamma$ είναι το ζητούμενο.



- **Απόδειξη**

Το τρίγωνο $\varDelta AB\varGamma$ έχει $A\varGamma = \beta$ από την κατασκευή που κάναμε.

Η πλευρά $B\varGamma = \varGamma M + MB = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$ και $AM = \mu_\alpha$ από την κατασκευή. Επίσης η AM είναι διάμεσος του τριγώνου $\varDelta AB\varGamma$ αφού το σημείο M είναι το μέσον της πλευράς $B\varGamma$.

- **Διερεύνηση**

Για να είναι δυνατή η κατασκευή του τριγώνου $\varDelta A\varGamma M$ θα πρέπει για τις πλευρές του να ισχύει η τριγωνική ανισότητα δηλαδή πρέπει για τα μήκη των δεδομένων τμημάτων να ισχύει:

$$|\beta - \mu_\alpha| < \frac{\alpha}{2} < \beta + \mu_\alpha$$

Προφανώς το πρόβλημα έχει μια λύση, δηλαδή δεν μπορεί να κατασκευαστεί άλλο τρίγωνο με αυτά τα δεδομένα.

Πρόβλημα 2	**Δίνεται ευθεία xy και τα σημεία A *και* B προς το ίδιο μέρος της xy. Να προσδιορίσετε ένα σημείο M πάνω στην ευθεία xy τέτοιο ώστε $\angle AMx = 2(\angle BMy)$**

- **Ανάλυση**

Έστω M το σημείο που θέλουμε να προσδιορίσουμε. Αν ονομάσουμε B' το συμμετρικό του σημείου B ως προς την xy. Τότε

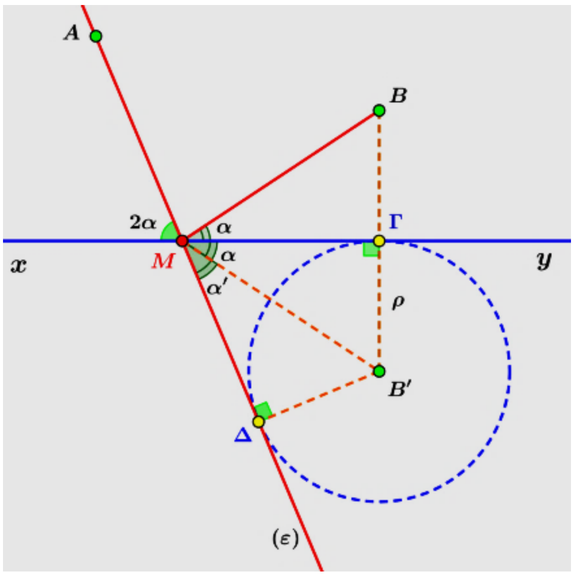
$$\angle BM\varGamma = \angle \varGamma MB' = a$$

Αν προεκτείνουμε την AM, τότε

$$a + a' = 2a \Longrightarrow a = a'$$

Δηλαδή, η MB' είναι διχοτόμος της $\angle \varepsilon My$ **(Σχήμα 24).**

Αν $B'\varDelta \perp (\varepsilon)$, τότε $B'\varDelta = B'\varGamma = \rho$



Σχήμα 24

Άρα, η ευθεία $AM \equiv (\varepsilon)$ θα εφάπτεται του κύκλου (B', ρ).

- **Σύνθεση-Κατασκευή**

Έστω B' το συμμετρικό του σημείου B ως προς την ευθεία xy. Γράφουμε τον κύκλο (B', ρ) και από το σημείο A φέρουμε εφαπτομένη $A\varepsilon$, που τέμνει την ευθεία xy στο σημείο M που είναι το ζητούμενο.

- **Απόδειξη**

Επειδή από την κατασκευή ισχύει $a = a'$, θα έχουμε $\angle AMx = 2(\angle BMy)$

- **Διερεύνηση**

Το πρόβλημα έχει πάντοτε μια λύση. Αν φέρουμε την δεύτερη εφαπτομένη από το σημείο A προς τον κύκλο (B', ρ) τότε για το σημείο M θα έχουμε

$$\angle AMy = 2(\angle BMx)$$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

1. Να κατασκευάσετε τρίγωνο $\Delta AB\Gamma$,όταν δίνονται η πλευρά του $AB = \gamma$, η διχοτόμος του $A\Delta = \delta_\alpha$ και η γωνία του $\angle A = \varphi$

2. Να κατασκευάσετε τρίγωνο $\Delta AB\Gamma$ όταν δίνονται η πλευρά του $B\Gamma = \alpha$ η πλευρά του $A\Gamma = \beta$ και το ύψος του $A\Delta = \upsilon_\alpha$.

3. Να κατασκευάσετε ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta AB\Gamma$ $(\angle A = 90°)$, αν δίνονται η υποτείνουσα $B\Gamma = \alpha$ και η διάμεσος $AM = \mu_\alpha$

4. Δίνεται κύκλος (O, ρ), ευθεία (ε) και σημείο $A \in (\varepsilon)$.Να βρείτε σημείο M της (ε), που να απέχει ίση απόσταση από τον κύκλο (O, ρ) και από το σημείο A.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ

1. Να κατασκευάσετε τρίγωνο $\Delta AB\Gamma$ αν δίνονται τα μέσα K, Λ, M των πλευρών AB, $B\Gamma$ $και$ $A\Gamma$ αντίστοιχα.

2. Να κατασκευάσετε γεωμετρικά ένα ευθύγραμμο τμήμα x με μήκος $x = \sqrt{12}$.

3. Δίνεται κύκλος (O, ρ) και ένα σημείο A εκτός αυτού. Αν Γ είναι το συμμετρικό του A ως προς το κέντρο O του κύκλου, να κατασκευάσετε ρόμβο $AB\Gamma\Delta$ με διαγώνιο $A\Gamma$ τέτοιον, ώστε ο κύκλος (O, ρ) να είναι εγγεγραμμένος στον ρόμβο.

4. Δίνεται ευθεία (ε) και δύο σημεία A $και$ B εκτός της ευθείας και προς το ίδιο μέρος της (ε). Να κατασκευάσετε κύκλο ο οποίος να διέρχεται από τα σημεία A $και$ B και να εφάπτεται στην ευθεία (ε).

5. Δίνεται γωνία $\angle xOy$ και δύο σημεία B , Γ, τα οποία βρίσκονται το ένα πάνω στην πλευρά Ox και το άλλο πάνω στην Oy.
   Να βρείτε σημείο M στο εσωτερικό της γωνίας, που να ισαπέχει από

   τις πλευρές της γωνίας $\angle xOy$ και επιπλέον να ισχύει επίσης $MB = M\Gamma$.

6. Δίνονται δύο ίσοι κύκλοι (O, ρ) $και$ (K, ρ). Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων από τα οποία μπορούμε να φέρουμε ίσα εφαπτόμενα τμήματα προς τους δύο κύκλους.

7. Δίνεται κύκλος με κέντρο O και σταθερό σημείο A εκτός αυτού. Αν σημείο B κινείται πάνω στον κύκλο να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του μέσου M του AB.

8. Δίνεται γωνία $\angle xOy$. Πάνω στις πλευρές της γωνίας $0x$ $και$ Oy παίρνουμε σημεία A $και$ B αντίστοιχα, έτσι ώστε $OA + OB = \kappa$, δεδομένο ευθύγραμμο τμήμα. Κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο $AOBM$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κορυφών M αυτών των παραλληλογράμμων.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ

1. Δίνεται μια ευθεία (ε) στο επίπεδο και δύο σημεία $A \; και \; B$ που βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η (ε). Να βρείτε ένα σημείο X

της (ε) έτσι ώστε η τεθλασμένη γραμμή AXB να έχει το ελάχιστο μήκος.

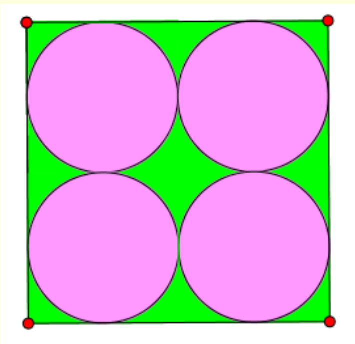
(Το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό ως πρόβλημα του Ήρωνα).

2. Δίνεται κύκλος (O, ρ) και ένα σημείο A εκτός αυτού. Να κατασκευάσετε μια τέμνουσα $A\Gamma\Delta$ του κύκλου έτσι ώστε η χορδή $\Gamma\Delta$ να έχει δεδομένο μήκος $\Gamma\Delta = \kappa$.

3. Να κατασκευάσετε τρίγωνο $\Delta AB\Gamma$ όταν δίνονται η πλευρά του $B\Gamma = \alpha$, το ύψος του $A\Delta = \upsilon_\alpha$ και η γωνία του $\angle B = 2(\angle \Gamma)$.

4. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένα τετράγωνο και στο εσωτερικό του τέσσερις ίσοι κύκλοι οι οποίοι εφάπτονται εξωτερικά μεταξύ τους και στις πλευρές του τετραγώνου εσωτερικά .

- Χρησιμοποιώντας μόνο τον κανόνα (αβαθμολόγητο) και τον διαβήτη σας, να βρείτε τρόπο να κατασκευάσετε το σχήμα και να περιγράψετε τα βήματα της κατασκευής σας.
- Χρησιμοποιώντας ένα οποιοδήποτε Γεωμετρικό λογισμικό (geogebra, cabri geometer, κτλ.), να σχεδιάσετε το σχήμα στον υπολογιστή σας και να καταγράψετε τα βήματα που ακολουθήσατε, για να ολοκληρώσετε την κατασκευή σας.
- Να αποδείξετε, ότι το σχήμα που κατασκευάσατε είναι το ζητούμενο.



5. Δίνεται κύκλος (O, ρ) και διάμετρος AB αυτού. Φέρουμε τυχαία χορδή $B\Gamma$ και στην προέκτασή της παίρνουμε σημείο Θ έτσι ώστε $B\Gamma = \Gamma\Theta$. Αν M είναι το σημείο τομής των ευθειών $A\Gamma \; και \; O\Theta$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του σημείου M.

6. α) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένα παράθυρο του οποίου το πάνω μέρος αποτελείται από ένα κυκλικό τμήμα. Ο κατασκευαστής θέλει να εγγράψει μέσα στο κυκλικό τμήμα ένα τετραγωνικό πλαίσιο για να τοποθετηθεί γυάλινο βιτρώ, όπως βλέπετε στο σχήμα.

β) Αν το μήκος της χορδής του κυκλικού τομέα είναι $1\mathrm{m}$ και η ακτίνα του κύκλου που αντιστοιχεί ο κύκλικός τομέας είναι $\mathrm{R} = 60\mathrm{cm}$, να υπολογίσετε με προσέγγιση χιλιοστού το μήκος της πλευράς του τετράγωνου που εγγράφεται μέσα στο κυκλικό τμήμα.

7. Να κατασκευάσετε ένα τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ ($ΑΒ \parallel ΓΔ$) όταν δίνονται: η μεγάλη βάση $ΓΔ = \beta_1$, η μικρή βάση $ΑΒ = \beta_2$ και οι διαγώνιοι του $ΑΓ = \delta_1$ και $ΒΔ = \delta_2$.

8. Δίνεται μια ευθεία (ε) και ένα σημείο B πάνω σε αυτή. Αν ένα σημείο A βρίσκεται εκτός της (ε) να κατασκευάσετε κύκλο που να διέρχεται από το σημείο A και να εφάπτεται της ευθείας (ε) στο σημείο B.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

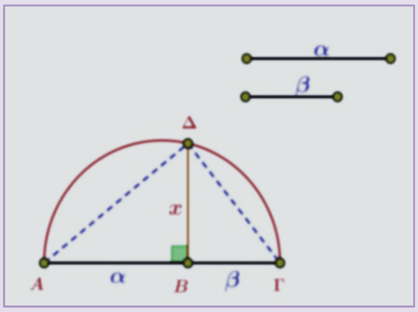
7.2.3 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Κατασκευή μέσης αναλόγου

Αν $\alpha\,,\beta$ δύο δεδομένα ευθύγραμμα τμήματα, να κατασκευαστεί τμήμα x, τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$\frac{\alpha}{x}=\frac{x}{\beta} \iff x=\sqrt{\alpha\beta}$$

Το τμήμα x ονομάζεται **μέση ανάλογος** των α,β.



Σχήμα 11

Κατασκευή

Πάνω σε μια ευθεία παίρνουμε διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα $AB=\alpha\ \ και\ B\Gamma=\beta$ **(Σχήμα 11).** Γράφουμε ημικύκλιο διαμέτρου $A\Gamma$. Στο σημείο B φέρουμε κάθετη στην $A\Gamma$ που τέμνει το ημικύκλιο στο σημείο Δ. Το τμήμα $B\Delta=x$ είναι το ζητούμενο.

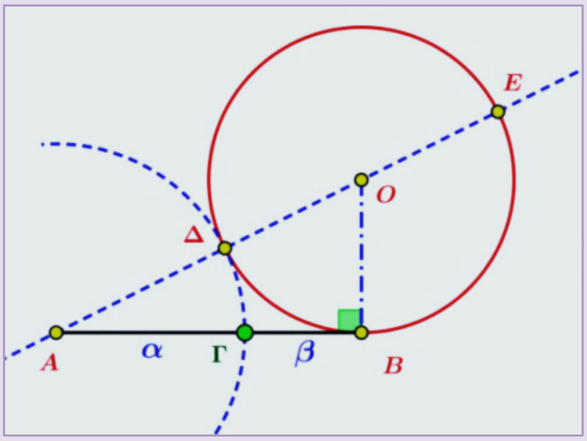
Απόδειξη

Το τρίγωνο $\triangle A\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο και αφού το ΔB είναι ύψος πάνω στην υποτείνουσα, έχουμε: $\boldsymbol{\Delta B^2=AB\cdot B\Gamma=\alpha\beta}$**.** Επομένως, το τμήμα ΔB είναι το ζητούμενο τμήμα x, δηλαδή η μέση ανάλογος των τμημάτων α,β. Η κατασκευή γίνεται πάντοτε, ανεξάρτητα με τα μήκη των α,β.

2. Διαίρεση ευθύγραμμου τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο *(Χρυσή τομή)*

Δίνεται το ευθύγραμμο τμήμα AB και ζητούμε να διαιρεθεί το τμήμα αυτό σε δύο άνισα τμήματα $A\Gamma=\alpha\ \ και\ \ \Gamma B=\beta$, $\alpha>\beta$, έτσι ώστε το μεγαλύτερο από αυτά να είναι μέσο ανάλογο του μικρότερου και του αρχικού ευθυγράμμου τμήματος, δηλαδή να ισχύει:

$$\boldsymbol{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}=\frac{\alpha}{\beta} \iff \beta^2+\alpha\beta-\alpha^2=0}(*)$$



Σχήμα 12

Κατασκευή-Απόδειξη

Η εξίσωση $\beta^2+\alpha\beta-\alpha^2=0$ γράφεται $\beta(\alpha+\beta)=\alpha^2$

Για να κατασκευάσουμε το τμήμα α ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- Αρχικά φέρουμε κάθετη στο τμήμα AB στο σημείο B και παίρνουμε σ΄ αυτή σημείο O, τέτοιο ώστε $OB=\frac{AB}{2}$
- Στη συνέχεια γράφουμε τον κύκλο (O,OB) ο οποίος εφάπτεται του τμήματος AB στο B. Φέρουμε την ευθεία ΑΟ που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Δ και E, με το Δ να βρίσκεται ανάμεσα στα σημεία A και O **(Σχήμα 12)**
- Είναι γνωστό ότι η δύναμη του σημείου A ως προς τον κύκλο (O,OB) είναι $AB^2=A\Delta\cdot AE=A\Delta(A\Delta+\Delta E)=A\Delta(A\Delta+AB)\Longrightarrow$

  $(\alpha+\beta)^2=\alpha(\alpha+\alpha+\beta)\Longrightarrow$
  $\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta=2\alpha^2+\alpha\beta\Longrightarrow\ \beta^2+\alpha\beta-\alpha^2=0(*)$

  Επομένως, το τμήμα $A\Delta=\alpha$ είναι το ζητούμενο τμήμα, αφού επαληθεύει την σχέση $(*)$
- Με κέντρο το Α και ακτίνα $\mathrm{A\Delta}=\alpha$ κατασκευάζουμε κύκλο που τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ στο σημείο Γ. Το σημείο Γ χωρίζει το τμήμα AB σε δύο μέρη $\mathrm{A\Delta}=\alpha$ και $\Gamma\mathrm{B}=\beta$ για τα οποία να ισχύει: $\frac{\alpha+\beta}{\alpha}=\frac{\alpha}{\beta}$

  Αν λύσουμε την $(*)\Leftrightarrow\alpha^2-\alpha\beta-\beta^2=0\overset{\Delta=5\beta^2}{\Longleftrightarrow}\alpha_{1,2}=\frac{\beta\pm\beta\sqrt{5}}{2}$

$\overset{\alpha>0}{\Longleftrightarrow}\alpha=\frac{\beta(1+\sqrt{5})}{2}\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Αποδείξαμε ότι ο λόγος της χρυσής τομής είναι: $\boldsymbol{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}}=\boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}=\boldsymbol{\varphi}\simeq1{,}618$

Ο λόγος αυτός συμβολίζεται διεθνώς με το ελληνικό γράμμα $\boldsymbol{\varphi}$, προς τιμήν του Έλληνα γλύπτη Φειδία.

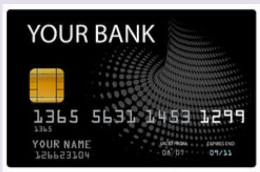
ΣΧΟΛΙΑ

- Ο λόγος της χρυσής τομής εικάζεται ότι ανακαλύφθηκε πρώτα από τον σημαντικό Έλληνα Μαθηματικό και φιλόσοφο Πυθαγόρα τον Σάμιο.

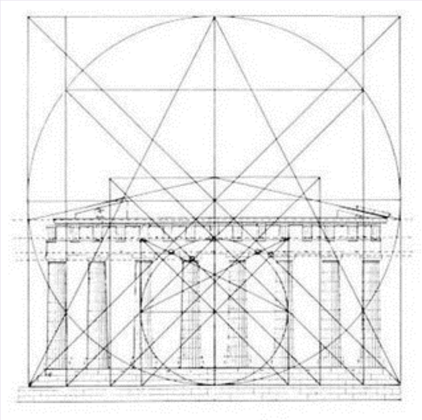
Η προτομή του Πυθαγόρα στην γενέτειρά του στο Πυθαγόρειο της Σάμου.

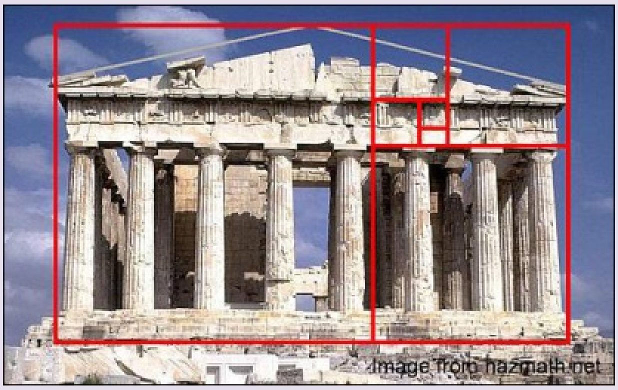
- Χρυσό ορθογώνιο ονομάζεται το ορθογώνιο που οι διαστάσεις του έχουν λόγο ίσο με φ, δηλαδή, ο λόγος της μεγαλύτερης πλευράς προς την μικρότερη ισούται με

$$\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\simeq1{,}618$$



- Στον Παρθενώνα όλα τα ορθογώνια που εμφανίζονται είναι χρυσά, αυτός δε είναι και ο λόγος που υπάρχει τόση αρμονία και ομορφιά στο υπέροχο αυτό αρχιτεκτονικό δημιούργημα του Αρχαίου κόσμου.





7.7 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΤΟΠΩΝ

Σε πολλά προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών χρειαζόμαστε για την επίλυσή τους, να προσδιορίσουμε την θέση ενός σημείου M, σε σχέση με τα άλλα γνωστά σημεία ή σχήματα του προβλήματος.
Ξέρουμε ότι η θέση ενός σημείου M στο επίπεδο προσδιορίζεται, αν γνωρίζουμε ότι είναι τομή δύο γραμμών $(G_1)\ και\ G_2)$, που συνήθως είναι ευθείες, κύκλοι ή μέρη αυτών.

Για να βρούμε την θέση ενός τέτοιου σημείου M θα πρέπει να μας δίνονται στο πρόβλημα ή να προσπαθούμε να βρούμε, τέτοιες ιδιότητες του M, που να μας φανερώνουν ότι αυτό βρίσκεται στην τομή δύο Γεωμετρικών τόπων $(G_1)\ και\ G_2)$, δηλαδή, το M θα είναι σημείο του σημειοσυνόλου $G_1 \cap G_2$

Πρόβλημα	**Να κατασκευαστεί τρίγωνο $\varDelta AB\varGamma$ όταν δίνονται: η πλευρά $\alpha = B\varGamma = \lambda$, το ύψος $\upsilon_\alpha = \mu$ και η διάμεσός $\mu_\alpha = \nu$, όπου λ, μ, ν είναι δεδομένα γνωστά ευθύγραμμα τμήματα.**

- **Ανάλυση**

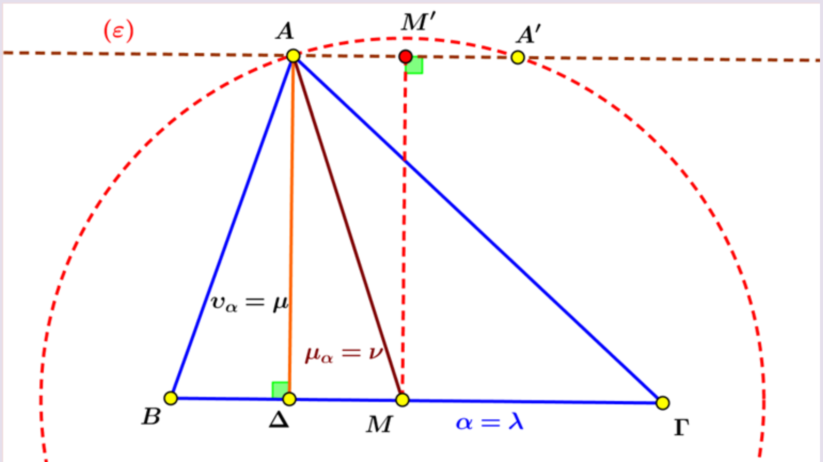
Υποθέτουμε ότι κατασκευάσαμε το τρίγωνο $\varDelta AB\varGamma$ **(Σχήμα 25),** για το οποίο έχουμε $B\varGamma = \lambda, \upsilon_\alpha = \mu$ και $\mu_\alpha = \nu$. Επειδή $A\varDelta = \mu$,το σημείο A βρίσκεται πάνω σε μια ευθεία (ε) παράλληλη προς την ευθεία $B\varGamma$ της οποίας τα σημεία απέχουν από την ευθεία $B\varGamma$ απόσταση ίση με λ.

Επίσης, $AM = \nu$, άρα το σημείο A θα βρίσκεται πάνω στο κύκλο (M, ν) όπου το σημείο M είναι το μέσο της πλευράς $B\varGamma$.

Επομένως το σημείο A προσδιορίζεται σαν τομή δύο Γεωμετρικών τόπων, $A = (\varepsilon) \cap (M, \nu)$.

- **Σύνθεση - κατασκευή**

Παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα $B\varGamma = \alpha = \lambda$. Κατασκευάζουμε το μέσον M



Σχήμα 25

του $B\varGamma$ και τον κύκλο (M, ν). Σε απόσταση $\upsilon_\alpha = \mu$ από την ευθεία $B\varGamma$ φέρουμε την ευθεία (ε). Ένα από τα σημεία τομής A, A' της (ε) με τον κύκλο (M, ν) θα είναι η κορυφή A του τριγώνου.

- **Απόδειξη**

Το τρίγωνο $\varDelta AB\varGamma$ που κατασκευάσαμε έχει

$$B\varGamma = \alpha = \lambda, \upsilon_\alpha = \mu \text{ και } \mu_\alpha = \nu,$$

επομένως είναι το ζητούμενο.

- **Διερεύνηση**

Η κατασκευή του τριγώνου $\varDelta AB\varGamma$ εξαρτάται μόνο από την ύπαρξη του σημείου A, δηλαδή από την αμοιβαία θέση της ευθείας (ε) και του κύκλου (M, ν). Έστω

MM' η απόσταση του σημείου M από την ευθεία (ε). Τότε διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Αν $MM' = \upsilon_\alpha < \mu_\alpha$, τότε ο κύκλος (M, ν) θα τέμνει την ευθεία (ε) σε δύο σημεία A, A' και θα έχουμε τα τρίγωνα $\varDelta AB\varGamma$ *και* $\varDelta A'B\varGamma$.
  Επειδή όμως τα τρίγωνα $\varDelta AB\varGamma$ *και* $\varDelta A'B\varGamma$ είναι ίσα και δεν έχει σημασία η θέση του A, έχουμε μια λύση στο πρόβλημα.

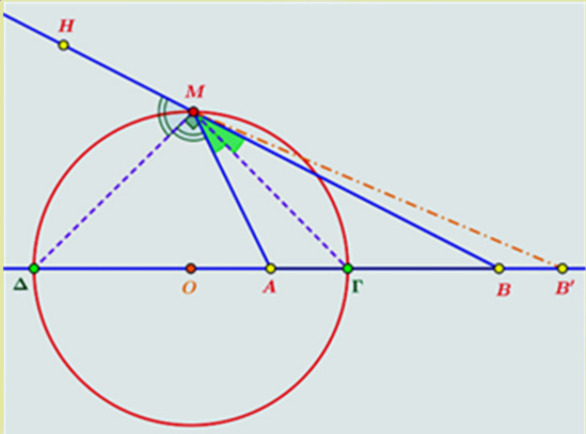
- Αν $MM' = \upsilon_\alpha = \mu_\alpha$, τότε ο κύκλος (M, ν) θα εφάπτεται της ευθείας (ε) και έτσι θα έχουμε μία λύση το τρίγωνο $\varDelta AB\varGamma$.

- Αν $MM' = \upsilon_\alpha > \mu_\alpha$, τότε ο κύκλος (M, ν) και η ευθεία (ε) δεν θα έχουν κανένα σημείο τομής και άρα το πρόβλημα δεν θα έχει λύση.

Ένας Σημαντικός Γεωμετρικός Τόπος

Απολλώνιος Κύκλος

Πρόβλημα	**Δίνονται δύο ορισμένα σημεία A $και$ B. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M για τα οποία ισχύει** $\boldsymbol{\frac{MA}{MB}=\frac{\mu}{\nu}\neq 1 \;\; \mu,\nu\ \varphi\upsilon\sigma\iota\kappa o\acute{\iota}\ \alpha\rho\iota\theta\mu o\acute{\iota}, \quad \mu\varepsilon\ \frac{\mu}{\nu}\ \ \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}\varsigma\ \lambda\acute{o}\gamma o\varsigma}$



Λύση

Έστω ένα σημείο $\boldsymbol{M}$ **του γεωμετρικού τόπου**. Τότε θα έχουμε

$$\frac{MA}{MB}=\frac{\mu}{\nu}$$

Αν πάρουμε $M\Gamma$, $M\Delta$ την εσωτερική και εξωτερική διχοτόμο της γωνίας $\angle AMB$, αντίστοιχα, τότε από τα θεωρήματα των διχοτόμων θα έχουμε

$$\frac{\Gamma A}{\Gamma B}=\frac{\Delta A}{\Delta B}=\frac{MA}{MB}=\frac{\mu}{\nu}$$

Επομένως, τα σημεία Γ, Δ είναι σταθερά αφού χωρίζουν το ευθύγραμμο τμήμα εσωτερικά και εξωτερικά σε σταθερό λόγο $\frac{\mu}{\nu}$

Επειδή $\angle \Delta M \Gamma = 90°$ (γιατί;) το σημείο M θα είναι σημείο κύκλου με διάμετρο το $\Gamma\Delta$ **(Απολλώνιος Κύκλος)**.

Αντίστροφα

Θεωρούμε ένα σημείο M του κύκλου με διάμετρο $\Gamma\Delta$, όπου για τα σημεία Γ, Δ ισχύει

$$\frac{\Gamma A}{\Gamma B}=\frac{\Delta A}{\Delta B}=\frac{\mu}{\nu} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Gamma A}{\Delta A}=\frac{\Gamma B}{\Delta B} \qquad (1)$$

και πρέπει να αποδείξουμε ότι $\frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$ ή ότι η $M\Gamma$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\angle AMB$. Θα χρησιμοποιήσουμε την ***μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής.***

Υποθέτουμε ότι η $M\Gamma$ **δεν είναι διχοτόμος της γωνίας** $\boldsymbol{\angle AMB}$, τότε, φέρουμε την MB' έτσι ώστε

$$\angle AM\Gamma = \angle \Gamma MB'$$

Επειδή $M\Delta \perp M\Gamma$ (αφού $\Gamma\Delta$ διάμετρος) θα έχουμε ότι οι $M\Delta, M\Gamma$ θα είναι η εξωτερική και η εσωτερική διχοτόμος της γωνίας $\angle AMB'$.

Από το θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου έχουμε:

$$\frac{\Gamma A}{\Gamma B'} = \frac{\Delta A}{\Delta B'} \text{ ή } \frac{\Gamma A}{\Delta A} = \frac{\Gamma B'}{\Delta B'} \qquad (2)$$

Από τις (1) $και$ (2) θα έχουμε

$$\frac{\Gamma B}{\Delta B} = \frac{\Gamma B'}{\Delta B'}$$

Δηλαδή, τα σημεία $B \text{ και } B'$ χωρίζουν εξωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα στον ίδιο λόγο και άρα ταυτίζονται $B \equiv B'$. Επομένως η $M\Gamma$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\angle AMB$. Ο γεωμετρικός τόπος που ζητάμε λοιπόν είναι ο κύκλος διαμέτρου $\Gamma\Delta$.

Κατασκευή

Αν μας δοθούν τα σημεία $A \text{ και } B$ και ο λόγος $\frac{\mu}{\nu} \neq 1$ τότε χωρίζουμε το ευθύγραμμο τμήμα εσωτερικά και εξωτερικά σε λόγο $\frac{\mu}{\nu}$, βρίσκουμε τα σημεία $\Gamma \text{ και } \Delta$ και γράφουμε τον κύκλο διαμέτρου $\Gamma\Delta$.

Διερεύνηση

Αν $\frac{\mu}{\nu}=1$ τότε $\frac{MA}{MB} = 1 \Leftrightarrow MA = MB$

Το σημείο M ισαπέχει από τα σημεία $A \text{ και } B$, άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι η μεσοκάθετη του ευθυγράμμου τμήματος AB.

Μπορείτε να δείτε την κατασκευή του Γεωμετρικού Τόπου μέσα από το εφαρμογίδιο **show.26.ggb**