ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ
Μαθηματική επαγωγή

Τι είναι η μαθηματική επαγωγή;

- Η μαθηματική επαγωγή είναι μια μέθοδος απόδειξης προτάσεων **σε καλά διατεταγμένα σύνολα** όπως **το σύνολο των φυσικών αριθμών.**
- Είναι ένα είδος **ευθείας απόδειξης**
- Ποια ανάγκη ώθησε τους επιστήμονες στη διαμόρφωση της απόδειξης μέσω της **μαθηματικής επαγωγής**;

Απάντηση:

Μια πρόταση που αληθεύει για ορισμένους φυσικούς αριθμούς να μπορούμε να γενικεύσουμε ότι αληθεύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς.

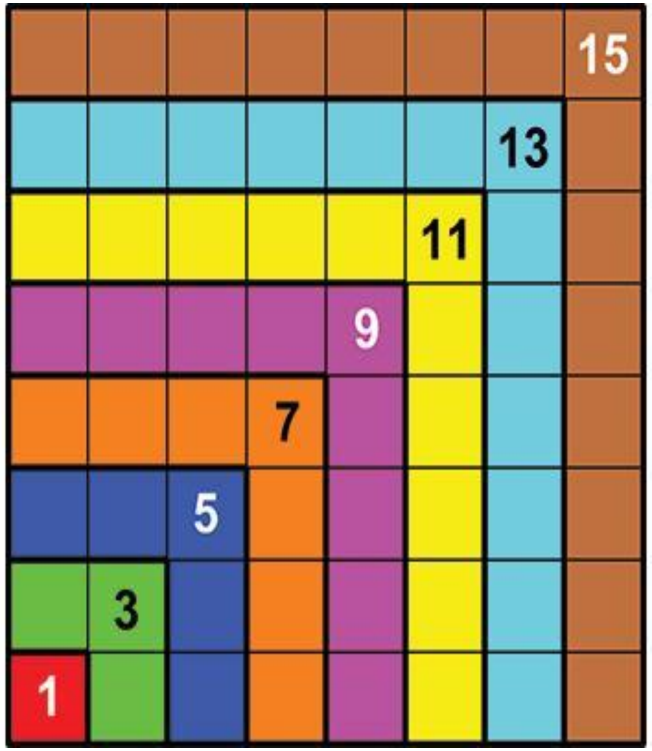
Όλες οι προτάσεις που αποδεικνύονται με μαθηματική επαγωγή εξαρτώνται **από ένα φυσικό αριθμό, ας πούμε τον αριθμό ν.**

Αναζητώντας την ‘πατρότητα’ της μαθηματικής επαγωγής

- Εχουν διατυπωθεί διάφορες θεωρίες και απόψεις σχετικά με το ποιος ανακάλυψε για πρώτη φορά τη διαδικασία της **μαθηματικής επαγωγής.**
- Οι περισσότεροι πάντως θεωρούν τον Γάλλο μαθηματικό Πασκάλ ως τον πρώτο μαθηματικό που διατύπωσε τη μαθηματική επαγωγή με σαφή και συστηματικό τρόπο (17ο αιώνα).
- Ιστορικά, η άποψη αυτή επικρατούσε κατά τον 19ο αιώνα μέχρι και τις αρχές του 20ου αιώνα.
- Παρόλα αυτά, το 1909 δημοσιεύθηκε ένα άρθρο τριών σελίδων του Ιταλού μαθηματικού George Vacca ο οποίος υποστήριζε ότι ο πρώτος μαθηματικός που χρησιμοποίησε την επαγωγή συστηματικά ήταν ο Ιταλός **βενεδικτίνος μοναχός Φραγκίσκος Μαυρόλυκος** το **1557**. Μάλιστα έγινε γνωστό ότι ο Πασκάλ αναφέρθηκε στο έργο του Μαυρόλυκου (*σε ιδέες σχετικές με την επαγωγή*), σε μια επιστολή του
- Το **1953** ο Ολλανδός μαθηματικός (γερμανικής καταγωγής**) Hans Freudenthal** μελέτησε το εν λόγω βιβλίο του Μαυρόλυκου και κατέληξε στο συμπέρασμα ότι όντως σε μερικά σημεία του βιβλίου φαίνεται πως χρησιμοποιείται μια διαδικασία παρόμοια με τη μαθηματική επαγωγή. Παρόλα αυτά ο Freudenthal υποστήριξε ότι η μαθηματική επαγωγή δεν ορίζεται συστηματικά και με ακριβή τρόπο από τον Μαυρόλυκο, αλλά πως ο **Πασκάλ ήταν ο πρώτος που όρισε τη διαδικασία με αυστηρότητα** και τη χρησιμοποίησε με συστηματικό τρόπο.

Ένα παράδειγμα: Άθροισμα ν περιττών αριθμών

- 1+3= (πλήθος περιττών = 2)
- 1+3+5= (πλήθος περιττών = 3)
- 1+3+5+7=
- 1+3+5+7+9+11= (πλήθος περιττών = 6
- …..
- 1+3+5+7+9+11+…+ (2ν-1)= ; (πλήθος περιττών = ν
- 1+3+5+7+9+11+…+ (2ν-1)= ν^2



Πώς θα μπορούσαμε να εκφράσουμε λεκτικά αυτή τη σχ

Είμαστε σίγουροι ότι ισχύει για οποιαδήποτε άθροισμα ν περιττών αριθμών;

4.1 Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

Εισαγωγή

Η Θεωρία Αριθμών, δηλαδή η μελέτη των ιδιοτήτων των θετικών ακεραίων, έθεσε από πολύ νωρίς τ μαθηματικούς μπροστά στο εξής πρόβλημα:

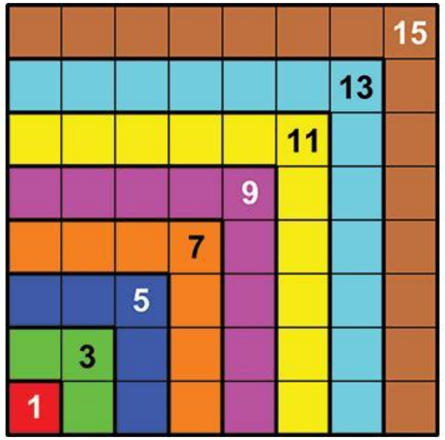
"Κάποια πρόταση αληθεύει για ορισμένες περιπτώσεις ακεραίων. Είναι όμως αδύνατο να εξεταστούν όλε ειδικές περιπτώσεις. Πώς μπορούμε να αποδείξουμε ότι αληθεύει γενικά;"

Μια από τις πλέον ισχυρές μεθόδους για τη λύση αυτού του προβλήματος είναι η μέθοδος της μαθηματ επαγωγής. Ο (ελληνικής καταγωγής) Ιταλός μαθη-ματικός Francesco Mauroliko (Μαυρόλυκος) απέδειξε το 1 ότι:

> *"Το άθροισμα ενός πλήθους περιττών σε διαδοχική σειρά, με αφετη-ρία τη μονάδα, δίνει το τετράγωνο του πλήθους των περιττών."*
>
> [δηλαδή, με σύγχρονο συμβολισμό, $1+3+5+...+(2ν-1)=ν^2$] .

Για την απόδειξη ο Μαυρόλυκος χρησιμοποίησε την πρόταση

> *"Κάθε τετράγωνο, όταν αυξάνεται με τον επόμενό του στην τάξη περιττό, δίνει το επόμενο στην τάξη τετράγωνο".*



Ουσιαστικά έδειξε λοιπόν ότι υπάρχει ένας γενικός τρόπος μετάβασης από μια περίπτωση στην αμέσως επόμενη. Η μέθοδος αυτή διατυπώθηκε με σαφήνεια από τον Blaise Pascal, το 1654, στην πραγματεία του για το αριθμητικό τρίγωνο. Διατυπώνοντας μια ιδιότητα που ισχύει σε όλες τις γραμμές του τριγώνου, ο Pascal έγραψε τα εξής:

> *"Αν η πρόταση αυτή έχει έναν άπειρο αριθμό περιπτώσεων, θα δώσω μια πολύ σύντομη απόδειξη υποθέτοντας δύο λήμματα.*
>
> *Το πρώτο, που είναι προφανές, είναι ότι αυτή η ιδιότητα ισχύει στη 2η γραμμή.*
>
> *Το δεύτερο είναι ότι αν αυτή η ιδιότητα ισχύει σε μια τυχαία γραμμή, τότε θα ισχύει απαραίτητα και στην επόμενη γραμμή.*
>
> *Από αυτό γίνεται φανερό ότι η πρόταση αληθεύει σε κάθε περίπτωση, γιατί η ιδιότητα ισχύει στη 2η γραμμή, λόγω του πρώτου λήμματος. Ετ-*
>
> *σι λόγω του δευτέρου λήμματος θα ισχύει και στην 3η γραμμή, άρα και στην 4η κ.ο.κ., μέχρι το άπειρο."*

Ιστορικό σημείωμα από το βιβλίο μαθηματικών Β' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Γιατί η μαθηματική επαγωγή αφορά το σύνολο των φυσικών αριθμών;

- Οι φυσικοί αριθμοί έχουν **το μοναδικό χαρακτηριστικό να μπορούν όλοι να παράγονται από έναν αρχικό αριθμό** και τον επαναλαμβανόμενο σχηματισμό των επόμενων.
- **Αν ο αρχικός φυσικός αριθμός έχει μια συγκεκριμένη ιδιότητα και αν περνά από οποιονδήποτε φυσικό αριθμό στον επόμενό του, τότε η ιδιότητα ισχύει για όλους τους φυσικούς.**
- Αυτά περιγράφονται από τα αξιώματα του PEANO

ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΠΕΑΝΟ: ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

- Στη μαθηματική λογική τα **Αξιώματα Πεάνο**, είναι ένα σύνολο μαθηματικών προτάσεων που αφορούν στους φυσικούς αριθμούς
- Πρώτη φορά παρουσιάστηκαν τον 19ο αιώνα από τον Ιταλό μαθηματικό Τζουζέπε Πεάνο (ιταλικά: *Giuseppe Peano*).
- Τα αξιώματα αυτά έχουν χρησιμοποιηθεί σχεδόν αναλλοίωτα σε αρκετές μαθηματικές έρευνες που αφορούν θεμελιώδη ερωτήματα πάνω στη συμβατότητα και την πληρότητα της Θεωρίας των αριθμών
- Τα αξιώματα του Πεάνο μπορούν να επαυξηθούν με τις διαδικασίες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, αλλά και με τη σχέση διάταξής στο σύνολο *N*.

Τα αξιώματα του Peano

- Το **1 είναι φυσικός αριθμός** (μπορούμε να αρχίσουμε και από το μηδέν)
- Αν **α είναι ένας φυσικός αριθμός τότε και ο διάδοχος το α είναι φυσικός αριθμός**
- **Δεν υπάρχει φυσικός αριθμός, του οποίου ο διάδοχος να είναι ο 1**
- Αν δύο φυσικοί αριθμοί **έχουν ίσους διαδόχους, τότε οι αριθμοί αυτοί είναι ίσοι**
- Αν ένα σύνολο S φυσικών αριθμών **περιέχει το 1 καθώς και τον διάδοχο κάθε φυσικού αριθμού, που ανήκει στο S, τότε κάθε φυσικός αριθμός ανήκει στο S**
- **Η καλή διάταξη των Φυσικών αριθμών** (κάθε μη κενό υποσύνολο των Φυσικών περιέχει ένα ελάχιστο στοιχείο)

Μαθηματική επαγωγή

Η μαθηματική επαγωγή

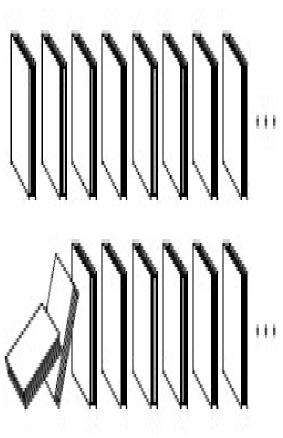
- Η πιο απλή και πιο συνήθης μορφή της μεθόδου είναι αυτή που αποδεικνύει ότι μια πρόταση $P(\nu)$ είναι αληθής για όλους τους φυσικούς αριθμούς **ν** και αποτελείται από τα **παρακάτω τρία βήματα:**
- **1. Βασικό βήμα:** δείχνουμε ότι η πρόταση $P(\nu)$ ισχύει για **ν = 1**,
- **2. Επαγωγική υπόθεση:** υποθέτουμε ότι η πρόταση $P(\nu)$ είναι αληθής για κάποιο $\nu = \kappa$, δηλαδή ότι ισχύει $P(\kappa)$.
- **3. Επαγωγικό βήμα:** χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση προσπαθούμε να αποδείξουμε ότι **αν η πρόταση ισχύει για ν = κ τότε ισχύει και για ν = κ + 1** δηλαδή ότι: ξεκινώντας από την υπόθεση ότι ισχύει $P(\kappa)$ καταλήγουμε ότι ισχύει $P(\kappa + 1)$.

Τα τρία βήματα

- Από το ***βασικό βήμα (1ο βήμα)*** όμως έχουμε ήδη αποδείξει ότι ένας τέτοιος αριθμός (για τον οποίο η πρόταση είναι αληθής) υπάρχει και είναι ο ν = *1*.
- Με το ***επαγωγικό βήμα (3ο βήμα)*** έχουμε καταφέρει να αποδείξουμε ότι, αν η πρόταση είναι αληθής (***επαγωγική υπόθεση-2ο βήμα***) για κάποιο φυσικό **αριθμό** ν = *κ*, **τότε είναι αληθής και για κάθε επόμενο φυσικό αριθμό.**
- Επομένως η ***πρόταση ισχύει για όλους*** τους φυσικούς αριθμούς καθώς όλοι τους είναι ίσοι με τον προηγούμενο αυξημένο κατά ένα.

Μαθηματική επαγωγή και ντόμινο

Υποθέτουμε ότι έχουμε τοποθετήσει σε μια σειρά ένα πλήθος βιβλίων.



Αν ρίξουμε προς τα πίσω το πρώτο βιβλίο και αν τα βιβλία είναι έτσι τοποθετημένα ώστε κάθε φορά που πέφτει κάποιο βιβλίο να ρίχνει και το επόμενό του, τότε θα ανατραπούν όλα τα βιβλία.

Είναι βοηθητικό να σκέφτεται κανείς την μαθηματική επαγωγή σε αναλογία με μια σειρά από *ντόμινο* τοποθετημένα όρθια το ένα πολύ κοντά στο άλλο και θεωρήσουμε πως ισχύουν οι παρακάτω προϋποθέσεις :

- Αν σπρώξουμε το πρώτο ντόμινο στη σειρά, αυτό θα πέσει.
- Όταν ένα οποιοδήποτε από τα ντόμινο πέσει τότε πέφτει και το επόμενο.
- Έτσι μπορούμε να είμαστε απόλυτα βέβαιοι ότι αν σπρώξουμε το πρώτο ντόμινο για να πέσει τότε όλα τα ντόμινο θα πέσουν.

Άθροισμα ν περιττών αριθμών με μαθηματική επαγωγή

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΗΣ ΣΧΕΣΗΣ ΜΕ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ: 1+3+5+7+9+11+…+ (2ν-1)= ν^2

1ο ΒΗΜΑ: ΒΑΣΙΚΟ ΒΗΜΑ

Υπολογίζουμε το άθροισμα αυτό για μερικές τιμές του ν και έχουμε:

Για $\nu=1$, $\quad 1=1 \quad (=1^2)$

Για $\nu=2$, $\quad 1+3=4 \quad (=2^2)$

Για $\nu=3$, $\quad 1+3+5=9 \quad (=3^2)$

Για $\nu=4$, $\quad 1+3+5+7=16 \quad (=4^2)$

Τα μέχρι τώρα αποτελέσματα μας οδηγούν στην εικασία ότι:

$$1+3+5+7+\ldots+(2\nu-1)=\nu^2 . \qquad (1)$$

Επειδή το πλήθος των θετικών ακεραίων είναι άπειρο, συνεχίζοντας με τον παραπάνω τρόπο, είναι αδύνατο να αποδείξουμε ότι η (1) ισχύει για όλους τους θετικούς ακεραίους.

2ο ΒΗΜΑ: επαγωγική υπόθεση, ν=κ

Αν, λοιπόν, υποθέσουμε ότι

$$1+3+5+7+...+(2\nu-1)=\nu^2,$$

ή για ν=κ: 1+3+5+7+... + (2κ-1)=κ^2

3ο ΒΗΜΑ: επαγωγικό βήμα, ν=κ+1,

Ποιος είναι ο *επόμενος περιττός μετά τον 2ν-1?*

τότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned}1+3+5+7+...+(2\nu-1)+(2\nu+1) &= [1+3+5+7+...+(2\nu-1)]+(2\nu+1)\\ &= \nu^2+2\nu+1\\ &= (\nu+1)^2.\end{aligned}$$

Αποδείξαμε δηλαδή ότι αν ο ισχυρισμός είναι αληθής για έναν αυθαίρετο θετικό ακέραιο ν, τότε είναι αληθής και για τον επόμενό του ακέραιο $\nu+1$. Άρα, αληθεύει για κάθε θετικό ακέραιο ν.

Δίνεται η παρακάτω εσφαλμένη πρόταση με την απόδειξη της. Βρείτε που βρίσκεται το λάθος

- **«Κάθε φυσικός αριθμός είναι ίσος με τον επόμενο του».**
- Με τη βοήθεια της μαθηματικής επαγωγής υποθέτω ότι ισχύει η πρόταση για κάποιο φυσικό αριθμό κ. Τότε κ=κ+1.
- Θα αποδείξω ότι η πρόταση ισχύει για τον επόμενο του κ τον κ+1
  - Δηλαδή ότι κ+1 =κ+2. Επειδή κ=κ+1 από την υπόθεση προσθέτοντας και στα δύο μέλη τον αριθμό 1 έχουμε ότι κ+1=κ+1+1 δηλαδή κ+1=κ+2. **Άρα έχω αποδείξει την αρχική εικασία**.

Παραδείγματα σχέσεων για απόδειξη με τη μαθηματική επαγωγή

- Υπολόγισε το άθροισμα $1+2+3+\ldots+\nu$, $\nu=5$, $\nu=6$, $\nu=8$
- Αναζήτησε ένα μοτίβο
- Απόδειξε τη σχέση που βρήκες με τη βοήθεια της μαθηματικής επαγωγής

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να αποδείξουμε την πιο κάτω μαθηματική πρόταση (την οποία θα συμβολίσουμε με *P*(*ν*)) :

$$1+2+3+\cdots+\nu=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$$

για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$

Η πιο πάνω πρόταση είναι ένας τύπος που χρησιμοποιείται για την πρόσθεση όλων των φυσικών αριθμών από *1* μέχρι *ν*. Η απόδειξη της πρότασης γίνεται με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής ως ακολούθως:

1° ΒΗΜΑ: ΒΑΣΙΚΟ ΒΗΜΑ

- Ελέγχουμε ότι η πρόταση ισχύει για *ν* = *1*, [επαληθεύουμε δηλαδή ότι ισχύει η *P*(*1*)]. Είναι προφανές ότι το άθροισμα των πρώτων 1 φυσικών αριθμών είναι *1*.

$$1=\frac{1(1+1)}{2}=1$$

2° ΒΗΜΑ: επαγωγική υπόθεση, ν=κ

- Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι η πρόταση είναι αληθής για κάποιο φυσικό αριθμό *ν* = *κ* [δηλαδή ότι η *P*(*κ*) είναι αληθής].

$$1+2+3+\cdots+\kappa=\frac{\kappa(\kappa+1)}{2},\ \textbf{(επαγωγική υπόθεση)}$$

3ο ΒΗΜΑ: επαγωγικό βήμα, ν=κ+1

- Τέλος προσπαθούμε να αποδείξουμε ότι, αν η πρόταση ισχύει για $\nu = \kappa$, τότε ισχύει και για $\nu = \kappa + 1$, [αν ισχύει η $P(\kappa)$, τότε ισχύει και η $P(\kappa + 1)$] δηλαδή ότι:

$$1+2+3+\cdots+\kappa+\kappa+1=\frac{(\kappa+1)(\kappa+2)}{2}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πάντα χρησιμοποιούμε την επαγωγική υπόθεση

Το κάνουμε αυτό χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση. Έχουμε δεχτεί ότι ισχύει:

$$1+2+3+\cdots+\kappa=\frac{\kappa(\kappa+1)}{2}$$

Προσθέτουμε και στα δύο μέλη της εξίσωσης τον όρο $\kappa + 1$, που είναι ο επόμενος του κ φυσικός αριθμός, και έχουμε διαδοχικά

$$1+2+3+\cdots+\kappa+\kappa+1=\frac{\kappa(\kappa+1)}{2}+\frac{2(\kappa+1)}{2}=\frac{(\kappa^2+3\kappa+2)}{2}=\frac{(\kappa+1)(\kappa+2)}{2}$$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Η πρόταση $P(\nu)$ είναι αληθής για όλους τους φυσικούς αριθμούς ν.

Παράδειγμα: Να αποδείξετε με μαθηματική επαγωγή ότι ισχύει ο τύπος: $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

Ισχυρισμός: $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ για $n \geq 1$

Πολύ σημαντική η καθαρογραφή του ισχυρισμού (να φαίνεται καθαρά το n και να μην σημειώνουμε το κάτω όριο του n σε αυτόν

Απόδειξη:

Βάση Επαγωγής: Δείχνουμε ότι ισχύει για $n = 1$, δηλαδή ότι: $1=\frac{1(1+1)}{2}$.

Απόδειξη:

Πράγματι ισχύει ότι: $\frac{1(1+1)}{2}=\frac{2}{2}=1$

Στην **βάση επαγωγής** αποδεικνύουμε τον ισχυρισμό για τον μικρότερο φυσικό που μας λέει η εκφώνηση (ή εντοπίζουμε εμείς ότι ισχύει)

Επαγωγική Υπόθεση: Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή ότι: $1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$.

Στην **επαγωγική υπόθεση** υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για n=k (και αντικαθιστούμε στον ισχυρισμό όπου n το k)

Στην ισχυρή μαθηματική επαγωγή μπορούμε να κάνουμε υπόθεση για όλες τις τιμές από την αρχή έως το k

Επαγωγικό Βήμα: Δείχνουμε ότι ισχύει για $n = k + 1$, δηλαδή ότι: $1+2+\cdots+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Απόδειξη:

Πράγματι ισχύει ότι:

$1+2+\cdots+(k+1)=[1+2+\cdots+k]+(k+1)$

και λόγω της επαγωγικής υπόθεσης έχουμε:

$=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2}=\frac{(k+2)(k+1)}{2}$

Στο **επαγωγικό βήμα** αποδεικνύουμε την πρόταση που προκύπτει αν θέσουμε στον ισχυρισμό όπου n το k+1. Προσοχή ότι πρέπει υποχρεωτικά να χρησιμοποιήσουμε την επαγωγική υπόθεση.

Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει

$$1+x+x^2+\ldots+x^{\nu-1}=\frac{x^\nu-1}{x-1}, \quad \text{εφόσον} \quad x\neq 1.$$

ΛΥΣΗ

Έστω $P(\nu)$ η ισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε

- Η $P(\nu)$ αληθεύει για $\nu=1$, αφού γράφεται $1=\dfrac{x-1}{x-1}$, που είναι αληθής.

2ο βήμα, επαγωγική υπόθεση

Πώς θα γραφεί η πρόταση στη μορφή P(ν)?

- Θα αποδείξουμε ότι, αν η $P(\nu)$ είναι αληθής, τότε και η $P(\nu+1)$ θα είναι αληθής, δηλαδή ότι:

Αν $1+x+x^2+\ldots+x^{\nu-1}=\dfrac{x^\nu-1}{x-1}$ (1), τότε $1+x+x^2+\ldots+x^{\nu-1}+x^\nu=\dfrac{x^{\nu+1}-1}{x-1}$.

3ο βήμα, επαγωγικό βήμα

Πώς θα γραφεί η πρόταση στη μορφή P(ν+1)?

Πράγματι, έχουμε:

$$\begin{aligned}1+x+x^2+\ldots+x^{\nu-1}+x^\nu &\overset{(1)}{=}\frac{x^\nu-1}{x-1}+x^\nu\\ &=\frac{x^\nu-1+x^{\nu+1}-x^\nu}{x-1}\\ &=\frac{x^{\nu+1}-1}{x-1}.\end{aligned}$$

Θυμηθείτε: Πάντα χρησιμοποιούμε την επαγωγική υπόθεση όταν δουλεύουμε στο 3ο βήμα

Άρα, η $P(\nu)$ αληθεύει για κάθε θετικό ακέραιο ν.

Αποδείξεις **σχέσεων διαιρετότητας** φυσικών αριθμών με τη βοήθεια της μαθηματικής επαγωγής

- **Πρόταση: Ο 5 διαιρεί κάθε φυσικό αριθμό της μορφής (6^n+4)**
- **ή κάθε φυσικός της μορφής: 6^n+4 είναι πολλαπλάσιο του 5**
- **Συμβολική γραφή: 6^n+4=5λ, για κάθε n**
- **1ο βήμα**: για n=1, 6+4=10=2*5 (ισχύει)
- …
- **2ο βήμα**: για n=k, 6^k+4=5λ

ή **6^κ=5*λ-4**

- **3ο βήμα**: για n=k+1, θέλω να αποδείξω ότι ο (6^(k+1)+ 4) είναι πολλαπλάσιο του 5.
- **Απόδειξη**

6^(k+1)+4 = 6***6^κ**+4 =

6(**5λ-4**)+4=

30λ-24+4=

30λ-20=

5(6λ-4)=5m

Άρα…

Αποδείξεις **ανισοτικών σχέσεων** με τη βοήθεια της μαθηματικής επαγωγής

- Εάν ν φυσικός αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του 5 να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $2^{\nu}>5\nu$
- Εάν ν φυσικός αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του 3 να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $2^{\nu}>2\nu+1$

Πηγές και υλικά

- Σημειώσεις – Διαφάνειες μαθήματος
- Μελέτη μέσα από υλικά σε ιστοσελίδες
  - **Β' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 4.1** http://ebooks.edu.gr/ebooks/v/html/8547/2754/Mathimatika-B-Lykeiou-ThSp_html-apli/index4_1.html
  - https://free-https://www.slideshare.net/DimitrisPsounis/20-52974510
  - ebooks.gr/%CE%B2%CE%B9%CE%B2%CE%BB%CE%AF%CE%BF/gVZ/%CF%83%CF%84%
  - ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΜΕΛΕΤΗΣ: Θεωρία Αριθμών (Αντωνιάδης και Κοντογιώργης(1ο κεφάλαιο) https://eclass.uoa.gr/modules/document/file.php/MATH443/NumberTheoryNov.pdf