Θεωρία αριθμών: Διαιρετότητα

ΧΡΥΣΑΥΓΗ ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΥ,
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΏΝ, ΕΚΠΑ

Η Θεωρία αριθμών, ως επιστημονικό πεδίο

- **Θεωρία Αριθμών** είναι ο κλάδος των Θεωρητικών μαθηματικών, που ασχολείται με τις ιδιότητες των ακεραίων αριθμών, καθώς και με προβλήματα που προκύπτουν από τη μελέτη αυτή.
- Ανάλογα από το είδος των προβλημάτων και από τις μεθόδους επίλυσής τους η Θεωρία Αριθμών χωρίζεται σε επιμέρους κλάδους.
  - Αλγεβρική Θεωρία Αριθμών, η Γεωμετρική Θεωρία Αριθμών, η Υπολογιστική Θεωρία Αριθμών κλπ.
- Βασικό αντικείμενο μελέτης της θεωρίας αριθμών είναι οι πρώτοι αριθμοί.
- Η θεωρία αριθμών βρίσκει ευρεία εφαρμογή στην Κρυπτογραφία.
  - Ο γνωστός και διακεκριμένος μαθηματικός Γκάους, ανέφερε ότι «*τα μαθηματικά είναι η βασίλισσα των επιστημών και η θεωρία αριθμών η βασίλισσα των μαθηματικών*».

Περιεχόμενο κεφ. ΘΕΩΡΙΑΣ ΑΡΙΘΜΩΝ

1. Διαιρετότητα
2. Πρώτοι αριθμοί
3. Μαθηματική επαγωγή

Θεωρία Αριθμών: ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

- α) το σύνολο των ακεραίων αριθμών και οι ιδιότητες του
- β) η διαιρετότητα – ορισμοί και ιδιότητες, κριτήρια διαιρετότητας, Ευκλείδεια διαίρεση
- γ) Μέγιστος κοινός διαιρέτης, ιδιότητες, ο αλγόριθμος του Ευκλείδη
- δ) πρώτοι αριθμοί και μέθοδοι υπολογισμού τους (απειρία των πρώτων αριθμών, κόσκινο του Ερατοσθένους, Θεμελιώδες θεώρημα της αριθμητικής)
- ε) η αρχή της μαθηματικής επαγωγής

ΔΙΑΡΕΤΟΤΗΤΑ

- Ευκλείδεια διαίρεση και Ευκλείδειος αλγόριθμος

Λίγα λόγια για τον Ευκλείδη

- Ο Ευκλείδης έζησε περίπου από το 330 έως το 275 π.Χ.
- Δίδαξε και πέθανε στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου, περίπου κατά την διάρκεια της περιόδου βασιλείας του Πτολεμαίου Α΄ (323 π.Χ. - 283 π.Χ.).
- Κατέχει μια σημαντική θέση στην ιστορία της Λογικής και των Μαθηματικών, καθώς είναι ο πρώτος που παράγει ένα αυστηρά δομημένο και συνεκτικό σύστημα προτάσεων (**θεωρημάτων και πορισμάτων)** με βάση ένα σύνολο **ορισμών** και 5 μόνο αρχικές αναπόδεικτες προτάσεις (**αιτήματα**).
- Ήταν ενεργό μέλος της βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας και πιθανόν να είχε σπουδάσει στην Ακαδημία του Πλάτωνα στην Αθήνα.
- Ο Ευκλείδης έγραψε συγγράμματα όπως τα «Οπτικά», «Κατοπτρικά», «Στοιχεία τής Μουσικής», «Κωνική τομή», «σφαιρική γεωμετρία», «Θεωρία αριθμών».
- Το πιο γνωστό του σύγγραμμα είναι τα «ΣΤΟΙΧΕΙΑ»

Τα ‘Στοιχεία’ του Ευκλείδη

- Το κυριότερο σύγγραμμα του Ευκλείδη ονομάζεται «Στοιχεία»,
- Υποδιαιρείται σε 13 βιβλία,
- Αποτελεί το σπουδαιότερο έργο των αρχαιοελληνικών Μαθηματικών.
- Σ' αυτό το σύγγραμμά του παρουσιάζει ο Ευκλείδης, με σύντομη και ακριβή μορφή μία συστηματική, απαγωγική -αξιωματική σύνοψη και προσαρμογή όλων των προευκλείδειων μαθηματικών γνώσεων, τις οποίες συμπλήρωσε με θεωρήματα δικά του και άλλα συγχρόνων του Μαθηματικών.
- Τα πρώτα **έξι βιβλία** καλύπτουν τη **Γεωμετρία του επιπέδου**, τα βιβλία **επτά μέχρι εννέα την Αριθμητική και τη Θεωρία Αριθμών**. Το **δέκατο βιβλίο αναφέρεται στους άρρητους** αριθμούς και τα **τρία τελευταία βιβλία στη Στερεομετρία.**

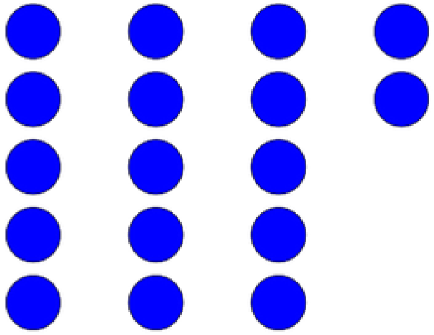
Σημ. το όνομα του Ευκλείδη συνδέεται με την **Ευκλείδεια διαίρεση** και με τον **Ευκλείδειο αλγόριθμο** που θα ασχοληθούμε σε αυτό το μάθημα.

- Ας θυμηθούμε τη διαιρετότητα στους φυσικούς αριθμούς (Μαθηματικά, Α’ Γυμνασίου)

Ευκλείδεια διαίρεση

- Όταν δοθούν δύο φυσικοί αριθμοί Δ και δ, τότε υπάρχουν δύο άλλοι φυσικοί αριθμοί π και υ, έτσι ώστε να ισχύει: $\boxed{\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon}$
- Ο αριθμός **Δ** λέγεται **διαιρετέος**, ο **δ** λέγεται **διαιρέτης**, ο αριθμός **π** ονομάζεται **πηλίκο** και το **υ υπόλοιπο** της διαίρεσης.
- Το υπόλοιπο είναι αριθμός πάντα μικρότερος του διαιρέτη: $\boxed{\upsilon < \delta}$

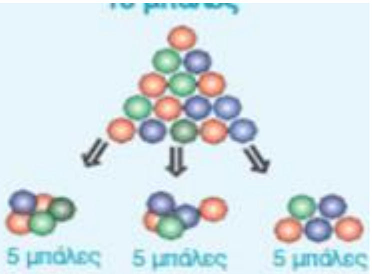
- Ποια είναι η ευκλείδεια διαίρεση που αναπαρίσταται;



- Απάντηση:
- 17 = 5*3+2

- Αν στην Ευκλείδεια διαίρεση το υπόλοιπο είναι ίσο με το μηδέν, τότε η διαίρεση ονομάζεται **τέλεια διαίρεση**

- Αν το υπόλοιπο υ είναι 0, τότε λέμε ότι έχουμε μία **Τέλεια Διαίρεση:** $\boxed{\Delta = \delta \cdot \pi}$
- Στους φυσικούς αριθμούς η **τέλεια διαίρεση** είναι πράξη **αντίστροφη του πολλαπλασιασμού**, όπως είναι και η **αφαίρεση** πράξη **αντίστροφη της πρόσθεσης**



- Ο διαιρέτης **δ** μιας διαίρεσης δεν μπορεί να είναι **0**. $\quad \delta \neq 0$
- Όταν **Δ = δ**, τότε το πηλίκο **π = 1** $\quad \alpha : \alpha = 1$
- Όταν ο διαιρέτης **δ = 1**, τότε το πηλίκο **π = Δ** $\quad \alpha : 1 = \alpha$
- Όταν ο διαιρετέος **Δ = 0**, τότε το πηλίκο **π = 0** $\quad 0 : \alpha = 0$

Ερωτήσεις/ ασκήσεις

1. Η σχέση: 78=7*8+22 . Προκύπτει από ευκλείδεια διαίρεση; **ΟΧΙ**
2. Η σχέση: 163=9*18+1 . Προκύπτει από ευκλείδεια διαίρεση; **ΝΑΙ**
   - Υπάρχει περίπτωση να υπάρχουν δύο απαντήσεις στο ερώτημα 3? **ΝΑΙ**
   - Μπορείτε να βρείτε έναν κανόνα;

Σημ. (* σημαίνει πράξη πολλαπλασιασμού)

Πολλαπλάσια και διαιρέτες φυσικών αριθμών

- **Πολλαπλάσια** ενός φυσικού αριθμού **α** είναι οι αριθμοί που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό του με όλους τους φυσικούς αριθμούς.

0, α, 2α, 3α, 4α, ...

  - **Κάθε φυσικός αριθμός διαιρεί τα πολλαπλάσιά του.**
  - **Κάθε φυσικός που διαιρείται από έναν άλλο είναι πολλαπλάσιό του.**
  - **Αν ένας φυσικός διαιρεί έναν άλλον θα διαιρεί και τα πολλαπλάσιά του.**

- Το μικρότερο ($\neq 0$) από τα κοινά πολλαπλάσια δύο ή περισσότερων αριθμών ($\neq 0$) το ονομάζουμε **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)** των αριθμών αυτών
- **Διαιρέτες** ενός φυσικού αριθμού **α** λέγονται όλοι οι αριθμοί που τον διαιρούν.
  - **Κάθε αριθμός α έχει διαιρέτες του αριθμούς 1 και α.**
- Ένας αριθμός, εκτός από το 1, που έχει διαιρέτες μόνο τον **εαυτό του** και το **1** λέγεται **πρώτος αριθμός**, διαφορετικά λέγεται **σύνθετος**.
- Δύο φυσικοί αριθμοί **α** και **β** μπορεί να έχουν κοινούς διαιρέτες. Ο μεγαλύτερος από αυτούς ονομάζεται **Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης** (ΜΚΔ) των **α** και **β** και συμβολίζεται **ΜΚΔ(α, β).**
- Δύο αριθμοί **α** και **β** λέγονται **πρώτοι μεταξύ τους** αν είναι **ΜΚΔ(α, β) = 1.**

Τα κριτήρια διαιρετότητας

Κριτήρια Διαιρετότητας

- **Κριτήρια Διαιρετότητας** με **2, 3, 4, 5, 9, 10** ή **25** λέγονται οι κανόνες με τους οποίους μπορούμε να συμπεραίνουμε, χωρίς να κάνουμε τη διαίρεση, αν ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με τους αριθμούς αυτούς.
  - Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με **10** αν λήγει σε **ένα μηδενικό.**
  - Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **2**, αν το τελευταίο ψηφίο είναι 0, 2, 4, 6, 8.
  - Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **5**, αν λήγει σε **0** ή **5**.
  - Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **3** ή το **9**, αν το **άθροισμα των ψηφίων του** διαιρείται με το **3** ή το **9** αντίστοιχα.
  - Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται συγχρόνως με το **4** ή και το **25**, αν τα **δύο τελευταία ψηφία του** είναι μηδέν.

Ασκήσεις

- Να αποδείξετε ότι το άθροισμα τριών διαδοχικών φυσικών αριθμών είναι πολλαπλάσιο του τρία.

Απ. $\nu+\nu+1+\nu+2=3\nu+3=3(\nu+1)$

- Αν 5\α+7 (ονομάζεται το 5 διαιρεί το (α+7) και 5\β-2 τότε α+β=πολ5.

- Η διαιρετότητα στο σύνολο **των ακεραίων αριθμών**

Το σύνολο των ακεραίων αριθμών

Η (στοιχειώδης) Θεωρία Αριθμών ασχολείται κυρίως με τη μελέτη των ιδιοτήτων του συνόλου των *ακέραιων αριθμών*

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$$

Η Ευκλείδεια διαίρεση στο σύνολο των ακεραίων

- *Αν α, β ακέραιοι αριθμοί και β διαφορετικό του μηδενός, τότε υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι q, r τέτοιοι ώστε*

a = bq + r

Όπου το υπόλοιπο r θα είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός και μικρότερο της απόλυτης τιμής του διαιρέτη ή συμβολικά

$$a = bq + r \ \kappa\alpha\iota\ 0 \leq r < |b|.$$

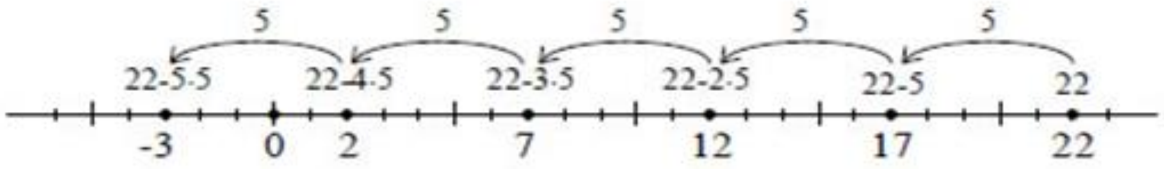
- Γεωμετρική αναπαράσταση της Ευκλείδειας Διαίρεσης στο σύνολο των ακεραίων

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να βρούμε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του 22 με τον 5. Σύμφωνα με το γνωστό αλγόριθμο της διαίρεσης, το πηλίκο θα είναι ένας ακέραιος κ, τέτοιος, ώστε:

$$0 \leq 22 - \kappa \cdot 5 < 5 .$$

Για να βρούμε, λοιπόν, το κ, σχηματίζουμε τις διαφορές:

$$22-5,\quad 22-2\cdot 5,\quad 22-3\cdot 5,\quad 22-4\cdot 5,\quad 22-5\cdot 5,\quad 22-6\cdot 5 \quad \text{κτλ.}$$



Παρατηρούμε ότι αφού οι αριθμοί αυτοί συνεχώς μειώνονται, από ένα σημείο και μετά θα είναι όλοι αρνητικοί. Ο μικρότερος μη αρνητικός ακέραιος από τους παραπάνω αριθμούς, ο οποίος είναι μικρότερος του 5, είναι ο $22 - 4\cdot 5 = 2$. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι το πηλίκο της διαίρεσης του 22 με τον 5 είναι 4 και το υπόλοιπο 2 και έχουμε:

$$22 = 4 \cdot 5 + 2,\ 0 \leq 2 < 5 .$$

Ευκλείδεια διαίρεση στο σύνολο των ακεραίων

- Θα μπορούσε να γραφεί η Ευκλείδεια διαίρεση των αριθμών: $a = -59$ και $b = 9$ ή -59: 9; αν ναι, ποια είναι τα q και r και σε ποια μορφή θα γραφεί η Ευκλείδεια διαίρεση;

- *Απάντηση: 59=6*9+5*
- *Άρα -59= -6*9 – 5= -6*9 +9 –9 -5 = -9(6+1)+9-5=-9*7+4*

- *Άρα* -59 = 9*(-7)+4 και $q = -7$ και $r = 4$

Η ευκλείδεια διαίρεση στο σύνολο των ακεραίων αριθμών

Ας δούμε με παραδείγματα πώς εργαζόμαστε στις διάφορες περιπτώσεις, για να βρούμε το πηλίκο και το υπόλοιπο μιας ευκλείδειας διαίρεσης.

• Έστω λοιπόν $\alpha = -92$ με τον $\beta = 5$. Από τη διαίρεση του 92 με τον 5 έχουμε $92 = 5 \cdot 18 + 2$ και επομένως,

$$\begin{aligned} -92 &= -5 \cdot 18 - 2 \\ &= -5 \cdot 18 - 5 + 5 - 2 \\ &= -5 \cdot 19 + 3 \\ &= 5(-19) + 3 . \end{aligned}$$

Άρα, $-92 = 5 \cdot (-19) + 3$, με $0 \leq 3 < 5$, που σημαίνει ότι το πηλίκο της διαίρεσης του -92 με τον 5 είναι -19 και το υπόλοιπο είναι 3.

Άσκηση

- Να γραφεί η Ευκλείδεια διαίρεση των αριθμών -62 και 8

  - Απάντηση: -62=-8*7-6= -8*7-8+8-6= -8(7+1)+8-6= -64+2=-62
  - Δ:-62, δ:8, π: -8, υ: 2

- **Να γραφεί η Ευκλείδεια διαίρεση των αριθμών -102 και 5**

Ο Ευκλείδειος αλγόριθμος*

- Αν a, b ακέραιοι με b διαφορετικό του μηδενός. Τότε υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι qι, q2, …., r1, r2, … ώστε

$$
\begin{array}{ll}
b = q_1 a + r_1, & 0 < r_1 < a \\
a = q_2 r_1 + r_2, & 0 < r_2 < r_1 \\
r_1 = q_3 r_2 + r_3, & 0 < r_3 < r_2 \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n, & 0 < r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} = q_{n+1} r_n. &
\end{array}
$$

***rn είναι <u>το τελευταίο μη μηδενικό υπόλοιπο</u> των διαδοχικών διαιρέσεων**

***Αλγόριθμος** είναι μια πεπερασμένη σειρά ενεργειών, αυστηρά καθορισμένων και εκτελέσιμων σε πεπερασμένο χρόνο, που στοχεύουν στην επίλυση ενός προβλήματος.

- Ο ευκλείδειος αλγόριθμος είναι ο ‘παππούς’ όλων των αλγορίθμων, αφού είναι ο αρχαιότερος αλγόριθμος που χρησιμοποιείται ακόμα και σήμερα
- Χρησιμοποιείται **για την εύρεση του ΜΚΔ* μεταξύ δύο αριθμών**.

- ***Ο μέγιστος κοινός διαιρέτης ΜΚΔ** είναι ο μεγαλύτερος φυσικός αριθμός που διαιρεί τόσο τον *a* οσο και τον *b* χωρίς να αφήνει υπόλοιπο.

Ο Ευκλείδειος αλγόριθμος, αποδεικνύεται από τον ίδιο τον Ευκλείδη στο έβδομο βιβλίο των «Στοιχείων» του.

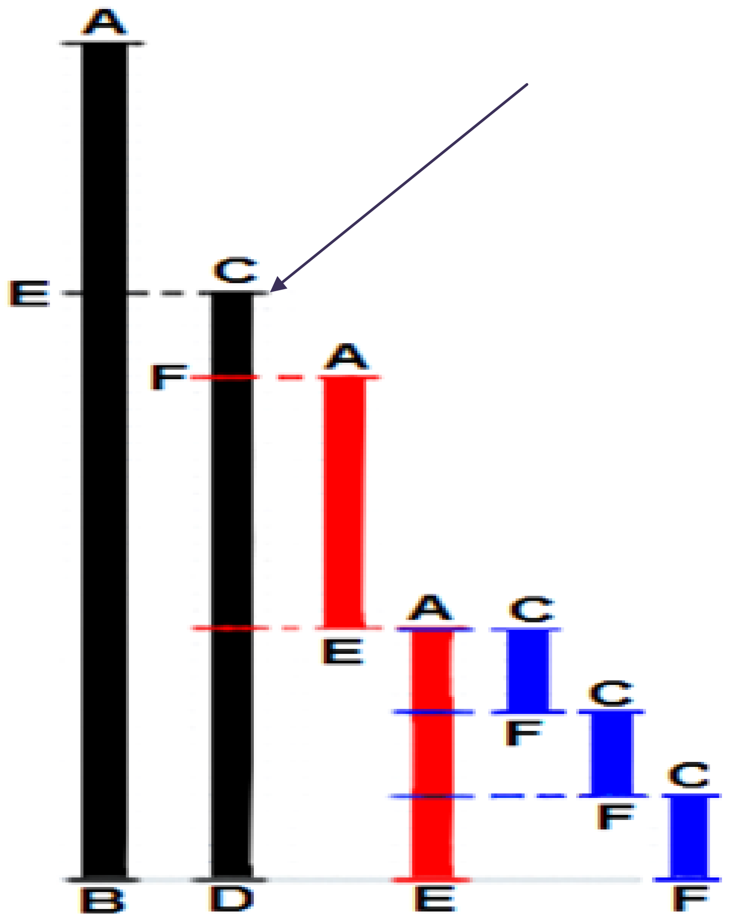
Γεωμετρική αναπαράσταση του Ευκλείδειου αλγόριθμου

Μέθοδος του Ευκλείδη για την εύρεση του μέγιστου κοινού διαιρέτη (ΜΚΔ) των δύο αρχικών μηκών BA και DC, και για τα δύο ορίζεται να είναι τα πολλαπλάσια μιας κοινής «μονάδας» μήκους.

Το γεγονός ότι μικραίνει το μήκος DC, χρησιμοποιείται για να "μετρήσει" το BA, αλλά μόνο μια φορά, επειδή το υπόλοιπο EA είναι μικρότερο από το CD.

Το EA μετρά πλέον (δύο φορές), το μικρότερο μήκος DC, με την υπόλοιπη ομάδα FC μικρότερη από EA. Στη συνέχεια το FC είναι (τρεις φορές) το μήκος EA .

Επειδή δεν υπάρχει υπόλοιπο, η διαδικασία τελειώνει με το μήκος FC να είναι ο ΜΚΔ



Παράδειγμα εύρεσης του ΜΚΔ χρησιμοποιώντας τον Ευκλείδειο αλγόριθμο

- Να βρεθεί ο ΜΚΔ των αριθμών 72, 46 ή **ΜΚΔ(72, 46);**
- ΑΠΑΝΤΗΣΗ

72=1*46+26

46=1*26+20

26=1*20+6

20=3*6+**2**

6=2*3+0

$$
\begin{array}{ll}
b = q_1 a + r_1, & 0 < r_1 < a \\
a = q_2 r_1 + r_2, & 0 < r_2 < r_1 \\
r_1 = q_3 r_2 + r_3, & 0 < r_3 < r_2 \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n, & 0 < r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} = q_{n+1} r_n. &
\end{array}
$$

Αρα ο ΜΚΔ **είναι ο 2 (το τελευταίο μη μηδενικό υπόλοιπο των διαιρέσεων)**

Άσκηση στον Ευκλείδειο αλγόριθμο

- Να υπολογιστεί με τη βοήθεια του Ευκλείδειου αλγόριθμου ο ΜΚΔ των αριθμών 112 και 78

Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Αν οι a, b και οι δύο δεν είναι 0, τότε το μικρότερο από τα κοινά θετικά πολλαπλάσιά τους ονομάζεται* **ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο** *των a, b και συμβολίζεται*

$$[a, b].$$

Εύρεση του ΕΚΠ

1. *Δύο πλοία επισκέπτονται ένα νησάκι. Το πρώτο ανά 3 ημέρες, το δεύτερο ανά 4 ήμερες. Αν ξεκίνησαν απο το νησάκι ταυτόχρονα, σε πόσες ημέρες θα ξαναβρεθούν στο λιμάνι του νησιού;*

Μικροπείραμα

Λύση

Βρίσκουμε τα πολλαπλάσια των αριθμών 3 και 4.

Πολλαπλάσια του 3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	...
Πολλαπλάσια του 4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	...

Οι αριθμοί **12, 24, 36, ...** είναι κοινά πολλαπλάσια των αριθμών **3** και **4**. Επειδή, το μικρότερο ($\neq 0$) από τα κοινά πολλαπλάσια είναι το **12**, γράφουμε: *ΕΚΠ(3, 4) = 12*. Δηλαδή, ακριβώς μετά από 12 ημέρες θα ξαναβρεθούν τα δύο πλοία στο λιμάνι του νησιού και αυτό θα επαναλαμβάνεται κάθε 12 ημέρες.

http://ebooks.edu.gr/ebooks/v/html/8547/2748/Mathimatika_A Gymnasiou_html-empl/indexA1_5.html

Εύρεση του ΜΚΔ και του ΕΚΠ με την ανάλυση των αριθμών σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

2. *Να αναλυθούν οι αριθμοί 2520, 2940, 3780 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Με τη βοήθεια αυτής της ανάλυσης να βρεθεί ο ΜΚΔ και το ΕΚΠ αυτών των αριθμών.*

Λύση Αναλύουμε τους αριθμούς σε γινόμενα πρώτων παραγόντων και παίρνουμε μόνο τους κοινούς παράγοντες με το μικρότερο εκθέτη για το ΜΚΔ και τους κοινούς και μη κοινούς παράγοντες με το μεγαλύτερο εκθέτη για το ΕΚΠ.

2520	2	διαιρώ με το 2
1260	2	»
630	2	»
315	3	διαιρώ με το 3
105	3	»
35	5	διαιρώ με το 5
7	7	διαιρώ με το 7
1		

2940	2	διαιρώ με το 2
1470	2	»
735	3	διαιρώ με το 3
245	5	διαιρώ με το 5
49	7	διαιρώ με το 7
7	7	»
1		

3780	2	διαιρώ με το 2
1890	2	»
945	3	διαιρώ με το 3
315	3	»
105	3	»
35	5	διαιρώ με το 5
7	7	διαιρώ με το 7
1		

$2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ $\quad 2940 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2$ $\quad 3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$

ΜΚΔ(2520, 2940, 3780) $= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$ και ΕΚΠ(2520, 2940, 3780) $= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 = 52920$

Τρόποι υπολογισμοί του ΜΚΔ

- Με τον ορισμό (*υπολογίζοντας όλους τους διαιρέτες και βρίσκοντας τους κοινούς και μετά τον μεγαλύτερο*)
- Με ανάλυση των αριθμών σε γινόμενο πρώτων παραγόντων
- Με τον Ευκλείδειο αλγόριθμο

Ασκήσεις

- Υπολογίστε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των αριθμών α) 111 και 78 με τρεις τρόπους
- Βρες το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 25, 15, 30 με δύο τρόπους

- **Η διαιρετότητα στο σύνολο των ακεραίων, ορισμοί και αποδείξεις**

Διαιρετότητα: Ορισμός

1.2 Διαιρετότητα

Το σύνολο των ακέραιων είναι εφοδιασμένο με δύο πράξεις, πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού. Το άθροισμα, η διαφορά και το γινόμενο δύο ακέραιων είναι πάντα ακέραιος αριθμός. Το πηλίκο τους όμως *δεν* είναι πάντοτε ακέραιος. Δεν υπάρχει ακέραιος αριθμός a τέτοιος ώστε να ισχύει $2a = 1$, ενώ υπάρχει ακέραιος αριθμός b τέτοιος ώστε $2b = -4$.

Εντελώς φυσιολογικός επομένως είναι ο ακόλουθος ορισμός:

Ορισμός 1.2.1. Δίνονται δύο ακέραιοι αριθμοί a, b με $b \neq 0$. Θα λέμε ότι *ο b διαιρεί τον a* όταν υπάρχει ακέραιος c τέτοιος ώστε $a = b \cdot c$.

Ισοδύναμα χρησιμοποιούνται και οι εκφράσεις «ο b είναι ένας διαιρέτης του a», «ο a είναι (ένα) πολλαπλάσιο του b», «ο a είναι διαιρετός από τον b». Αν ο b διαιρεί τον a γράφουμε $b|a$, αν όχι γράφουμε $b \nmid a$.

Διαιρετότητα: συμβολικές εκφράσεις

Ισοδύναμα χρησιμοποιούνται και οι εκφράσεις «ο b είναι ένας διαιρέτης του a», «ο a είναι (ένα) πολλαπλάσιο του b», «ο a είναι διαιρετός από τον b». Αν ο b διαιρεί τον a γράφουμε $b|a$, αν όχι γράφουμε $b \nmid a$.

- Αναφέρατε διαφορετικές εκφράσεις και συμβολισμούς της διαίρεσης δύο ακέραιων αριθμών
- Ο ακέραιος αριθμός β διαιρεί τον α ή ο α διαιρείται από τον β
  - β\α
  - α:β
  - α=β*λ

Ιδιότητες της διαιρετότητας

Πρόταση 1.2.2. *Στα παρακάτω τα a, b, c είναι ακέραιοι.*

1. *Για κάθε ακέραιο a, $a \neq 0$, ισχύει $a|0$ και $a|a$, δηλαδή ο a διαιρεί το μηδέν και τον εαυτό του.*
2. *Για κάθε ακέραιο a ισχύει $1|a$, δηλαδή ο 1 διαιρεί κάθε ακέραιο.*
3. *Αν $c|b$ και $b|a$, τότε και $c|a$.*
4. *Αν $c|a$ και $c|b$, τότε και $c|ka + lb$ για οποιουσδήποτε ακέραιους k, l.*
5. *Αν $b|a$ τότε και $bk|ak$ για οποιωνδήποτε ακέραιο $k \neq 0$. Αντιστρόφως, αν $bk|ak$ τότε και $b|a$ (Παρατηρήστε ότι $k \neq 0$ αφού δεν έχουμε ορίσει το $0 \mid 0$).*
6. *Αν $b|a$ και $a \neq 0$, τότε $|b| \leq |a|$.*
7. *Αν $b|a$ και $a|b$, τότε $a = \pm b$.*
8. *Αν $b|a$ και $a \neq 0$, τότε και $(a/b)|a$.*
9. *Αν $b_1|a_1$ και $b_2|a_2$, τότε και $b_1 b_2|a_1 a_2$.*

Αποδείξεις

Απόδειξη. Έχουμε:

1. $0 = a \cdot 0$ και $a = 1 \cdot a$
2. $a = 1 \cdot a$
3. $b = c \cdot k$ και $a = b \cdot l$, άρα $a = c(k \cdot l)$
4. $a = c\,a'$, $b = c\,b'$, οπότε $k\,a + l\,b = c(k\,a' + l\,b')$
5. $a\,k = (b\,k) \cdot c = (b\,c)\,k$, άρα $(a - b\,c)\,k = 0$ οπότε και $a = b\,c$, αφού $k \neq 0$
6. $a = b \cdot c$, άρα $|a| = |b| \cdot |c|$ $c \neq 0$, αφού $a \neq 0$. Επομένως $|b| \leq |a|$.
7. Από τον ορισμό της διαιρετότητας έπεται ότι $a \neq 0$ και $b \neq 0$. Λόγω της 6, $|b| \leq |a|$ και $|a| \leq |b|$.

   Συνεπώς $|a| = |b|$, δηλαδή $a = \pm b$.
8. $a = bc$. Επειδή $a \neq 0$ έπεται ότι και $c \neq 0$, άρα $c|a$.
9. $a_1 = b_1c_1$ και $a_2 = b_2c_2$, άρα $a_1a_2 = (b_1b_2)(c_1c_2)$.

2. Να αποδειχτεί ότι:

(i) Το γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων είναι άρτιος αριθμός.

(ii) Το τετράγωνο κάθε περιττού ακεραίου είναι της μορφής $8\lambda+1$, $\lambda \in \mathbf{Z}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

(i) Έστω δύο διαδοχικοί ακέραιοι α, $\alpha+1$.

• Αν ο α είναι άρτιος, δηλαδή $\alpha = 2\kappa$, $\kappa \in \mathbf{Z}$, τότε

$$\alpha(\alpha+1) = 2 \cdot \underbrace{\kappa(2\kappa+1)}_{\lambda} = 2\lambda \text{ , άρτιος.}$$

• Αν ο α είναι περιττός, δηλαδή $\alpha = 2\kappa+1$, $\kappa \in \mathbf{Z}$, τότε

$$\alpha(\alpha+1) = (2\kappa+1)(2\kappa+2) = 2 \cdot \underbrace{(2\kappa+1)(\kappa+1)}_{\lambda} = 2\lambda \text{ , άρτιος.}$$

(ii) Έστω ο περιττός $\alpha = 2\kappa+1$, $\kappa \in \mathbf{Z}$. Τότε έχουμε

$$\alpha^2 = (2\kappa+1)^2 = 4\kappa^2 + 4\kappa + 1 = 4\underbrace{\kappa(\kappa+1)}_{2\lambda} + 1 = 4 \cdot 2\lambda + 1 = 8\lambda + 1 , \ \lambda \in \mathbf{Z} .$$

Πηγές και υλικά

- Σημειώσεις – Διαφάνειες μαθήματος
- Μελέτη σχολικών βιβλίων
  - Βιβλίο Μαθηματικών Α' Γυμνασίου **(Α1.4, Α1.5)**
  - Βιβλίο Μαθηματικών Β' Λυκείου Κατεύθυνσης (**4.2)**

(http://ebooks.edu.gr/ebooks/v/html/8547/2754/Mathimatika-B-Lykeiou-ThSp_html-apli/)

  - **ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΜΕΛΕΤΗΣ**: Θεωρία Αριθμών (Αντωνιάδης και Κοντογιώργης)**(Κεφάλαιο 1ο)** https://eclass.uoa.gr/modules/document/file.php/MATH443/NumberTheoryNov.pdf