Θεωρία αριθμών: Πρώτοι αριθμοί

ΧΡΥΣΑΥΓΗ ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΥ,
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΏΝ ΕΚΠΑ

Ιστορικά στοιχεία (Β' Λυκείου, 4.5)

4.5 ΠΡΩΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ονομάζεται σήμερα Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής

Εισαγωγή

Δύο από τα σημαντικότερα αποτελέσματα σχετικά με τους πρώτους αριθμούς ήταν γνωστά ήδη από την αρχαιότητα. Το γεγονός ότι κάθε ακέραιος αναλύεται με μοναδικό τρόπο ως γινόμενο πρώτων εμφανίζεται στα "Στοιχεία" του Ευκλείδη στην εξής μορφή (βιβλίο IX, πρόταση 14):

> *"Εάν ελάχιστος αριθμός υπό πρώτων αριθμών μετρήται, υπ' ουδενός άλλου πρώτου αριθμού μετρηθήσεται παρέξ των εξ αρχής μετρούντων".*

Στα "Στοιχεία" επίσης, το γεγονός ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί εμφανίζεται ως
πρόταση 20):

> *"Οι πρώτοι αριθμοί πλείους εισί παντός του προτεθέντος πλήθους πρώτων αριθμών".*

Αριστούργημα της θεωρητικής μαθηματικής σκέψης

Το αποτέλεσμα αυτό και η απόδειξή του από τον Ευκλείδη θεωρούνται ένα από τα αριστουργήματα της θεωρητικής μαθηματικής σκέψης. Ο G. Hardy (1877-1947) έγραψε ότι "... είναι τόσο σύγχρονο και σημαντικό όπως και όταν ανεκαλύφθη-εδώ και 2000 χρόνια παρέμεινε ανέπαφο".

Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής

Το **θεμελιώδες θεώρημα της αριθμητικής** είναι ένα από τα πιο σημαντικά θεωρήματα της θεωρίας αριθμών στα μαθηματικά.
Σύμφωνα με αυτό,
Κάθε φυσικός αριθμός (ή κάθε θετικός ακέραιος αριθμός μεγαλύτερος της μονάδας) αναλύεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων κατά ένα και μοναδικό τρόπο, αν δεν λάβουμε υπόψιν μας την σειρά των παραγόντων στο γινόμενο.

Θεμελιώδες θεώρημα της Αριθμητικής στο σύνολο των θετικών ακεραίων αριθμών

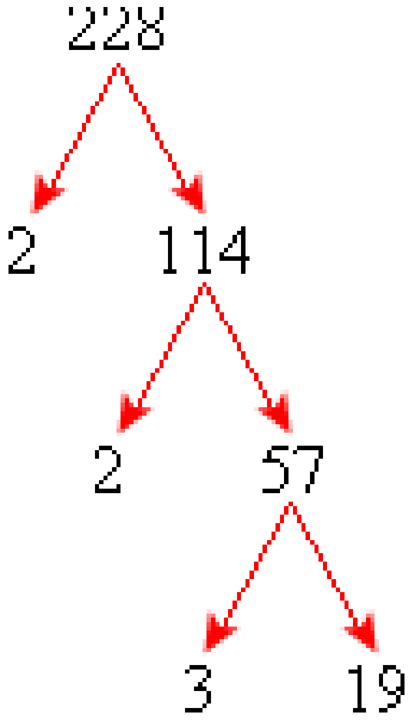
Κάθε φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 1 μπορεί να αναλυθεί κατά μοναδικό τρόπο σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, αν δεν λάβουμε υπόψη μας την σειρά των παραγόντων του.

Δηλαδή για κάθε $n \in \mathbb{Z}^+, n > 1$ ισχύει πως:

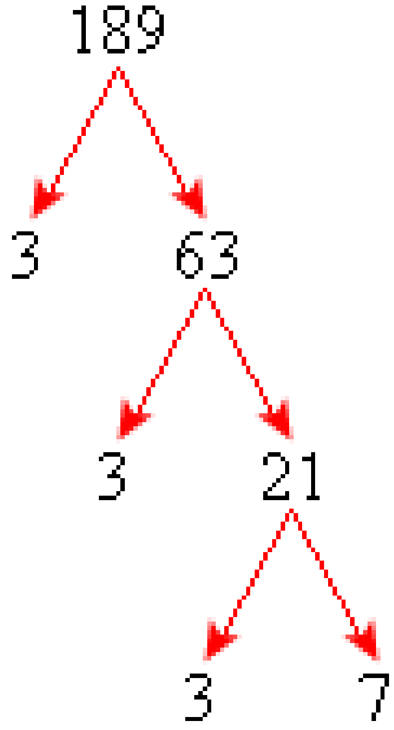
$$n = p_1{}^{a_1} \cdot p_2{}^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k{}^{a_k}$$

Όπου $p_1, p_2, \ldots, p_k$ διαφορετικοί πρώτοι αριθμοί ταξινομημένοι σε αύξουσα σειρά και $a_1, a_2, \ldots, a_k$ θετικοί ακέραιοι.

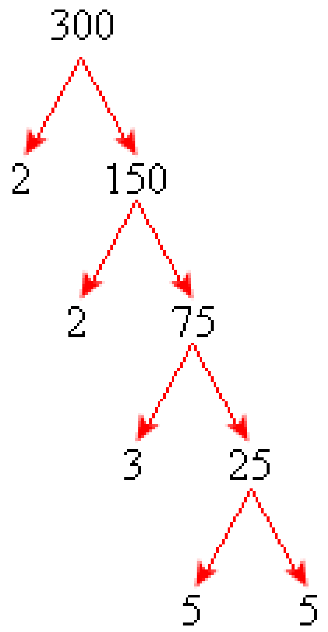
Παραδείγματα ανάλυσης αριθμών σε γινόμενο πρώτων παραγόντων



$$228 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 19$$



$$189 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$$



$$300 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$$

ΘΘΑ & πρώτοι αριθμοί

- Το θεμελιώδες θεώρημα της αριθμητικής καθορίζει το βασικό ρόλο των πρώτων αριθμών στη Θεωρία αριθμών

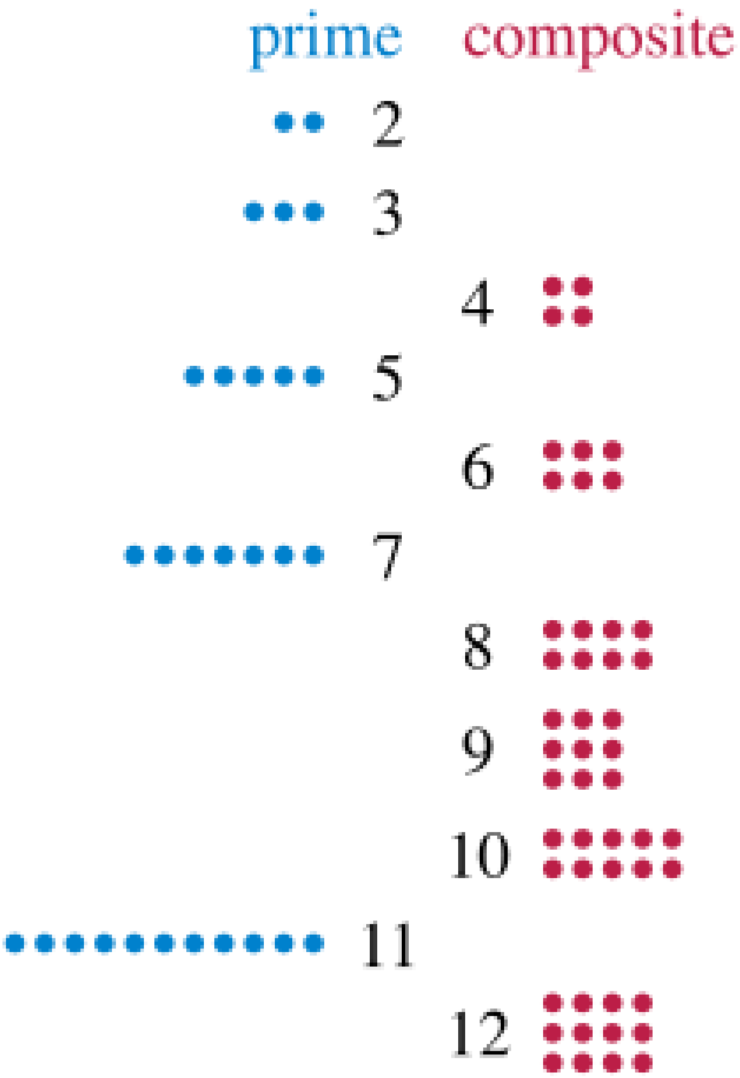
Πρώτοι αριθμοί & σύνθετοι αριθμοί

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Αν ο $n > 1$ έχει μόνο δύο θετικούς διαιρέτες, τους $1, n$, τότε ο n χαρακτηρίζεται* **πρώτος**.
Αν ο $n > 1$ έχει περισσότερους από δύο θετικούς διαιρέτες, τότε ο n χαρακτηρίζεται **σύνθετος**.

Παρατηρούμε ότι ο 1 δεν είναι πρώτος ούτε σύνθετος.
Είναι σαφές ότι ο n είναι σύνθετος αν και μόνον αν υπάρχει d ώστε

$$d \mid n, \quad 1 < d < n.$$

Πρώτοι -σύνθετοι



Τι παρατηρούμε;

Ποιοι είναι οι ‘αρχικοί’ πρώτοι αριθμοί?

Οι αρχικοί πρώτοι είναι οι

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, \ldots .$$

Ο 2 είναι ο μοναδικός άρτιος πρώτος. Όλοι οι άλλοι πρώτοι είναι περιττοί. Αυτό είναι προφανές, αφού ένας πρώτος > 2 δεν μπορεί να διαιρείται από τον 2.

- Κάθε πρώτος που διαιρεί ένα δοθέντα ακέραιο λέγεται **πρώτος διαιρέτης** του ακεραίου αυτού.
- Είναι φανερό ότι ο -*a* είναι πρώτος, αν και μόνο αν ο *a* είναι πρώτος.
  - Γι' αυτό στη συνέχεια θα περιοριστούμε ***μόνο*** σε θετικούς πρώτους.

Πώς βρίσκουμε πρώτους αριθμούς;

- Ένα εύλογο ερώτημα είναι το εξής:
- "***Αν δοθεί ένας θετικός ακέραιος a , πώς μπορούμε να αποφανθούμε αν είναι πρώτος ή σύνθετος και, στην περίπτωση που είναι σύνθετος, πώς μπορούμε πρακτικά να βρούμε ένα διαιρέτη διαφορετικό από τους 1 και a*** ";
  - Η προφανής απάντηση είναι να κάνουμε διαδοχικές διαιρέσεις με τους ακεραίους που είναι μικρότεροι του a .
  - Αν κανένας από αυτούς δε διαιρεί τον a , τότε ο a είναι πρώτος.
  - Αν και η μέθοδος αυτή είναι πολύ απλή στην περιγραφή της, δεν μπορεί να θεωρηθεί πρακτική, γιατί έχει απαγορευτικό κόστος σε χρόνο και εργασία, ιδιαίτερα για μεγάλους αριθμούς.

Τεχνική εύρεσης πρώτων αριθμών: **Το κόσκινο του Ερατοσθένη**

- Πρώτος, ο Ερατοσθένης ο Κυρηναίος, επινόησε μια τεχνική γνωστή σήμερα ως «**Κόσκινο του Ερατοσθένη**» για να βρίσκει πρώτους αριθμούς. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, αν θέλουμε να βρούμε όλους τους πρώτους μέχρι τον φυσικό αριθμό n, γράφουμε όλους τους ακέραιους από το 2 μέχρι τον φυσικό αριθμό n και διαγράφουμε διαδοχικά όλα τα πολλαπλάσια του 2 του 3,του 5 κλπ. Οι αριθμοί που απομένουν είναι πρώτοι.
- **Ποιος θα είναι ο τελευταίος πρώτος που θα ελέγξουμε;**
- **Απ. p^2<n**
- **Συνεπώς αν ψάχνουμε τους πρώτους μέχρι το 100 μέχρι ποια πολλαπλάσια του πρώτου αριθμού θα σταματήσουμε;**
- **Απ. 7^2=49<100 μιας και ο επόμενος πρώτος είναι ο 11^2=121>100**

https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%9A%CF%8C%CF%83%CE%BA%CE%B9%CE%BD%CE%BF_%CF%84%CE%BF%CF%85_%CE%95%CF%81%CE%B1%CF%84%CE%BF%CF%83%CE%B8%CE%AD%CE%BD%CE%B7

Ο Ερατοσθένης

Ο **Ερατοσθένης** *(γεννήθηκε στην Κυρήνεια και πέθανε στην Αλεξάνδρεια) διακρίθηκε ως Μαθηματικός, Φυσικός, Γεωγράφος, Αστρονόμος, Ιστορικός και Φιλόλογος. Από το 234 π.Χ. και επί περίπου 40 χρόνια, διετέλεσε υπεύθυνος της περίφημης βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας και δίδαξε στο Μουσείο της. Στα περίφημα* **"Γεωγραφικά"** *που παρουσίασε την πρώτη ακριβή μαθηματική μέτρηση της* **περιμέτρου (μεσημβρινού) της Γης**, *ως* **250.000 στάδια** *(=39.400 - 41.000 km, έναντι της πραγματικής 40.000 km) (Κλεομήδης, Στράβων). Επίσης, υπολόγισε την απόσταση της σελήνης* **780.000 στάδια** *και του Ήλιου* **804.000.000 στάδια.**

Μέτρησε την κλίση του άξονα της γης με μεγάλη ακρίβεια και έφτιαξε έναν κατάλογο που περιελάμβανε **675** *αστέρες. Λάτρης της ταξινόμησης της ανθρώπινης γνώσης, ο Ερατοσθένης δεν μπόρεσε να αντέξει τη στέρηση της μελέτης, που του επέβαλε η τύφλωση που τον έπληξε στα γεράματα και τελικά τερμάτισε τη ζωή του, αφού αρνιότανε να φάει οτιδήποτε.*

- Οι πρώτοι αριθμοί από το 2 έως το 100 χρησιμοποιώντας το κόσκινο του Ερατοσθένη

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

ΑΣΚΗΣΗ: Να χρησιμοποιήσετε το κόσκινο του Ερατοσθένη για να βρείτε τους πρώτους αριθμούς από το 101-120

101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140

Οι πρώτοι αριθμοί μέχρι το 1000

	2	3	5	7	11	13	17	19	23
29	31	37	41	43	47	53	59	61	67
71	73	79	83	89	97	101	103	107	109
113	127	131	137	139	149	151	157	163	167
173	179	181	191	193	197	199	211	223	227
229	233	239	241	251	257	263	269	271	277
281	283	293	307	311	313	317	331	337	347
349	353	359	367	373	379	383	389	397	401
409	419	421	431	433	439	443	449	457	461
463	467	479	487	491	499	503	509	521	523
541	547	557	563	569	571	577	587	593	599
601	607	613	617	619	631	641	643	647	653
659	661	673	677	683	691	701	709	719	727
733	739	743	751	757	761	769	773	787	797
809	811	821	823	827	829	839	853	857	859
863	877	881	883	887	907	911	919	929	937
941	947	953	967	971	977	983	991	997	

Αναζητώντας πρώτους αριθμούς…

- **Μπορούμε να βρούμε τον ν-οστό πρώτο αριθμό**;
  - ΑΠΑΝΤΗΣΗ: **Δεν υπάρχει μοτίβο (σχέση) εύρεσης τους**
  - Υπάρχουν προσπάθειες εύρεσης ειδικών μορφών πρώτων αριθμών
    - π.χ. δίδυμοι πρώτοι (διαδοχικοί πρώτοι περιττοί)
    - Υπάρχουν άπειροι πρώτοι της μορφής 4ν+3 και της μορφής 4ν+1
    - Υπάρχουν διαστήματα φυσικών αριθμών όσο θέλουμε μεγάλα που δεν περιέχουν πρώτους αριθμούς. (π.χ (ν+1)!+2, (ν+1)!+3,…(ν+1)!+ν+1)
    - Το πολυώνυμο φ(x) $=x^2+x+11$ μας δίνει για χ=1,…9 πρώτους αριθμούς αλλά όχι για χ=10

Εφαρμογές

- Αναζητήστε πρώτους αριθμούς 101-120 που να είναι της μορφή 4ν+1 ή 4ν+3
- Πολυώνυμο φ(x) $=x^2+x+11$ μας δίνει για χ=1,…9 πρώτους αριθμούς αλλά όχι για χ=10
  - Να υπολογίσετε την τιμή του πολυωνύμου φ(x) για x=5, 7, 10

Η εικασία των Δίδυμων Πρώτων

- Η **εικασία των Δίδυμων Πρώτων** είναι ένα από τα αρχαιότερα άλυτα προβλήματα των μαθηματικών
- Πολλοί ιστορικοί την αποδίδουν στον Ευκλείδη ο οποίος υποστήριξε πως **υπάρχει ένα άπειρο πλήθος από ζεύγη πρώτων*** αριθμών οι οποίοι διαφέρουν μεταξύ τους κατά δύο μονάδες,
- Μπορείτε να δώσετε 3 παραδείγματα δίδυμων πρώτων αριθμών;

- Προσπάθειες εύρεσης πρώτων αριθμών

«ούτε νόμος ... ούτε τάξη»

- Το πρόβλημα του ακριβούς προσδιορισμού της θέσης του n-στου πρώτου αριθμού αποδείχτηκε μέχρι σήμερα ένα άπιαστο όνειρο.
- Φαίνεται ότι στον «***πίνακα των πρώτων δεν επικρατεί ούτε νόμος ούτε τάξη***», όπως έλεγε και ο Euler.

Ιστορικές αναζητήσεις πρώτων αριθμών (1/2)

- **Cataldi (1588):** $2^{17}-1 = 131071$ and $2^{19}-1 = 524287$ είναι πρώτοι αριθμοί.
- **Euler (1772): απέδειξε ότι ο** $2^{31}-1 = 2147483647$ είναι πρώτος αριθμός
- **Lucas (1876):** απέδειξε ότι ο $2^{127}-1 = 170141183460469231731687303715884105727$ είναι πρώτος αριθμός
- **Ferrier (1951)** βρήκε τον πρώτο αριθμό $(2^{148}+1)/17 = 20988936657440586486151264256610222593863921$.
- **Να επισημάνουμε ότι πριν από 2000 χρόνια ο Ευκλείδης απέδειξε ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί.**

Ιστορικές αναζητήσεις πρώτων αριθμών (2/2)

- Ενας από τους μεγαλύτερους πρώτος αριθμός που έχει εντοπιστεί μέχρι σήμερα είναι ο $2^{2.967.221} - 1$, ένας "γίγαντας" με 895.932 ψηφία.
  - Πρόκειται για τον 36ο από τους πρώτους αριθμούς της μορφής $\mathbf{p= 2^{v} - 1}$ που γνωρίζουμε
- Άλλοι πρώτοι αριθμοί με ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι αυτοί της μορφής $\boldsymbol{p=2^{v}+1}$, όπου $\boldsymbol{v=2^{\kappa}}$, από τους οποίους όμως γνωρίζουμε μόνο 5, αυτούς που προκύπτουν για κ=0,1,2,3,4 και είναι αντίστοιχα οι 3,5,17,257,65537 (όσοι από τους υπόλοιπους έχουν ελεγχθεί αποδείχτηκαν σύνθετοι).
- Ο C.F. Gauss σε πολύ νεαρή ηλικία έδειξε ότι ένα κανονικό πολύγωνο κατασκευάζεται με κανόνα και διαβήτη, **μόνο αν το πλήθος των πλευρών του είναι πρώτος αριθμός**

Ο μεγαλύτερος πρώτος αριθμός που έχει βρεθεί έως σήμερα

Ένας υπολογιστής (του δικτύου GIMPS) στο Πανεπιστήμιο του Μισούρι στις ΗΠΑ κατέγραψε τον μεγαλύτερο μέχρι σήμερα πρώτο αριθμό, που γράφεται ως:
$2^{74,207,281}$-1 και ονομάζεται **M74207281**.

$$2^{74,207,281}-1$$

- **ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ & ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ**

ΘΕΩΡΗΜΑ 1

ΘΕΩΡΗΜΑ

Κάθε θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του 1 έχει έναν τουλάχιστον πρώτο διαιρέτη.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ο θετικός ακέραιος $\alpha > 1$ και p ο μικρότερος από τους θετικούς διαιρέτες του με $p > 1$. Θα αποδείξουμε ότι ο p είναι πρώτος αριθμός. Αν ο p ήταν σύνθετος, θα είχε ένα θετικό διαιρέτη, έστω β με $1 < \beta < p$. Αφού όμως $\beta | p$ και $p | \alpha$, τότε θα ισχύει $\beta | \alpha$ (θεώρημα 2). Βρήκαμε έτσι ένα θετικό διαιρέτη β του α που είναι μικρότερος του p . Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού ο p θεωρήθηκε ως ο ελάχιστος διαιρέτης του α. Έτσι ο μικρότερος από τους θετικούς διαιρέτες ενός ακεραίου είναι πρώτος αριθμός. ■

ΘΕΩΡΗΜΑ 2

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν ένας πρώτος p διαιρεί το γινόμενο $\alpha\beta$ δύο ακέραιων, τότε διαιρεί έναν, τουλάχιστον, από τους ακεραίους αυτούς.

Το θεώρημα ισχύει και για γινόμενο περισσότερων ακεραίων. Δηλαδή:

"Αν p πρώτος και $p|\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_\nu$, τότε ο p διαιρεί έναν, τουλάχιστον, από τους παράγοντες του γινομένου".

Θεώρημα του Ευκλείδη

ΘΕΩΡΗΜΑ (του Ευκλείδη)

Υπάρχουν ά π ε ι ρ ο ι θετικοί πρώτοι αριθμοί.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι υπάρχει πεπερασμένο πλήθος πρώτων αριθμών $p_1, p_2, \dots, p_\nu$. Θα αποδείξουμε ότι αυτό οδηγεί σε άτοπο. Σχηματίζουμε τον αριθμό $A = p_1 p_2 \cdots p_\nu + 1$. Ο αριθμός όμως αυτός, επειδή είναι μεγαλύτερος του 1, θα έχει έναν τουλάχιστον πρώτο διαιρέτη, έστω τον p_i με $1 \leq i \leq \nu$. Αλλά αν ο p_i διαιρεί τον A, επειδή διαιρεί και τον $p_1 p_2 \dots p_\nu$, θα πρέπει να διαιρεί και τον 1. Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί $p_i > 1$. ■

Ας δοκιμάσουμε … τι παρατηρούμε;

- 1+2*3 = 7 πρώτος
- 1+ 2*3*5=31πρώτος
- 1+ 2*3*5*7=211πρώτος
- 1+ 2*3*5*7*11=2311πρώτος
- 1+ 2*3*5*7*11* 13=30 031 σύνθετος
- 1+ 2*3*4*5*7*11* 13= 30031 = 59 * 509

Πρόταση

Να αποδειχτεί ότι αν ο αριθμός $2^\nu - 1$, $\nu \in \mathbb{N}^*$, είναι πρώτος, τότε και ο ν είναι πρώτος.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν ο *ν* δεν είναι πρώτος, τότε *ν=α,β* με *α,β* θετικούς ακέραιους και $\alpha,\beta>1$, οπότε έχουμε $2^\nu - 1 = 2^{\alpha\beta} - 1 = (2^\alpha)^\beta - 1$

Ο αριθμός αυτός, όμως, έχει ως παράγοντα τον $2^\alpha - 1$, για τον οποίο ισχύει $1 < 2^\alpha - 1 < 2^\nu - 1$.

Επομένως, ο $2^\nu - 1$ είναι σύνθετος που είναι άτοπο.

Είναι ο 1 πρώτος αριθμός;
Ιστορική διαμάχη

- Οι αρχαίοι Έλληνες δε θεωρούσαν τον 1 ούτε **ως αριθμό κι έτσι δε τον θεωρούσαν ούτε ως πρώτο.**
- Ωστόσο, στο 19ο αιώνα πολλοί μαθηματικοί **θεωρούσαν τον 1 ως πρώτο αριθμό.**
- Για παράδειγμα, η λίστα του Ντέρικ Νόρμαν Λέμερ που περιείχε πρώτους αριθμούς ως το 10.006.721 και εκδόθηκε μέχρι και το 1956, άρχιζε με τον **1 ως πρώτο αριθμό**.

Η εξαίρεση του 1 ως πρώτου αριθμού

- Ας θυμηθούμε το **Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής**: κάθε ακέραιος αριθμός μεγαλύτερος του 1 μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πρώτων κατά μοναδικό τρόπο, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η σειρά των παραγόντων.
- Η μοναδικότητα σε αυτό το θεώρημα προϋποθέτει την εξαίρεση του 1 ως πρώτου αριθμού επειδή ένας πρώτος μπορεί να περιέχει αυθαίρετα πολλές φορές το 1 σε κάθε γινόμενο.
  - Για παράδειγμα, ο αριθμός 15 μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως $3 \cdot 5$ ή $1 \cdot 3 \cdot 5$. **Αν ο 1 ήταν πρώτος**, τότε **αυτές οι δύο εκφράσεις θα παρίσταναν διαφορετικές παραγοντοποιήσεις του 15 σε πρώτους αριθμούς** κι έτσι το **θεώρημα θα έπρεπε να τροποποιηθεί**.

Εφαρμογές 1.3.2

Το μήνυμα του Arecibo. Είναι μια καλή ιδέα να χρησιμοποιήσουμε τους πρώτους αριθμούς ως βάση επικοινωνίας με εξωγήινους πολιτισμούς. Το παραπάνω μήνυμα είναι ένα σήμα το οποίο σχεδιάστηκε από τον ραδιοαστρόνομο Frank Drake και τον αστροφυσικό Carl Sagan το οποίο αποτελείται από 1679 bits και στάλθηκε με το ομώνυμο ραδιοτηλεσκόπιο στο διάστημα. Ο εξωγήινος πολιτισμός που θα το λάβει θα πρέπει να αναγνωρίσει ότι $1679 = 23 \times 73$ και να «ανάψει» τα bits θέτοντάς τα σε γραμμές και στήλες, οπότε θα σχηματιστεί μια εικόνα που θα περιέχει τους αριθμούς 1-10, ατομικούς αριθμούς των στοιχείων που σχηματίζουν το DNA, στοιχεία σχετικά με τα νουκλεοτίδια του DNA, το σχήμα της διπλής έλικας, τη μορφή ενός ανθρώπου και τον πληθυσμό της γης, όπως και σχεδιαγράμματα του ηλιακού συστήματος και του δίσκου του ραδιοτηλεσκοπίου.
Η ίδια ιδέα εμφανίζεται και στην ταινία «Επαφή», όπου ένα σήμα αναγνωρίζεται ως προϊόν εξωγήινης νοημοσύνης, αφού αποτελείται από ακολουθία πρώτων αριθμών

Πηγές και υλικά

- Σημειώσεις – Διαφάνειες μαθήματος
- Μελέτη μέσα από υλικά σε ιστοσελίδες
  - Βιβλίο Μαθηματικών Β’ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ **ΚΕΦ. 4.5 (ΘΕΩΡΙΑ, ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΕΣ ΑΠΟΔΕΊΞΕΙΣ)**

  http://ebooks.edu.gr/ebooks/v/html/8547/2754/Mathimatika-B-Lykeiou-ThSp_html-apli/index4_5.html
- Αναζήτηση πρώτων αριθμών

  https://primes.utm.edu/notes/by_year.html
  - Επέκταση μελέτης: Θεωρία Αριθμών (Αντωνιάδης και Κοντογιώργης))(Κεφάλαιο 1^{ο}) https://eclass.uoa.gr/modules/document/file.php/MATH443/NumberTheoryNov.pdf