Ακολουθίες-Εισαγωγή στις συναρτήσεις

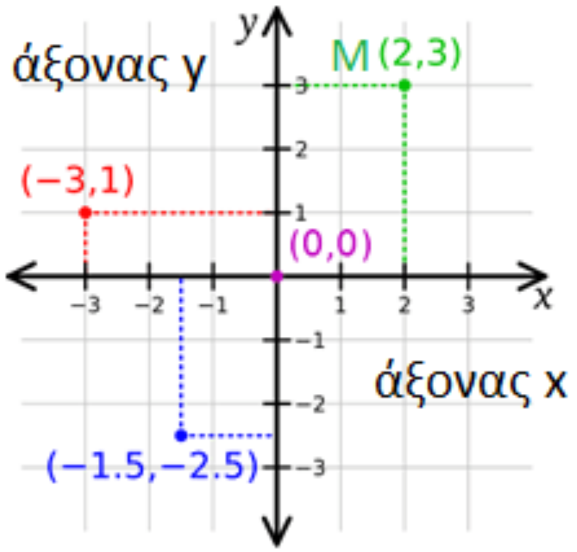
Το **καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων** είναι ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιείται για να προσδιορίσει ένα σημείο στο επίπεδο (2-διδιάστατο χώρο) ή στο χώρο (3-διάστατο χώρο). Οφείλει το όνομά του στον Καρτέσιο (*Descartes*) που το εισήγαγε.

Καρτέσιος (1596-1650)
Γάλλος φιλόσοφος, μαθηματικός και επιστήμονας φυσικών επιστημών.

ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο 2-διάστατο χώρο

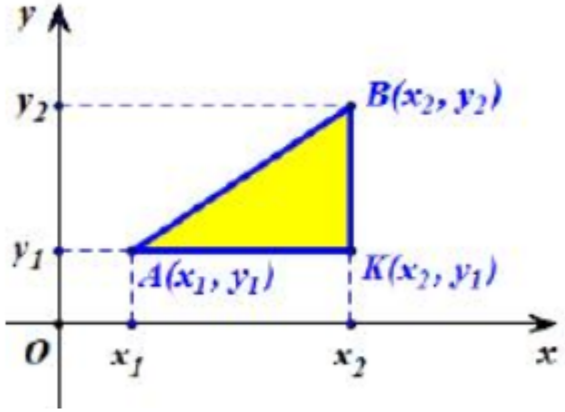
- Το 2-διάστατο σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της θέσης σημείων στο επίπεδο (σε μία επίπεδη επιφάνεια).
  - αποτελείται από δύο **προσανατολισμένες ευθείες, κάθετες μεταξύ τους**, οι οποίες καλούνται συμβατικά **άξονας τετμημένων** (οριζόντιος άξονας) και **άξονας τεταγμένων** (κατακόρυφος άξονας) και συμβολίζονται αντίστοιχα με *x* και *y*.
  - Το σημείο όπου τέμνονται οι δύο άξονες λέγεται **αρχή του συστήματος συντεταγμένων**.



Ένα σημείο πάνω στο καρτεσιανό επίπεδο προσδιορίζεται μοναδικά από ένα ζεύγος αριθμών**, την τετμημένη** και **την τεταγμένη**. Η τετμημένη αναφέρεται στον άξονα x και ταυτόχρονα είναι η απόσταση του σημείου από τον άξονα y ενώ η **τεταγμένη αναφέρεται στον άξονα y αλλά είναι η απόσταση του σημείου από τον άξονα x**. Η τετμημένη και η τεταγμένη αποτελούν **τις *συντεταγμένες* του σημείου**.

Απόσταση 2 σημείων στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων

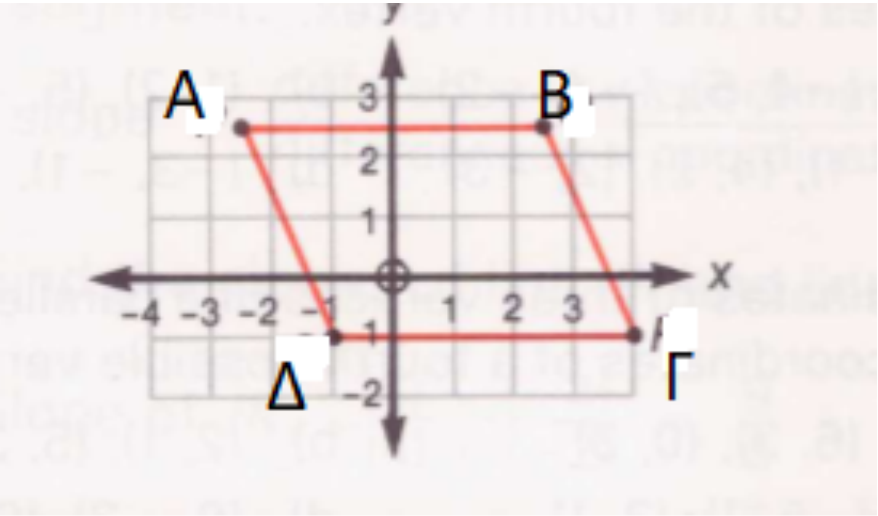
- Η απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, συμβολίζεται (AB), ισούται με



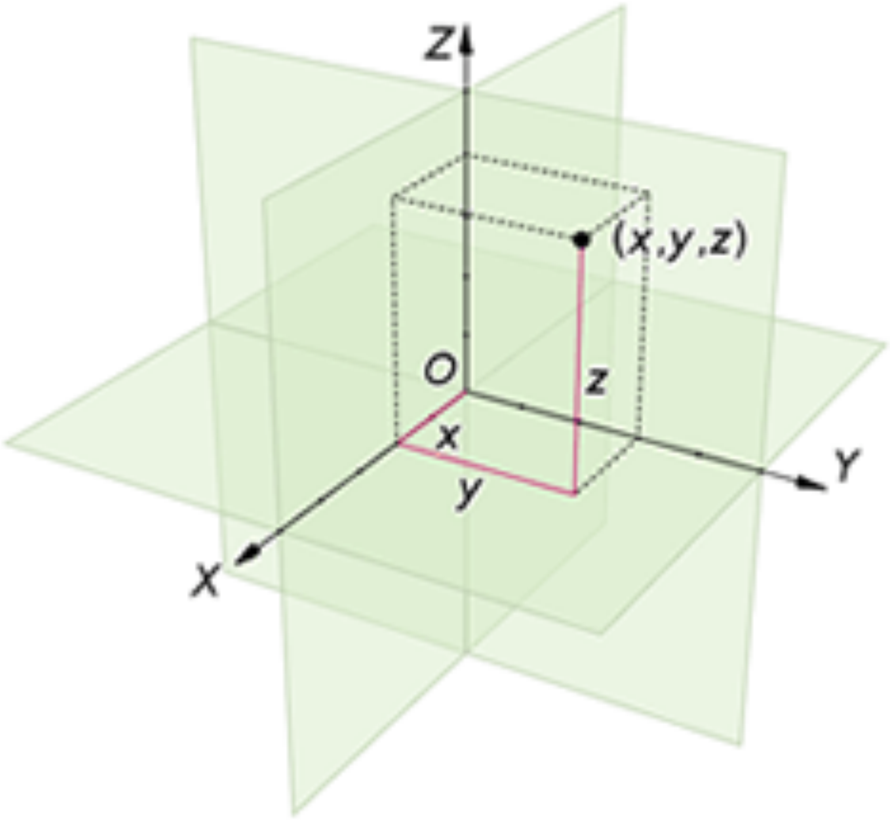
$$(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\,.$$

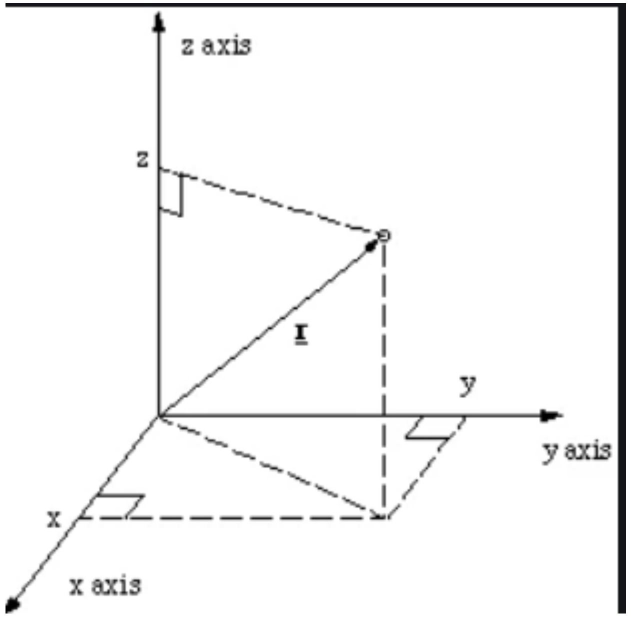
Σχεδιασμός σχήματος στο σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων

- Σχεδίασε σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων τα σημεία A(-2,5 , 2.5), B(2.5, 2.5), Γ(4, -1) και Δ(-1, -1).
- Ένωσε τα σημεία ως εξής:
  - A με B, B με Γ, Γ με Δ και Δ με A.
- Ανέφερε και αιτιολόγησε τι σχήμα προκύπτει.



Το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο 3-διάστατο χώρο





ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

- Έστω η επόμενη παράθεση αριθμών:

7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, ……..

Υπάρχουν **άπειροι** αριθμοί που διαδέχονται ο ένας τον άλλο, με κάποια λογική σειρά.

Μπορείτε να βρείτε τον επόμενο αριθμό;

Μπορείτε να βρείτε τον $10^{ο}$ όρο;

Μπορείτε να βρείτε τον ν-οστό (n-οστό) όρο της παραπάνω παράθεσης αριθμών;

Ορισμός

Ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι μια αντιστοιχία του συνόλου των φυσικών αριθμών 1,2,3,….. στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Δηλαδή, σε κάθε φυσικό αριθμό αντιστοιχούμε έναν πραγματικό αριθμό.

Μια ακολουθία τη συμβολίζουμε με ένα γράμμα π.χ. α και την αντιστοιχία από το σύνολο των φυσικών αριθμών N στο σύνολο των πραγματικών αριθμών R $\alpha: N \rightarrow R$

Τρόποι συμβολικής γραφής ακολουθίας (1/2)

- **Α) γραφή του n-οστού όρου**

Κάθε όρος της ακολουθίας ορίζεται από δύο στοιχεία: Την ακολουθία στην οποία ανήκει και τη θέση που καταλαμβάνει στην ακολουθία αυτή.

- Παράδειγμα ακολουθίας: Έστω $\boldsymbol{\alpha}$ η ακολουθία 1, 1/2, 1/3,¼, …
  - ο 1ος όρος (το 1) θα συμβολίζεται με $\boldsymbol{\alpha_1}$, ο 2ος (το 1/2) με $\boldsymbol{\alpha_2}$, ο 3ος (το 1/3) με $\boldsymbol{\alpha_3}$ κ.ο.κ.
  - Ο αριθμός που δηλώνει τη θέση του όρου μέσα σε μια ακολουθία λέγεται **δείκτης**.
  - Έτσι υιοθετούμε ένα σύμβολο (συνήθως το ***n***) για να παραστήσουμε τον **γενικό δείκτη**.
  - **Ο γενικός ή n-στός όρος της ακολουθίας *α* είναι ο $\boldsymbol{\alpha_n}$.**

    Άρα α_n = 1/n

Τρόποι συμβολικής γραφής ακολουθίας (2/2)

- *Β) αναδρομικός τύπος*
  - Παράδειγμα: Έστω η ακολουθία **1, 4, 13, 40, 121, 364, ……..,**
    - **Ποιος είναι ο κανόνας που αναγνωρίζετε στην παραπάνω παράθεση των αριθμών;**
    - ***Απ.*** *κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενο αν τον πολλαπλασιάσουμε επί 3 και στη συνέχεια προσθέσουμε το 1.*
  - Συμβολικά αυτό αντιστοιχεί στη σχέση $\boldsymbol{\alpha_{n+1} = 3\alpha_n + 1}$ ***με αρχική*** **συνθήκη** $\alpha_1 = 1$
  - Ερώτηση: αν ο $\alpha_1 = 2$, θεωρείται ότι θα αλλάξει η ακολουθία;

Υπάρχουν ακολουθίες …

- … για τις οποίες δεν γνωρίζουμε **ούτε έναν τύπο για το γενικό τους όρο ούτε έναν αναδρομικό τύπο**.
  - Παράδειγμα: **η ακολουθία των πρώτων αριθμών** *(δηλ. αριθμών που διαιρούνται μόνο με τον εαυτό τους και τη μονάδα)*

2, 3, 5, 7, 11, 13,…

Ειδικές περιπτώσεις ακολουθιών: Αριθμητική πρόοδος

Μια ακολουθία λέγεται **αριθμητική πρόοδος**, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού.

Τον αριθμό αυτό τον συμβολίζουμε με ω και τον λέμε **διαφορά της προόδου.**

Επομένως, η ακολουθία (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega \qquad \text{ή} \qquad \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \omega$$

Αν σε μια αριθμητική πρόοδο γνωρίζουμε τον πρώτο όρο της α_1 και τη διαφορά της ω τότε ο αναδρομικός της τύπος $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega$ μας επιτρέπει να βρούμε με διαδοχικά βήματα τον οποιονδήποτε όρο της.

Ο $\nu^{\text{ος}}$ όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega.$$

Παραδείγματα αριθμητικών προόδων

- 2, 4, 6, 8, 10, ……

 $\alpha_1=2$, $\omega=2$

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 2+2(\nu-1) = 2+2\nu-2 = 2\nu$

- 5, 9, 13, 17, ……

$\alpha_1=5$, $\omega=4$

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 5+4(\nu-1) = 5+4\nu-4 = 4\nu+1$

Ειδικές περιπτώσεις ακολουθιών: Γεωμετρική πρόοδος

Μια ακολουθία λέγεται **γεωμετρική πρόοδος**, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο με πολλαπλασιασμό επί τον ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό.

Τον αριθμό αυτό τον συμβολίζουμε με λ και τον λέμε **λόγο της προόδου**. Σε μια γεωμετρική πρόοδο (α_ν) υποθέτουμε πάντα ότι $\alpha_1 \neq 0$, οπότε, αφού είναι και $\lambda \neq 0$, ισχύει $\alpha_\nu \neq 0$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$. Επομένως, η ακολουθία (α_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο λ, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \cdot \lambda \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \lambda$$

Ο $\nu^{\text{ος}}$ όρος μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ είναι

$$\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$$

Παραδείγματα γεωμετρικών προόδων

- 2, 4, 8, 16, ………

  $\alpha_1=2 \quad \lambda=2$

  $\alpha_\nu = \alpha_1 . \lambda^{\nu-1} = 2.2^{\nu-1} = 2^\nu$

- 1, ½, ¼, ……

$\alpha_1=1 \quad \lambda=1/2$

$\alpha_\nu = \alpha_1 . \lambda^{\nu-1} = 1.(1/2)^{\nu-1} = 1/2^{\nu-1}$

Γραφική παράσταση ακολουθίας

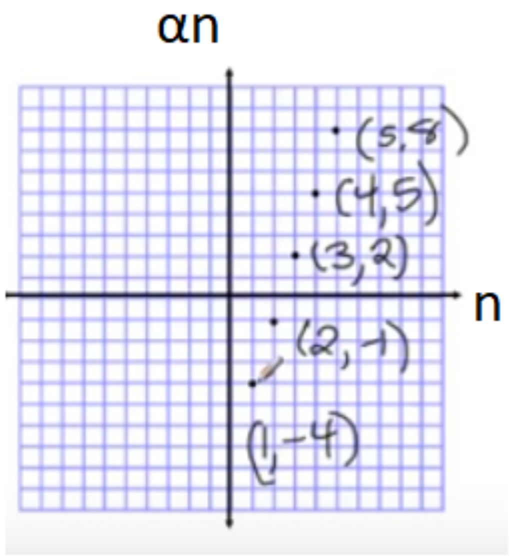
- Δίνεται η ακολουθία -4, -1, 2, 5, 8, 11 …

- Τι είδους ακολουθία είναι;
- Μπορείτε να την παραστήσετε συμβολικά;

$\alpha_n = -4+(n-1)(+3)$

$\alpha_n = -4+3(n-1) = -7+3n$

- Μπορείτε να την παραστήσετε γραφικά σε ένα σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων;
- Τι παρατηρείτε;



Εισαγωγή
στις συναρτήσεις

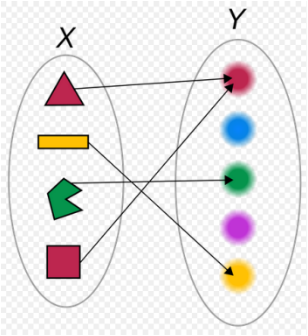
Η έννοια της συνάρτησης

- Η έννοια της συνάρτησης είναι μια από τις σημαντικότερες μαθηματικές έννοιες. Συνδέεται με το ενδιαφέρον δημιουργίας συσχέτισης μεταξύ ποσοτήτων.
- Καθοριστικό ρόλο στην διαμόρφωση της έννοιας αποτέλεσε η συστηματική μαθηματικοποίηση των φυσικών φαινομένων που ξεκίνησε τον 16^{o} αιώνα.

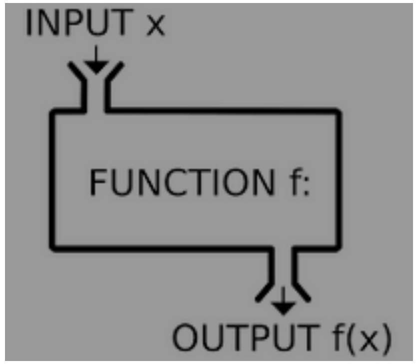
Στα μαθηματικά & τις φυσικές επιστήμες

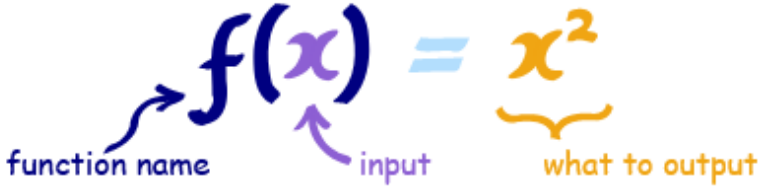
- Η αναζήτηση ενός μαθηματικού μοντέλου που να περιγράφει μια συναρτησιακή σχέση ανάμεσα σε δύο μεταβλητές απασχόλησε τους επιστήμονες στους τελευταίους αιώνες
- Μερικά παραδείγματα
  - οι εξισώσεις ελεύθερης πτώσης σώματος: $U(t)=g\,t$, $S(t)=1/2\,g\,t^2$ (Γαλιλαίος, 17ος αιώνας)
  - Ο νόμος του Boyle: Ο όγκος ενός αερίου είναι αντιστρόφως ανάλογος της πίεσης αυτού, σε σταθερή θερμοκρασία ή $P=\kappa/V$, όπου κ σταθερά (Robert Boyle, 17ος αιώνας)

Η συνάρτηση στα μαθηματικά Συμβολική αναπαράσταση



- Συνάρτηση ονομάζεται η αλληλεξάρτηση (ή η σχέση) δυο μεταβλητών έτσι ώστε για κάθε τιμή της μιας μεταβλητής (ανεξάρτητη μεταβλητή) να προκύπτει μια μοναδική αντίστοιχη τιμή για την άλλη μεταβλητή (εξαρτημένη μεταβλητή).



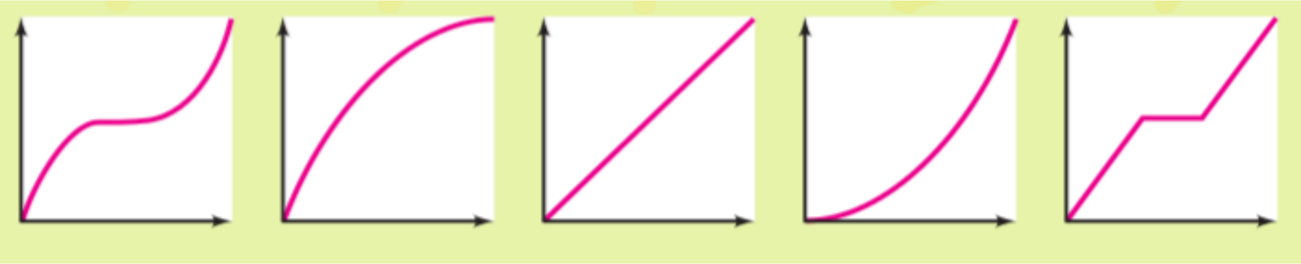


Διαβάζουμε "f του x είναι ίσο με το x στο τετράγωνο"

Αποκωδικοποιώντας τις ‘ιστορίες’ που περιγράφονται σε γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων (1/3)

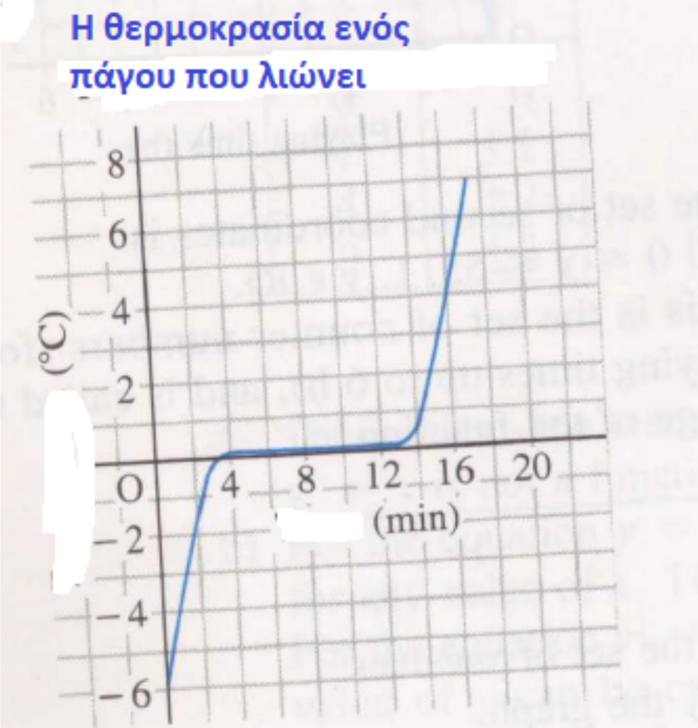
- Ο κύριος Παύλος έχει ένα μαγαζί στο οποίο πουλάει φρεσκοστυμμένες λεμονάδες τις πρωινές ώρες.
    - Σας δίνεται η διπλανή γραφική παράσταση που περιγράφει της πωλήσεις στο μαγαζί του κ. Παύλου από τις 7:30π.μ. μέχρι τις 10:15π.μ.
    - Μπορείτε να περιγράψετε πώς εξελίχθηκαν οι πωλήσεις κατά το χρονικό διάστημα που αναφέρεται στο γράφημα;

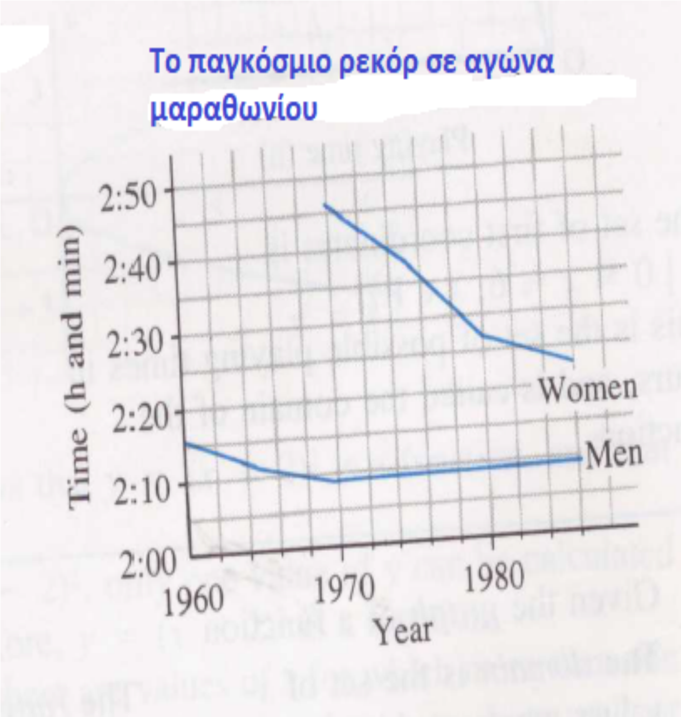
Αποκωδικοποιώντας τις ‘ιστορίες’ που περιγράφονται σε γραφικές παραστάσεις (2/3)



- Υποθέτουμε ότι ένας ανιχνευτής κίνησης καταγράφει τον χρόνο και την απόσταση που έκανε ο Γιώργος για να πάει σπίτι του διανύοντας 480 μέτρα σε 8 λεπτά. Να αντιστοιχίσετε τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις (χρόνου-απόστασης) με τις “ιστορίες” που περιγράφουν τον κάθε περίπατο του Γιώργου.
- α) Ο Γιώργος περπατάει με σταθερό ρυθμό 60 μέτρα ανά λεπτό.
- β) Ο Γιώργος περπατάει αργά στην αρχή, και μετά αυξάνει σταθερά την ταχύτητα του.
- γ) Ο Γιώργος περπατάει γρήγορα στην αρχή, σταματάει για λίγο να ξεκουραστεί και συνεχίζει αυξάνοντας τον ρυθμό του βαδίσματός του μέχρι να φτάσει σπίτι του.
- δ) Ο Γιώργος περπατάει με σταθερή ταχύτητα για 3 λεπτά, σταματάει για 2 λεπτά να ξεκουραστεί και συνεχίζει με σταθερή ταχύτητα τον περίπατο του μέχρι να φτάσει σπίτι.
- ε) Ο Γιώργος περπατάει γρήγορα στην αρχή, αλλά όταν κοντεύει να φτάσει σπίτι του, επιβραδύνει σταδιακά την ταχύτητά του.

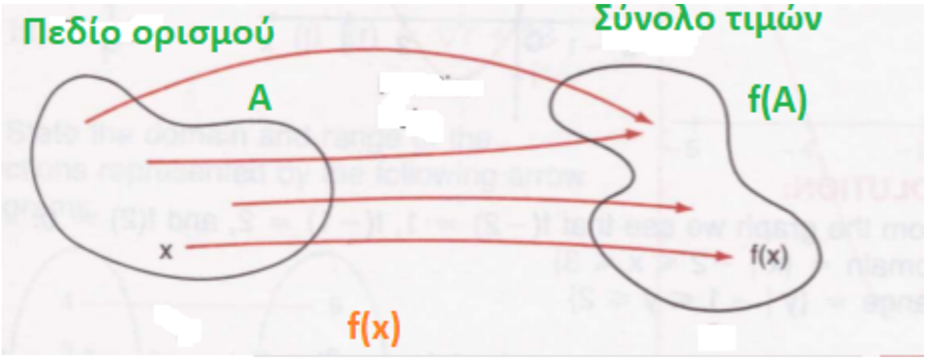
Αποκωδικοποιώντας τις ‘ιστορίες’ που περιγράφονται σε γραφικές παραστάσεις (3/3)





ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω A ένα υποσύνολο του **R**. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού το A** μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία κάθε στοιχείο x ∊ A αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται **τιμή της f στο x** και συμβολίζεται με f(x).



Για να εκφράσουμε τη διαδικασία αυτή, γράφουμε:

$$f : A \to \mathbf{R}$$

$$x \to f(x)$$

— Το γράμμα x, που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του A λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το γράμμα y, που παριστάνει την τιμή της f στο x, λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

— Το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f συνήθως συμβολίζεται με $\mathbf{D_f}$.

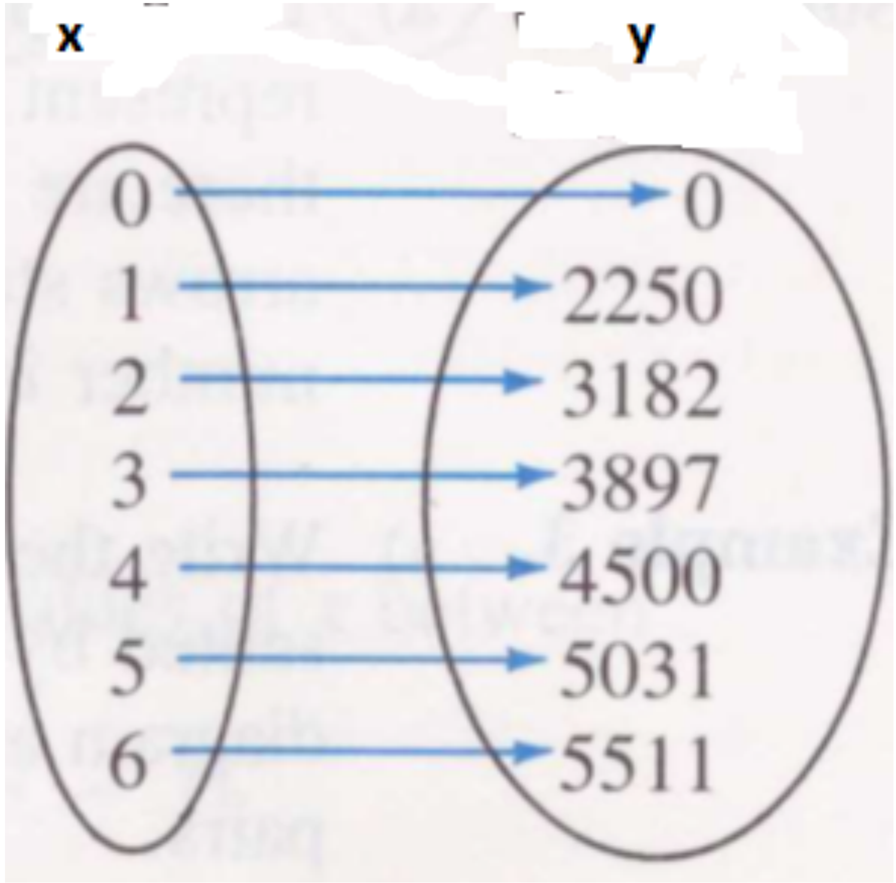
— Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα x ∊ A, λέγεται **σύνολο τιμών** της f και συμβολίζεται με **f (A)**. Είναι δηλαδή:

Διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης

- Μια συνάρτηση μπορεί να αναπαρασταθεί αναλυτικά, δηλαδή μέσω του **αλγεβρικού της τύπου**, αριθμητικά δηλ. μέσω **πίνακα τιμών** ή ως **διατεταγμένο ζεύγος συντεταγμένων**, γραφικά, μέσω της **γραφικής της παράστασης** και λεκτικά, με **λεκτική περιγραφή** της σχέσης μεταξύ των μεγεθών της.
- Κάθε αναπαραστατικός τρόπος περιγράφει καλύτερα κάποια χαρακτηριστικά της συνάρτησης. Ο ένας συμπληρώνει τον άλλον και όλοι μαζί συμβάλλουν στη καλύτερη εννοιολογική αντίληψη της έννοιας.

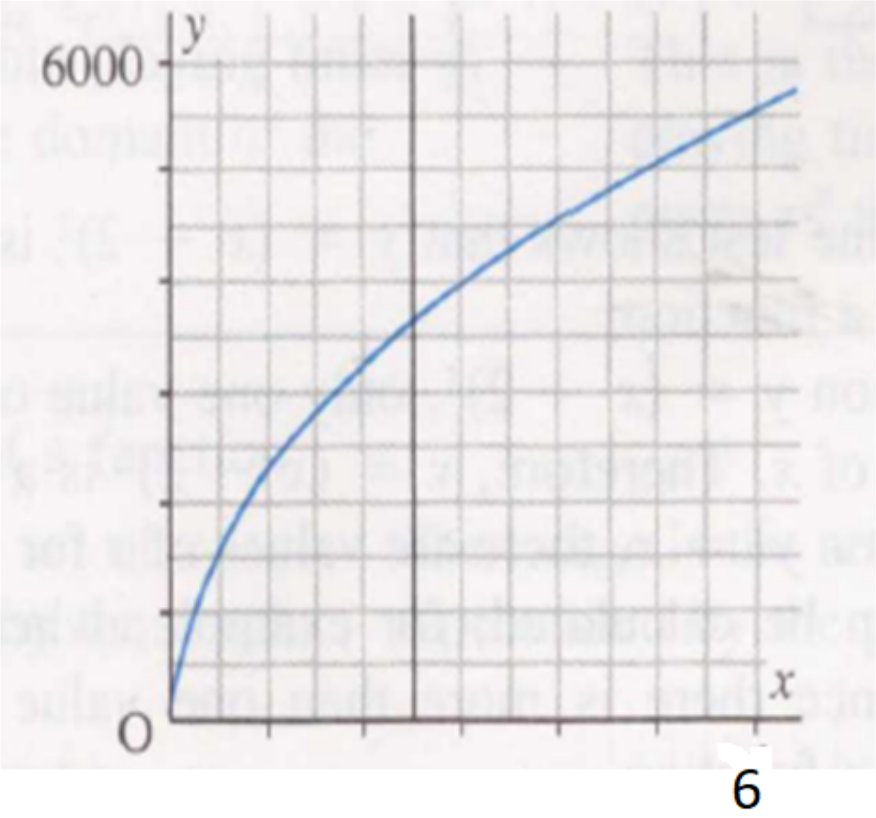
Πίνακας τιμών και αναπαράσταση μέσω διαγράμματος αντιστοίχισης

x	y
0	0
1	2250
2	3182
3	3897
4	4500
5	5031
6	5511



Διαφορετικές αναπαραστάσεις της ίδιας συνάρτησης

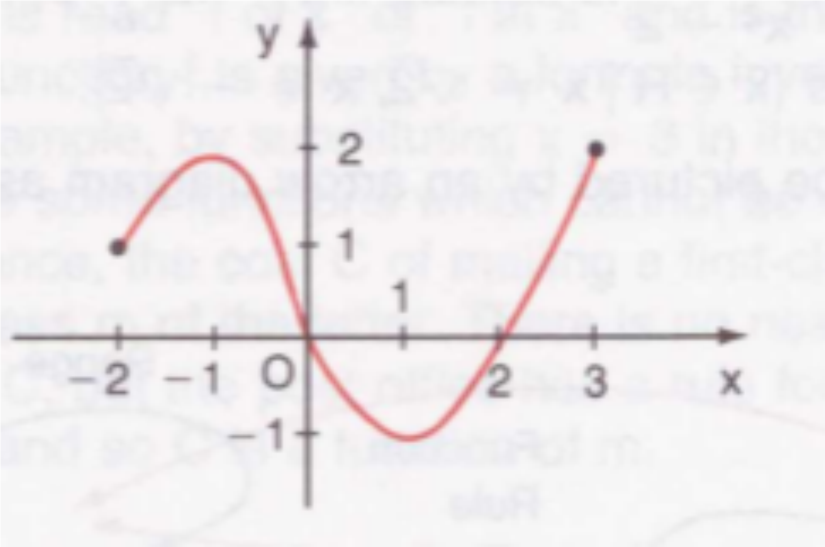
Γράφημα



Αλγεβρικός τύπος

$$y = 2250\sqrt{x}$$

Ποιο είναι το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης που αναπαρίσταται στο παρακάτω γράφημα;



Πεδίο ορισμού της συνάρτησης

A = {x ανήκει στο R /$-2 \le x \le 3$}

Σύνολο τιμών της συνάρτησης

B = {y ανήκει στο R/$-1 \le y \le 2$}

Πεδίο ορισμού συνάρτησης Περιορισμοί

Να οριστούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων λαμβάνοντας υπόψη τους αντίστοιχους περιορισμούς

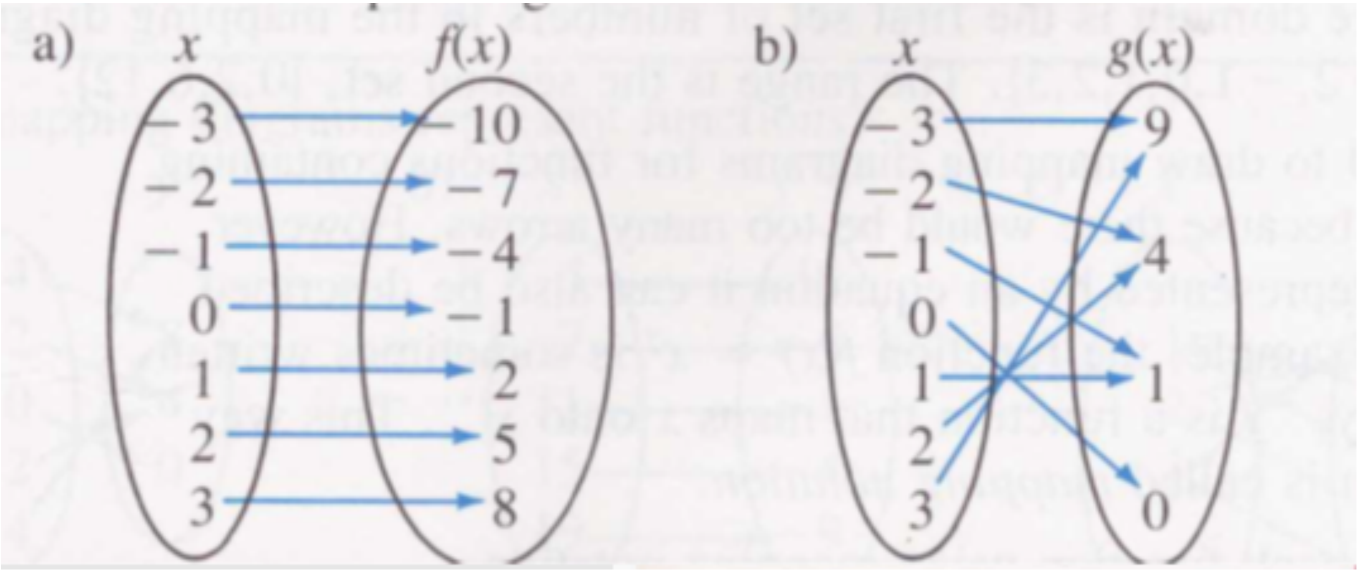
- Αν δεν δίνεται το πεδίο ορισμού συνάρτησης τότε θεωρούμε ότι είναι το σύνολο των τιμών x για το οποίο η συνάρτηση f(x) ορίζεται (ή έχει νόημα).

$$y = 2250\sqrt{x}$$

(a) $f(x) = \sqrt{x-3}$

(b) $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2}$

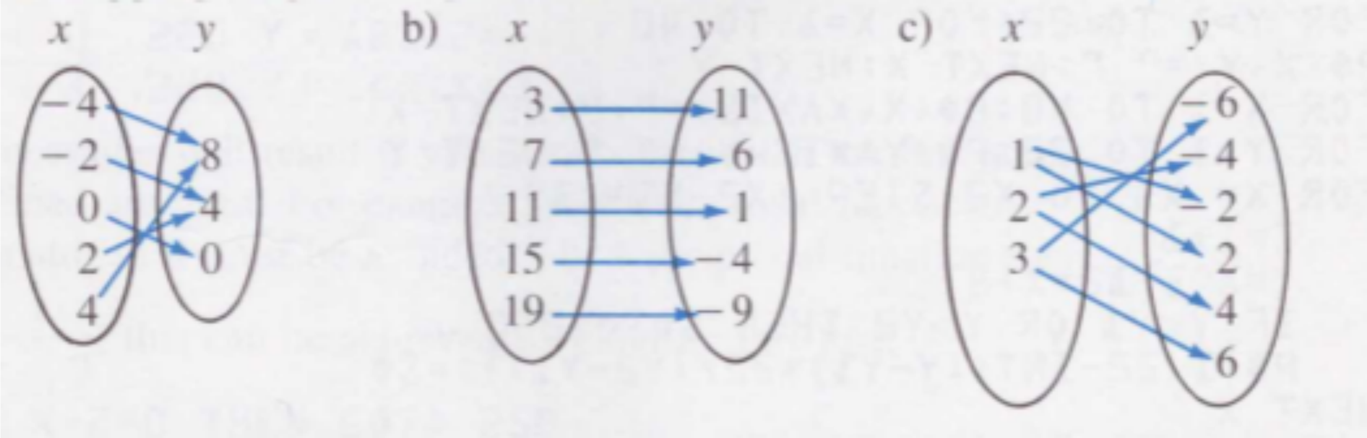
Μπορείτε να βρείτε τον αλγεβρικό τύπο των συναρτήσεων f(x), g(x);



Είναι κάθε σχέση μεταξύ των δύο μεταβλητών συνάρτηση;

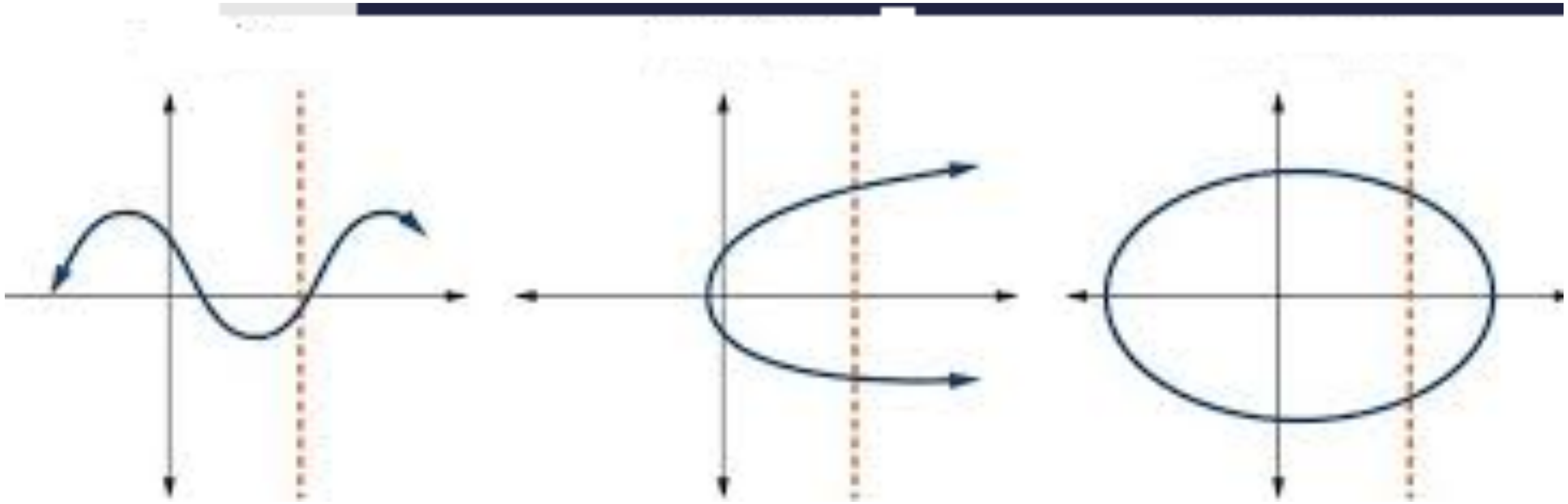
- Σύμφωνα με τον ορισμό της συνάρτησης, **κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού <u>αντιστοιχεί σε ένα ακριβώς στοιχείο</u> του συνόλου τιμών**.

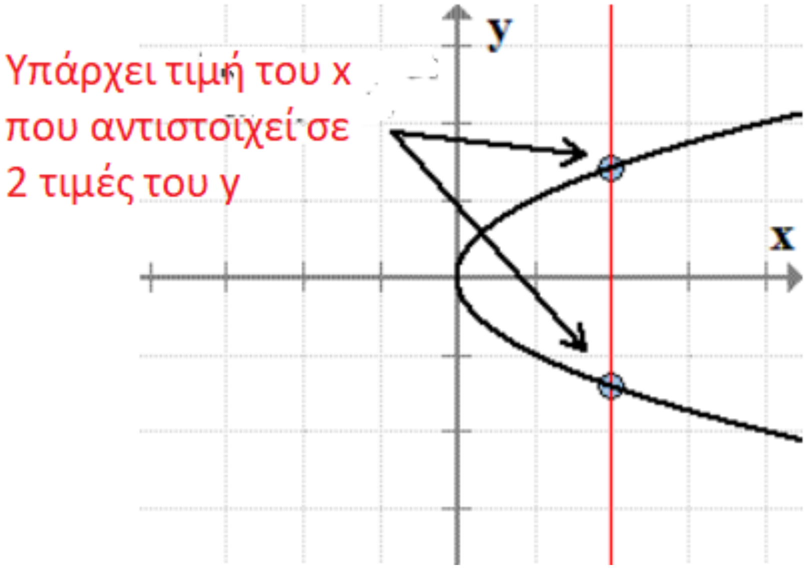
- Ποιες από τις αντιστοιχήσεις συνόλων x, y αναπαριστούν συναρτήσεις;



Είναι κάθε σχέση μεταξύ των δύο μεταβλητών συνάρτηση;
Έλεγχος με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης

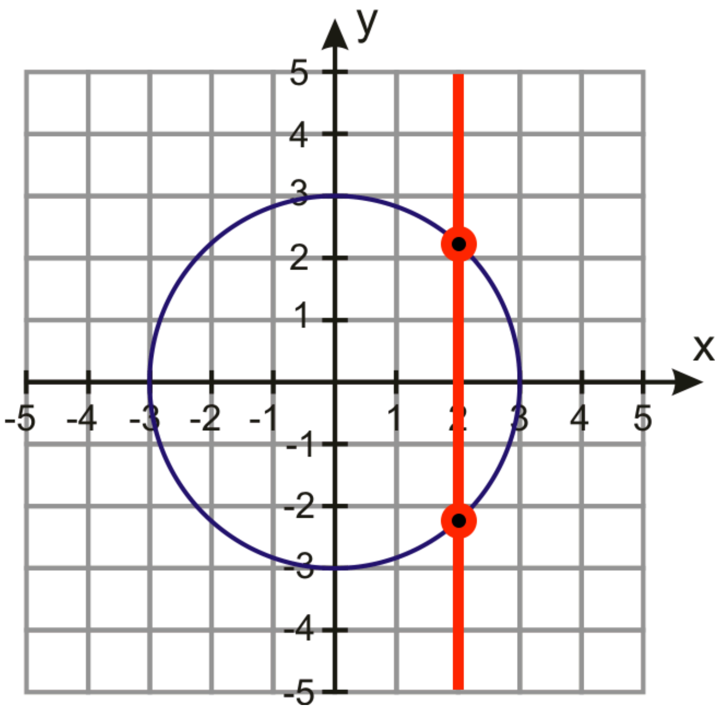
- Συνάρτηση Μη συνάρτηση Μη συνάρτηση





Είναι ο κύκλος συνάρτηση;

Παράδειγμα: $x^2 + y^2 = 9$



Μελέτη

- Σχολικό βιβλίο Α’ Λυκείου.
  - 5ο Κεφάλαιο: Ακολουθίες & Πρόοδοι (5.1-5.3 αλλά όχι τα αθροίσματα όρων αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου)
  - 6ο Κεφάλαιο: Συναρτήσεις (6.1-6.2)