



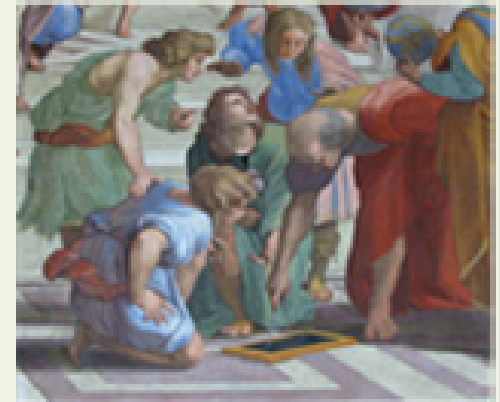
Μαθηματικά: Γεωμετρικές κατασκευές

Ιστορικό σημείωμα (1/2)

- ▶ Ένα από τα βασικά στοιχεία της Αρχαίας Ελληνικής Γεωμετρίας ήταν οι Γεωμετρικές κατασκευές.
- ▶ Περίπου τον 5ο π.Χ αιώνα, εικάζεται ότι επιλέχθηκαν από τους Αρχαίους Έλληνες Γεωμέτρους, ως θεμελιώδη σχήματα για τις Γεωμετρικές κατασκευές οι ευθείες και οι κύκλοι.
- ▶ Στα προβλήματα των **Γεωμετρικών κατασκευών** μας δίνονται κάποια στοιχειώδη γεωμετρικά στοιχεία, όπως για παράδειγμα σημεία, ευθείες, κύκλοι και με βάση αυτά, χρησιμοποιώντας **αποκλειστικά κανόνα και διαβήτη**, πρέπει να κατασκευάσουμε γεωμετρικά σχήματα, τα οποία να ικανοποιούν ορισμένες συνθήκες.
- ▶ Ταυτόχρονα οι Αρχαίοι Έλληνες Μαθηματικοί, ως θεμελιωτές της Θεωρητικής Γεωμετρίας, παρατήρησαν ότι υπήρχαν προβλήματα Γεωμετρικών κατασκευών που δεν μπορούσαν να λυθούν μόνο με **κανόνα και διαβήτη**.

Ιστορικό σημείωμα (2/2)

Ο Ευκλείδης στα «Στοιχεία» του τις μόνες γεωμετρικές κατασκευές που επιτρέπει αυστηρά είναι αυτές που χρησιμοποιούν αποκλειστικά κανόνα και διαβήτη. Ο Ευκλείδης όμως, ήταν μαθητής του φιλόσοφου Πλάτωνα από τον οποίο είχε επηρεαστεί καταλυτικά. Επομένως, τα γεωμετρικά προβλήματα ήταν γνωστά από την εποχή του Πλάτωνα (427-347 π.Χ).



Αργότερα τον 16^ο και 17^ο αιώνα αποδείχθηκε ότι «Οτιδήποτε μπορεί να κατασκευαστεί με κανόνα και διαβήτη, μπορεί να κατασκευαστεί και μόνο με διαβήτη».

Τι σημαίνει γεωμετρική κατασκευή;

- ▶ Η κατασκευή ενός σχήματος αποκλειστικά με κανόνα (μη βαθμολογημένος χάρακας) και διαβήτη
- ▶ Η κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων δεν είναι πάντα απλή υπόθεση και ούτε πάντοτε εφικτή. **Παραδείγματα μη εφικτών γεωμετρικών κατασκευών (άλυτα προβλήματα):**
 - ▶ Η **τριχοτόμηση της γωνίας**, η διαίρεση δηλαδή, τυχαίας γωνίας (εκτός της ορθής) σε τρεις ίσες γωνίες.
 - ▶ **Ο τετραγωνισμός του κύκλου**, η κατασκευή δηλαδή, τετραγώνου που να έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν δεδομένου κύκλου.
 - ▶ **Ο διπλασιασμός του κύβου**
 - ▶ **Η κατασκευή τριγώνου, αν γνωρίζουμε τα μήκη των διχοτόμων των γωνιών του.**

Κλασσικά άλυτα προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών

- ▶ Άλυτα Προβλήματα της Αρχαιότητας που αποτέλεσαν για αιώνες, πρόκληση για τους Μαθηματικούς και τελικά αποδείχθηκε, ότι τα προβλήματα αυτά δεν έχουν λύση, δηλαδή οι γεωμετρικές αυτές κατασκευές δεν μπορούν να γίνουν, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά κανόνα και διαβήτη. Τα προβλήματα αυτά είναι:
 - ▶ **Ο τετραγωνισμός του κύκλου**
 - ▶ **Η τριχοτόμηση τυχαίας γωνίας**
 - ▶ **Ο διπλασιασμός του κύβου**

Απλή γεωμετρική κατασκευή: Εύρεση κέντρου κυκλικής επιφάνειας

Στη διπλανή εικόνα φαίνεται η κυκλική επιφάνεια ενός ξύλινου τραπεζιού, της οποίας ο ξυλουργός πρέπει να εντοπίσει το κέντρο της, για να τοποθετήσει το ξύλινο πόδι της βάσης στήριξης. Χρησιμοποιώντας μόνο τον κανόνα (αβαθμολόγητο) και το διαβήτη σας, να βρείτε με ποιο τρόπο ο ξυλουργός θα προσδιορίσει το κέντρο της κυκλικής επιφάνειας και να καταγράψετε τα βήματα των ενεργειών σας.



Από το σχολικό βιβλίο του Σπ. Κανέλου (1976)

1. Νὰ διαιρεθῆ δοθεῖσα γωνία διάφορος τῆς ὀρθῆς εἰς τρία ἴσα μέρη.
2. Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῆ εὐθεῖα, τῆς ὁποίας τὸ μεταξὺ δύο ἄλλων τεμνομένων εὐθειῶν περιεχόμενον τμήμα νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν τμήμα. (Τὸ δοθὲν σημεῖον νὰ μὴ κεῖται ἐπὶ μιᾶς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν, ἅς σχηματίζουν αἱ δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι).
3. Νὰ κατασκευασθῆ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰς τρεῖς διχοτόμους.
4. Δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος μέτρου a , νὰ κατασκευασθῆ δεύτερον, τοῦ ὁποίου τὸ μέτρον ἰσοῦται πρὸς $a\sqrt[3]{2}$.
5. Νὰ κατασκευασθῆ τρίγωνον, οὗ δίδονται οἱ πόδες τῶν διχοτόμων.
6. Νὰ διαιρεθῆ δοθεῖσα περιφέρεια εἰς ἑπτὰ ἴσα μέρη.
7. Νὰ κατασκευασθῆ τρίγωνον, οὗ δίδονται τὰ συμμετρικὰ τῶν κορυφῶν ὡς πρὸς τὰς ἀπέναντι πλευράς.
8. Νὰ κατασκευασθῆ τρίγωνον, οὗ δίδεται μία διάμεσος, μία διχοτόμος καὶ ἓν ὕψος ἀγόμενα ἐκ τριῶν διαφόρων κορυφῶν.

Φάσεις γεωμετρικής κατασκευής

▶ Ανάλυση

- ▶ ψάχνουμε να βρούμε την ιδέα του πώς θα κάνουμε την κατασκευή υποθέτοντας ότι έχουμε κατασκευάσει το ζητούμενο σχήμα και αναζητούμε στοιχειώδεις κατασκευές που γνωρίζουμε

▶ Σύνθεση

- ▶ κάνουμε την αντίστροφη διαδικασία της ανάλυσης κατασκευάζοντας με κανόνα και διαβήτη βασικά σχήματα

▶ Απόδειξη

- ▶ αποδεικνύουμε ότι το σχήμα που κατασκευάσαμε είναι το ζητούμενο

▶ Διερεύνηση

- ▶ αναζητούμε τις συνθήκες ώστε το σχήμα να είναι κατασκευάσιμο και ψάχνουμε και για άλλες περιπτώσεις

Απλές γεωμετρικές κατασκευές

- ▶ Κατασκευή ευθυγράμμου τμήματος ίσου με δοθέντος άλλου
- ▶ Κατασκευή γωνίας ίσης με δεδομένης
- ▶ Κατασκευή κάθετης σε ευθεία σε δοσμένο σημείο της ευθείας
- ▶ Κατασκευή κάθετης από ένα δοσμένο σημείο έξω από μια ευθεία
- ▶ Κατασκευή της διχοτόμου μιας γωνίας
- ▶ Κατασκευή της μεσοκάθετης ευθυγράμμου τμήματος

Παρακολούθηση youtube videos με γεωμετρικές κατασκευές

Κατασκευή ευθυγράμμου τμήματος ίσο με άλλο που σας δίνεται

<https://www.youtube.com/watch?v=AFXm-ha6YAY&list=PLycCcs4QbX27DWyYUf1B6LIIFfKLa3BdP&index=5>

Κατασκευή ΓΩΝΙΑΣ ΙΣΗΣ ΜΕ ΑΛΛΗ

▶ <https://www.youtube.com/watch?v=GZG9bnQJgsA>

Διπλασιασμός δεδομένης γωνίας

▶ <https://www.youtube.com/watch?v=iehxAiNUFJU&list=PLycCcs4QbX27DWyYUf1B6LIIFfKLa3BdP&index=4>

Κατασκευή διχοτόμου γωνίας

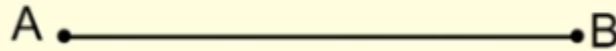
▶ <https://www.youtube.com/watch?v=2IP1NKYLKQw>

Διαφορετικές κατασκευές (ευθύγραμμο τμήμα, μεσοκάθετο ευθυγράμμου τμήματος, διχοτόμο γωνίας, παράλληλες ευθείες, κάθετες ευθείες).

▶ <https://www.youtube.com/watch?v=ZCRScgpsrpw>

Κατασκευή ευθυγράμμου τμήματος ίσου με άλλο

- ▶ Σας δίνεται το ευθύγραμμο τμήμα AB .



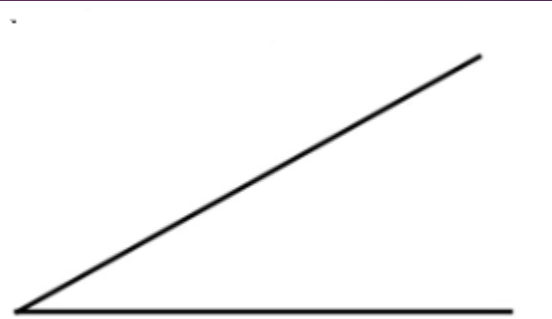
Κατασκευάστε με κανόνα και διαβήτη ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα ίσο με αυτό που βρίσκεται επάνω σε μια δεδομένη ευθεία.

- ▶ Πώς θα κάνατε εσείς αυτή την κατασκευή με κανόνα και διαβήτη;
 - ▶ **Κατασκευή** (περιγράψτε την κατασκευή σας με λόγια)
 - ▶ **Απόδειξη** (αποδεικνύετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που κατασκευάσατε είναι ίσο με το AB .)
 - ▶ Παρακολουθείστε το βίντεο

<https://www.youtube.com/watch?v=AFXm-ha6YAY&list=PLycCcs4QbX27DWyYUf1B6LIIFfKLa3BdP&index=5>

Και συγκρίνετε τη δική σας κατασκευή με αυτή που περιγράφεται στο video

Κατασκευή ίσης γωνίας



- ▶ Σας δίνεται η γωνία

Κατασκευάστε με κανόνα και διαβήτη μια γωνία ίση με αυτή.

- ▶ Πώς θα κάνατε εσείς αυτή την κατασκευή με κανόνα και διαβήτη;

- ▶ **Κατασκευή** (περιγράψτε την κατασκευή σας με λόγια)
- ▶ **Απόδειξη** (αποδεικνύετε ότι η γωνία που κατασκευάσατε είναι ίση με τη δεδομένη γωνία).
- ▶ Παρακολουθείστε το βίντεο

<https://www.youtube.com/watch?v=GZG9bnQJgsA>

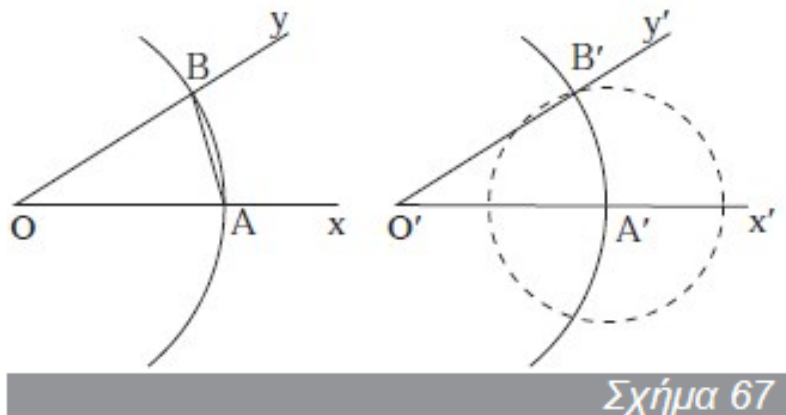
Και συγκρίνετε τη δική σας κατασκευή με αυτή που περιγράφεται στο video.

Στη συνέχεια διαβάστε την κατασκευή όπως περιγράφεται στο Ελληνικό βιβλίο της Γεωμετρίας στην επόμενη διαφάνεια...

Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και η ημιευθεία $O'x'$.
Να κατασκευασθεί γωνία ίση με τη $x\hat{O}y$
η οποία έχει ως μια πλευρά, την $O'x'$ και
κορυφή το O' .

• Κατασκευή

Καθιστούμε τη γωνία $x\hat{O}y$ (σχ.67)
επίκεντρη γράφοντας κύκλο με κέντρο O
και τυχαία ακτίνα ρ . Έστω \widehat{AB} το
αντίστοιχο τόξο της. Με κέντρο O' και
ακτίνα την ίδια, γράφουμε άλλον κύκλο
που τέμνει την $O'x'$ στο A' . Ακολουθώς
γράφουμε τον κύκλο (A', AB) του οποίου
ένα κοινό σημείο με τον (O', ρ) είναι το B' .
Φέρουμε την ημιευθεία $O'B'$. Η γωνία
 $x'O'y'$, δηλαδή η $x'O'y'$ είναι η ζητούμενη.



- Ερώτηση: Πώς θα χρησιμοποιήσουμε την κατασκευή αυτή για να κατασκευάσουμε τη διπλάσια της γωνίας AOB ;

• Απόδειξη

Οι γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'O'y'$ είναι ίσες, γιατί είναι επίκεντρες στους ίσους κύκλους (O, ρ) , (O', ρ) και βαίνουν στα ίσα τόξα AB και $A'B'$ αντίστοιχα. (§ 2.18)

• Διερεύνηση

Για να έχει το πρόβλημα λύση, θα πρέπει οι κύκλοι (O', ρ) και (A', AB) να τέμνονται. Αυτό όμως, συμβαίνει πάντοτε, επειδή για τη διάκεντρό τους $O'A' = \rho$ ισχύει: $\rho - AB < \rho < \rho + AB$ (λόγω της τριγωνικής ανισότητας στο τρίγωνο OAB). Μια δεύτερη λύση του προβλήματος αντιστοιχεί στο δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων (O', ρ) και (A', AB) .

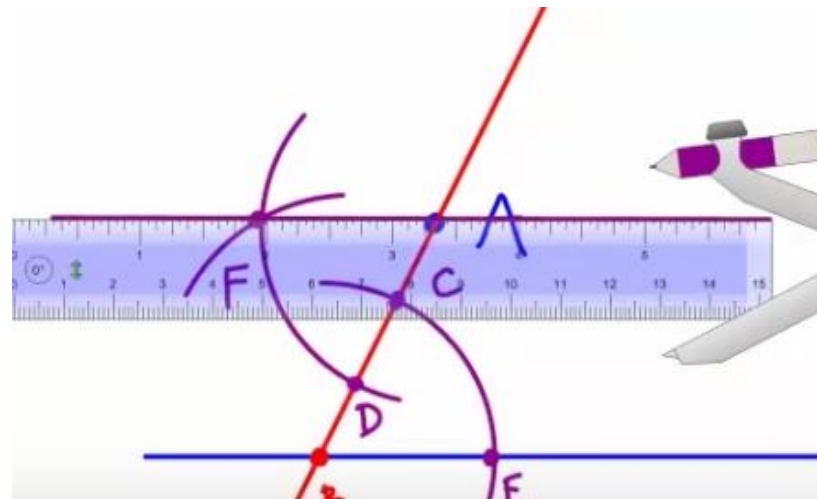
Σχεδίαση παράλληλης της ευθείας (l) που να διέρχεται από το σημείο A.

• A



- ▶ Παρακολουθείστε το βίντεο και εξηγήστε σε ποια ιδιότητα βασίζεται η κατασκευή;
- ▶ Χρησιμοποιείται άλλη κατασκευή και ποια;

<https://www.youtube.com/watch?v=OJN2YxgxVeA>

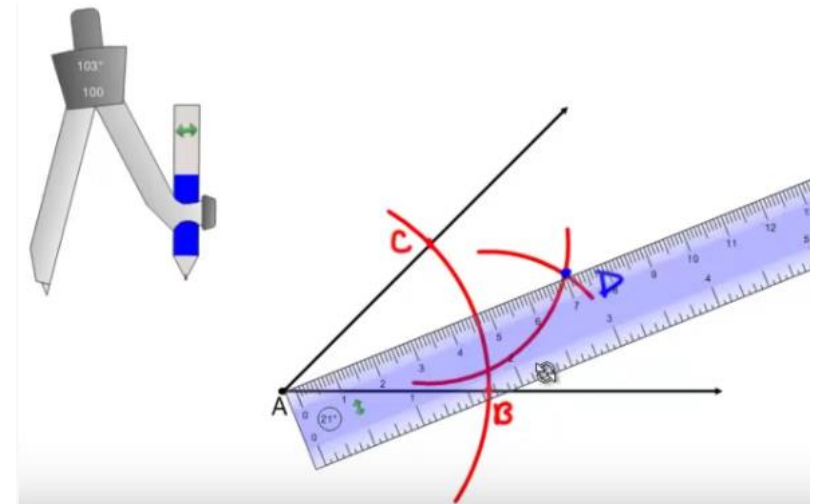


Κατασκευή διχοτόμου δεδομένης γωνίας

Παρακολουθείστε το βίντεο

<https://www.youtube.com/watch?v=2IP1NKYLKQw>

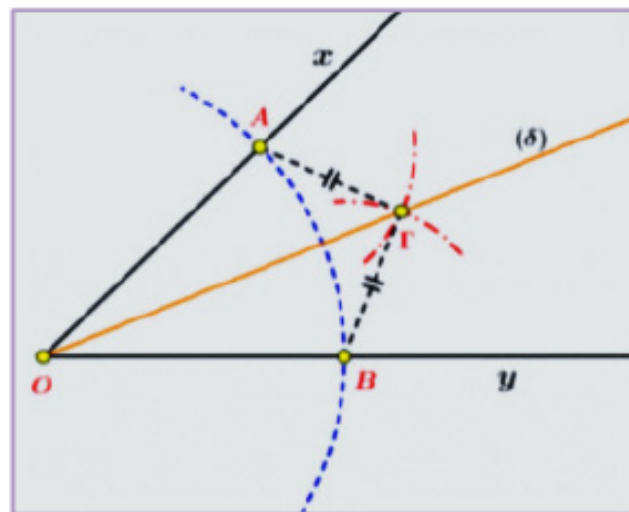
- ▶ Σε ποιες βασικές γεωμετρικές σχέσεις βασίστηκε η γεωμετρική κατασκευή που είδατε στο video;
- ▶ Διαβάστε το κείμενο της κατασκευής στο Κυπριακό βιβλίο στην επόμενη διαφάνεια...



1. Κατασκευή διχοτόμου δεδομένης γωνίας

Κατασκευή

Με κέντρο το σημείο O και τυχαία ακτίνα, γράφουμε κύκλο που τέμνει τις πλευρές της δεδομένης γωνίας $\angle xOy$ στα σημεία A, B . Στη συνέχεια, με ακτίνα μεγαλύτερη από το μισό της απόστασης AB γράφουμε δύο τόξα με κέντρα τα σημεία A, B τα οποία τέμνονται στο σημείο Γ . Η ημιευθεία $O\Gamma$ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\angle xOy$



Σχήμα 1

Απόδειξη: Τα τρίγωνα $\triangle AOG$ και $\triangle BOG$ είναι ίσα, αφού OG είναι κοινή πλευρά των τριγώνων, $OB = OA$ και $BG = AG$ από κατασκευής. Επομένως $\angle AOG = \angle BOG$

Άρα, η ημιευθεία $O\Gamma$ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\angle xOy$

Κατασκευή μεσοκαθέτου δοθέντος ευθυγράμμου τμήματος

Παρακολουθείστε το βίντεο

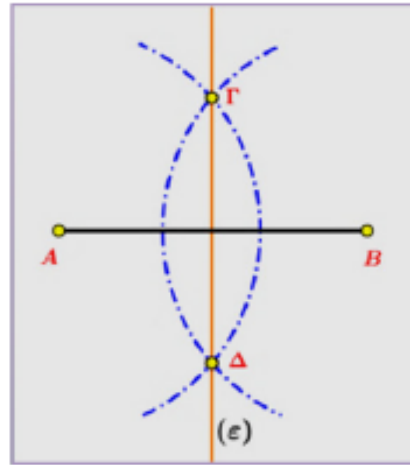
<https://www.youtube.com/watch?v=5bvjnleMn5A>

- ▶ Σε ποιες βασικές γεωμετρικές σχέσεις βασίστηκε η γεωμετρική κατασκευή που είδατε στο video;
- ▶ Διαβάστε το κείμενο της κατασκευής στο κυπριακό βιβλίο στην επόμενη διαφάνεια...

3. Κατασκευή μέσου και μεσοκάθετης ευθυγράμμου τμήματος AB.

Κατασκευή

Με κέντρα τα σημεία A και B και τυχαία ακτίνα $\rho > \frac{AB}{2}$ γράφουμε δύο ίσους κύκλους. Έστω Γ, Δ τα σημεία τομής των κύκλων. Η ευθεία (ε) που ορίζεται από τα Γ, Δ είναι η ζητούμενη μεσοκάθετη του AB .



Σχήμα 3

Απόδειξη

Η ευθεία (ε) από την κατασκευή είναι κοινή χορδή των δύο κύκλων και επομένως θα είναι κάθετη στη διάκεντρο AB και επειδή οι κύκλοι είναι ίσοι η ευθεία (ε) είναι μεσοκάθετη.

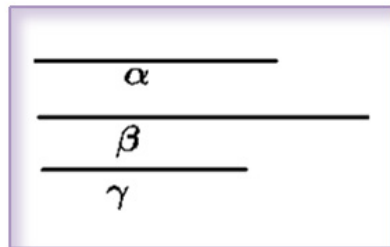
Διερεύνηση

Για να έχει λύση το πρόβλημα, θα πρέπει οι δύο κύκλοι που κατασκευάσαμε να τέμνονται. Επειδή, όμως, ισχύει: $\rho - \rho < AB < \rho + \rho$, συμπεραίνουμε ότι οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι.

Παρατήρηση: Με την ίδια κατασκευή βρίσκουμε και το μέσο ευθυγράμμου τμήματος.

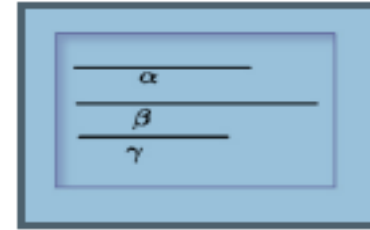
- ▶ Τι άλλο μπορούμε να βρούμε (εκτός του μέσου του ευθυγράμμου τμήματος AB) ή να κατασκευάσουμε στη συνέχεια αυτής της κατασκευής;
- ▶ Πώς θα χρησιμοποιήσουμε την κατασκευή αυτή για την κατασκευή ενός τετραγώνου πλευράς AB ;

Κατασκευή τριγώνου με δεδομένα τα μήκη των τριών πλευρών του

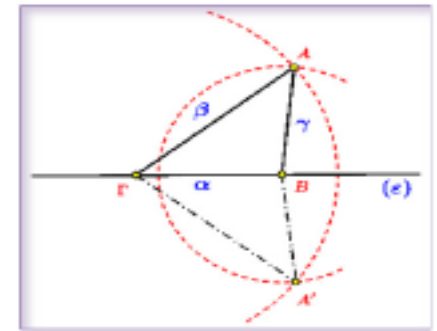


- Δοθέντων τριών τμημάτων κατασκευάζεται πάντα τρίγωνο;

1. Κατασκευή τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ όταν δίνονται οι πλευρές του α, β, γ



 Do.07.ggb και show.07.ggb



Σχήμα 7

Κατασκευή

Πάνω σε ευθεία (ε) , (Σχήμα 7), παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$ ίσο με ένα από τα δεδομένα τμήματα, έστω $B\Gamma = \alpha$. Γράφουμε δύο κύκλους με κέντρα τα σημεία B και Γ και με ακτίνες ίσες με γ και β , αντίστοιχα.

Αν οι κύκλοι τέμνονται, το σημείο τομής τους θα είναι η τρίτη κορυφή του τριγώνου (A ή A' στο παραπάνω σχήμα).

Απόδειξη

Πράγματι, από την κατασκευή που κάναμε, το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ έχει ως πλευρές του τα δεδομένα ευθύγραμμα τμήματα, γιατί $B\Gamma = \alpha$, $AB = \gamma$ ως ακτίνα του κύκλου (B, γ) και $A\Gamma = \beta$ ως ακτίνα του κύκλου (Γ, β) .

Διερεύνηση

Για να έχει λύση το πρόβλημα πρέπει οι δύο κύκλοι (B, γ) και (Γ, β) να τέμνονται. Για να ισχύει αυτό, αν υποθέσουμε ότι $\beta > \gamma$, θα πρέπει να ισχύει η τριγωνική ανισότητα, δηλαδή $\beta - \gamma < \alpha < \beta + \gamma$

Αν A' το δεύτερο σημείο τομής των δύο κύκλων (B, γ) και (Γ, β) , το τρίγωνο $\triangle A'\Gamma B$ είναι ίσο με το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ και άρα δεν αποτελεί άλλη λύση του προβλήματος.

ΥΛΙΚΟ ΜΕΛΕΤΗΣ

▶ ΒΙΒΛΙΟ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ (ΥΛΗ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ)

http://ebooks.edu.gr/ebooks/v/html/8547/2692/Geometria_A-Lykeiou_html-empl/index3.html

3^η Ενότητα, βασικά θεωρήματα, και παράγραφοι 3.17 & 3.18

▶ ΒΙΒΛΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΥΠΡΟΥ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ.

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ, 7.1, 7.2.1 και 7.2.2