Το μεταπτυχιακό μάθημα

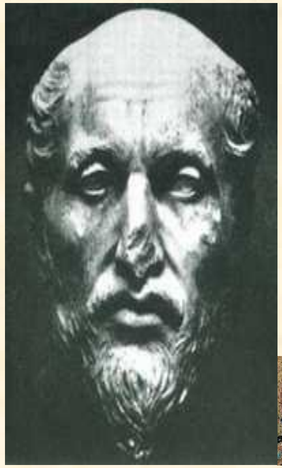
Ιστορία των Μαθηματικών (Υ16)

(Τετ. 18:00 - 21:00, Αίθ. Β)

προσφέρει μια επισκόπηση των πιο επιδραστικών μαθηματικών ιδεών που αναπτύχθηκαν από την αρχαιότητα έως και τους νεωτερικούς χρόνους στον ευρύτερο χώρο της Μεσογείου. Παράλληλα, εξετάζει τον ρόλο που διαδραμάτισαν οι κοινωνικοί, θεσμικοί και πολιτισμικοί παράγοντες στην εξέλιξη της μαθηματικής σκέψης και, αντιστρόφως, τους τρόπους με τους οποίους οι μαθηματικές ιδέες επηρέασαν την κοινωνία και τον πολιτισμό. Σε ιστοριογραφικό επίπεδο, στόχος του μαθήματος είναι να βοηθήσει τις φοιτήτριες και τους φοιτητές του ΙΦΕΤ να αναπτύξουν κριτική σκέψη ως προς τους τρόπους με τους οποίους κατανοείται και καταγράφεται η ιστορία των Μαθηματικών.

Μ. Σιάλαρος (msialaros@phs.uoa.gr)

https://en-uoa-gr.academia.edu/MichalisSialaros
https://www.ancientscienceportal.com
https://www.instagram.com/ancient_science_portal

~1600 π.Χ. ~600 π.Χ. ~300 π.Χ. 529-534 μ.Χ. 1629 μ.Χ.

Μεθοδολογικό ερώτημα:

Σύμφωνα με την παράδοση, οι απαρχές των ελληνικών μαθηματικών εντοπίζονται κατά τον 6^{o} αιώνα π.Χ. Το πρώτο, ωστόσο, σωζόμενο κείμενο είναι τα Στοιχεία του Ευκλείδη, το οποίο γράφεται περίπου τρεις αιώνες μετά. Πώς μπορούμε να αντλήσουμε πληροφορίες για το ενδιάμεσο διάστημα;

Τον 5ο αιώνα μ.Χ., ο Πρόκλος γράφει σχόλια στο πρώτο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη. Σε αυτό το έργο, περιέχεται μια ενότητα (η οποία υποτίθεται ότι βασίζεται σε παλαιότερους συγγραφείς) που περιγράφει την εξέλιξη των μαθηματικών από τον Θαλή μέχρι τον Ευκλείδη (64.16 – 70.18)

Ο Θαλής ήταν ο πρώτος ο οποίος, αφού ήλθε στην Αίγυπτο, μετέφερε τη θεωρία αυτή στην Ελλάδα· ο ίδιος ανακάλυψε πολλά πράγματα, και παρέδωσε τις αρχές πολλών άλλων στους νεωτέρους του, εφαρμόζοντας σε άλλες περιπτώσεις μέθοδο περισσότερο γενική και σε άλλες περισσότερο εμπειρική. Μετά από αυτόν ο Μάμερκος,[a] ο αδελφός του ποιητή Στησιχόρου, μνημονεύεται ότι επέδειξε ενδιαφέρον για τη μελέτη της γεωμετρίας και ο Ιππίας ο Ηλείος έγραψε για αυτόν ότι απέκτησε φήμη ως γεωμέτρης. Μετά από αυτούς ο Πυθαγόρας μετέτρεψε τη φιλοσοφία της [γεωμετρίας] σε μια μορφή ελεύθερης παιδείας, αναλογιζόμενος τις πρώτες αρχές της εκ των άνω, και διερευνώντας τα θεωρήματα αΰλως και νοερώς· αυτός ανακάλυψε επίσης τη θεωρία των αρρήτων[b] και τη σύσταση των κοσμικών σχημάτων. Μετά από αυτόν με πολλά [προβλήματα] της γεωμετρίας καταπιάστηκε ο Αναξαγόρας από τις Κλαζομενές, και ο Οινοπίδης ο Χίος, ο οποίος ήταν λίγο νεώτερος του Αναξαγόρα, και ο Πλάτων αναφέρει στους *Αντεραστές* ότι [αμφότεροι] απέκτησαν φήμη στα Μαθηματικά.

Μετά από αυτούς επιφανείς στη γεωμετρία έγιναν ο Ιπποκράτης ο Χίος, ο οποίος ανακάλυψε πώς τετραγωνίζεται ο μηνίσκος, και ο Θεόδωρος ο Κυρηναίος· ο Ιπποκράτης, μάλιστα, είναι ο πρώτος από τους προαναφερόμενους που συνέγραψε *Στοιχεία*. Ο Πλάτων, ο οποίος ακολουθεί μετά από αυτούς, συνέβαλε ώστε να λάβουν μεγάλη ανάπτυξη και οι λοιπές μαθηματικές επιστήμες και η γεωμετρία με τον ζήλο [που επέδειξε] για αυτές, ο οποίος είναι κατά κάποιον τρόπο εμφανής, αφού και τα συγγράμματά του τα έχει γεμίσει με μαθηματικούς συλλογισμούς και με κάθε ευκαιρία διεγείρει τον θαυμασμό προς αυτά όσων αφοσιώνονται στη φιλοσοφία. Την ίδια εποχή έζησαν επίσης ο Λεωδάμας από τη Θάσο, ο Αρχύτας ο Ταραντίνος και ο Θεαίτητος ο Αθηναίος, οι οποίοι αύξησαν τον αριθμό των θεωρημάτων και συνέβαλαν στην επιστημονικότερη συγκρότησή τους.

Νεώτερος του Λεωδάμαντος ήταν ο Νεοκλείδης, και ο μαθητής αυτού Λέων, οι οποίοι πρόσθεσαν πολλά σε όσα [είχαν επιτύχει] οι προγενέστεροί τους· έτσι, ο Λέων μπόρεσε να συντάξει τα *στοιχεία* με μεγαλύτερη επιμέλεια ως προς το πλήθος και τη χρήση των αποδεικνυόμενων [προτάσεων], και να βρει διορισμούς[a] για το πότε το ζητούμενο πρόβλημα είναι δυνατό και πότε αδύνατο. Ο Εύδοξος από την Κνίδο, λίγο νεώτερος του Λέοντος, αφού συνδέθηκε με τους κύκλους του Πλάτωνα, ήταν ο πρώτος ο οποίος αύξησε το πλήθος των λεγόμενων γενικών θεωρημάτων, στις τρεις αναλογίες πρόσθεσε άλλες τρεις, και προήγαγε τις σχετικές με την «τομή» [έρευνες] που είχε αρχίσει ο Πλάτων, χρησιμοποιώντας σε αυτές και τη μέθοδο της ανάλυσης.[b] Ακόμη περισσότερο τελειοποίησαν τη γεωμετρία ο Αμύκλας από την Ηράκλεια, ένας από τους εταίρους του Πλάτωνα, ο Μέναιχμος, ο οποίος ήταν μαθητής του Ευδόξου και συνδέθηκε με τον Πλάτωνα, και ο αδελφός αυτού Δεινόστρατος. Ο Θεύδιος από τη Μαγνησία φαίνεται, επίσης, ότι διακρίθηκε τόσο στα μαθηματικά όσο και στην υπόλοιπη φιλοσοφία· διότι και τα *στοιχεία* συνέταξε καλώς και γενίκευσε πολλά από τα επιμέρους[c] [θεωρήματα]. Και βεβαίως ο Αθήναιος από την Κύζικο, ο οποίος έζησε κατά την ίδια εποχή, έγινε επιφανής και στους άλλους κλάδους των μαθηματικών και, ιδιαιτέρως, στη γεωμετρία. Αυτοί ζούσαν όλοι μαζί στην Ακαδημία και διεξήγαγαν τις έρευνές τους από κοινού. Ο Ερμότιμος από την Κολοφώνα προήγαγε περισσότερο αυτά που είχαν επιτύχει ο Εύδοξος και ο Θεαίτητος, ανακάλυψε πολλά [από τα περιεχόμενα] στα *Στοιχεία* και συνέγραψε ορισμένα περί [γεωμετρικών] τόπων. Ο Φίλιππος από τη Μένδη, ο οποίος ήταν μαθητής του Πλάτωνα, και εκείνος τον προέτρεψε να ασχοληθεί με τα μαθηματικά, έκανε τις έρευνές του σύμφωνα με τις υποδείξεις του Πλάτωνα, ανέλαβε δε να κάνει όσα νόμιζε ότι συμβάλλουν στη φιλοσοφία του Πλάτωνα.

Μέχρι αυτού [του σημείου], λοιπόν, αφηγούνται την εξέλιξη αυτής της επιστήμης όσοι συνέγραψαν ιστορίες. Δεν είναι δε πολύ νεώτερος αυτών ο Ευκλείδης, ο οποίος συγκέντρωσε τα *στοιχεία*, έβαλε σε τάξη πολλά [θεωρήματα] του Ευδόξου, τελειοποίησε πολλά [θεωρήματα] του Θεαιτήτου, και προσέφερε αψεγάδιαστες αποδείξεις σε όσα οι προγενέστεροί του είχαν αποδείξει με τρόπο λιγότερο αυστηρό. Αυτός ο άνδρας έζησε την εποχή του Πτολεμαίου του πρώτου· διότι ο Αρχιμήδης, ο οποίος ακολουθεί αμέσως μετά τον πρώτο [Πτολεμαίο], μνημονεύει τον Ευκλείδη, και, ακόμη, λέγεται ότι ο Πτολεμαίος τον ρώτησε κάποτε αν υπάρχει τρόπος για [να μάθει κανείς] τη γεωμετρία πιο σύντομος από τη *Στοιχείωση* και εκείνος απάντησε ότι δεν υπάρχει «βασιλική οδός» προς τη γεωμετρία. Είναι, λοιπόν, νεώτερος από τους [μαθητές] του Πλάτωνα, αλλά πρεσβύτερος του Ερατοσθένη και του Αρχιμήδη. Διότι αυτοί ήταν σύγχρονοι, όπως αναφέρει κάπου ο Ερατοσθένης. Όσον αφορά τις προθέσεις του ήταν Πλατωνικός και φιλικά διακείμενος προς τη φιλοσοφία αυτή· για αυτόν τον λόγο άλλωστε έθεσε ως τελικό σκοπό της *Στοιχειώσεως* την κατασκευή των λεγόμενων πλατωνικών σχημάτων. Υπάρχουν και πολλά άλλα μαθηματικά συγγράμματα αυτού του άνδρα, θαυμαστά ως προς την ακρίβειά τους και μεστά επιστημονικών διερευνήσεων. Διότι τέτοια είναι τα *Οπτικά* και τα *Κατοπτρικά*, η *Μουσική στοιχείωσις*, και επίσης

Προτεινόμενη εργασία:

Ψηφιακός χάρτης για αρχαία ελληνικά μαθηματικά (με εξαγωγή html).

Βιβλιογραφία:

1. Netz, Reviel (1997), 'Classical Mathematics in the Classical Mediterranean', *Mediterranean Historical Review, 12 (2), 1-24.*
2. *DSB και NDSB*

Τα μαθηματικά κατά τον 5^o αιώνα π.Χ.

- Διατυπώνονται γεωμετρικές προτάσεις με καθολικούς όρους.
- Αναδεικνύεται ο ρόλος του σχήματος.
- Εμφανίζεται η ανάγκη απόδειξης των μαθηματικών προτάσεων (π.χ. απόδειξη του «Πυθαγόρειου» θεωρήματος). Αφού οι προτάσεις είναι διατυπωμένες με καθολικούς όρους, αναγκαστικά και οι αποδείξεις πρέπει να είναι διατυπωμένες με καθολικούς όρους.
- Οι αριθμοί κατατάσσονται σε κατηγορίες (π.χ. πρώτοι, φίλιοι, τέλειοι κτλ.) και εξετάζονται οι σχέσεις που έχουν μεταξύ τους.
- Έτσι, προκύπτει η θεωρία αναλογιών και η ασυμμετρία.
- Κατασκευάζονται τα κανονικά πολύεδρα.
- Επειδή συσσωρεύεται ένα σώμα μαθηματικής γνώσης, προκύπτει η ανάγκη οργάνωσής του.

Τα «άλυτα» προβλήματα

Τα λεγόμενα «άλυτα» (classical) γεωμετρικά προβλήματα

Τετραγωνισμός ενός Κύκλου

Να κατασκευαστεί τετράγωνο με εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν δεδομένου κύκλου.

Διπλασιασμός ενός Κύβου
ή
«Το Δήλιο Πρόβλημα»

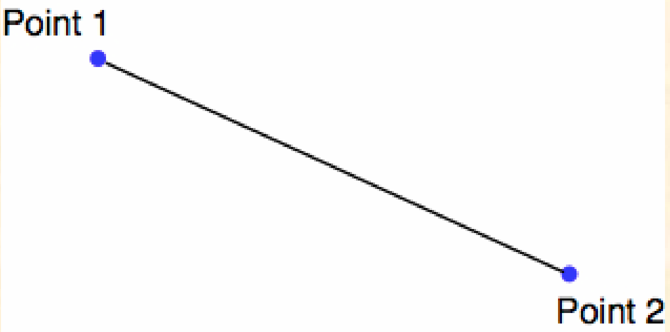
Να κατασκευαστεί κύβος με όγκο ίσο με το διπλάσιο δεδομένου κύβου.

Τριχοτόμηση μιας Γωνίας

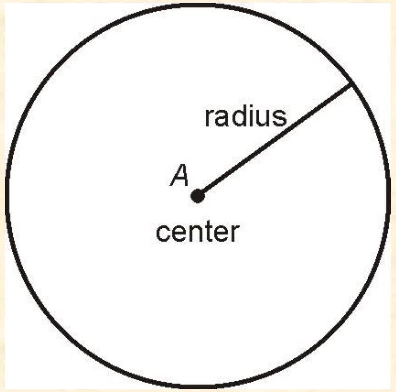
Να τριχοτομηθεί μια τυχαία γωνία.

Γιατί χρησιμοποιήθηκε ιστοριογραφικά ο όρος «άλυτα»;

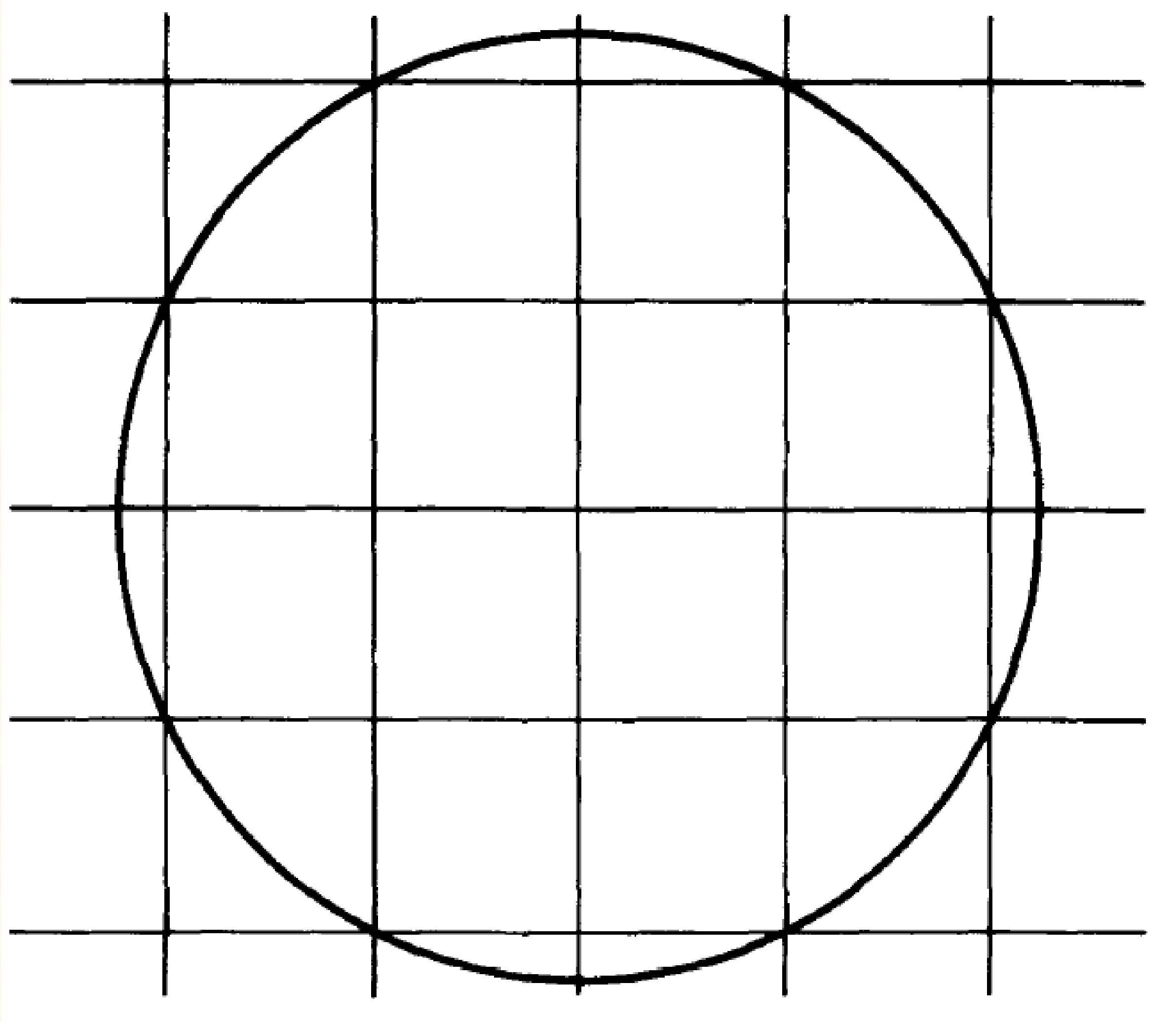
Ἠιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.



Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.



Ο τετραγωνισμός του κύκλου



Πρόβλημα 50 (από τον πάπυρο Rhind):

Ένα κυκλικό χωράφι έχει διάμετρο 9 κετ. Πόσα σετάτ γης περικλείει;

Αφαίρεσε το 1/9 της διαμέτρου, δηλαδή 1. Περισσεύουν 8.

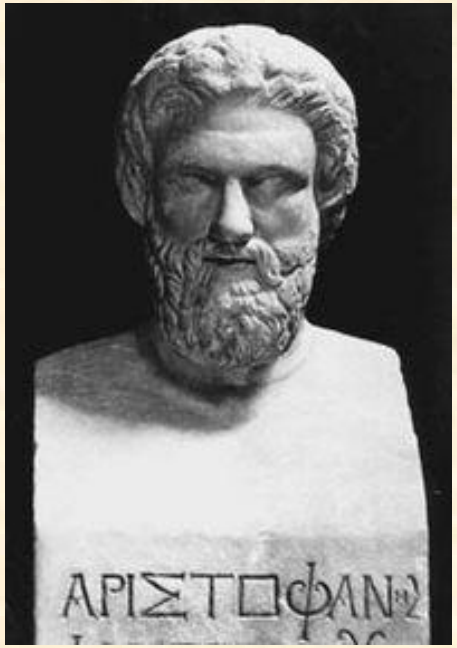
Πολλαπλασίασε 8 φορές. Μας κάνει 64.

Άρα ο κύκλος περικλείει 64 σετάτ γης.

$$A = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2 = \frac{64}{81} d^2$$

Σημείωση: Ένα κετ = 52.3 μέτρα
Αυτό μας δίνει μια εκτίμηση για το π = 256/81 περίπου ίση με 3,16

Ο τετραγωνισμός του κύκλου στον ελληνικό κόσμο

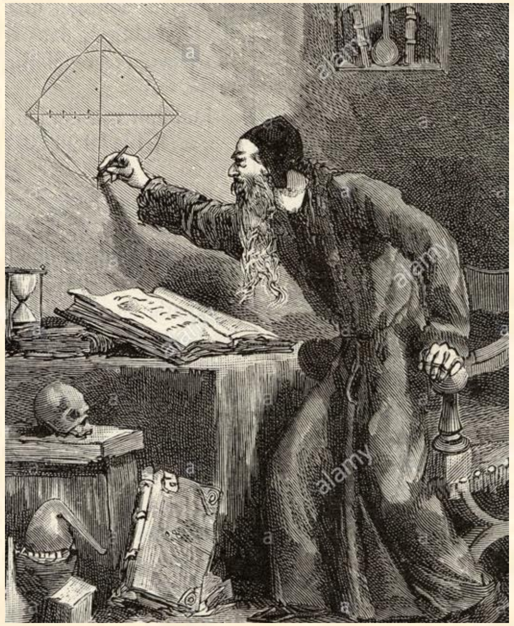


- Στους Όρνιθες (414 π.Χ.), ο Αριστοφάνης παρουσιάζει μια καρικατούρα του Μέτωνα που εμφανίζεται ως τοπογράφος της Νεφελοκοκκυγίας:

Εάν τοποθετήσω αυτόν τον καμπυλωτό χάρακα από πάνω, βάζοντας από μέσα ένα διαβήτη – με παρακολουθείς; Τοποθετώντας τον, θα μετρήσω με ένα ίσιο χάρακα, έτσι ώστε να σου γίνει ο κύκλος τετράγωνος.

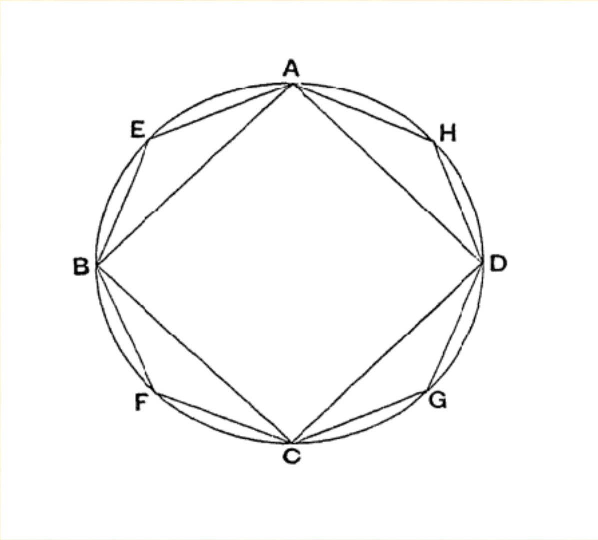
Όρν. 1001-5

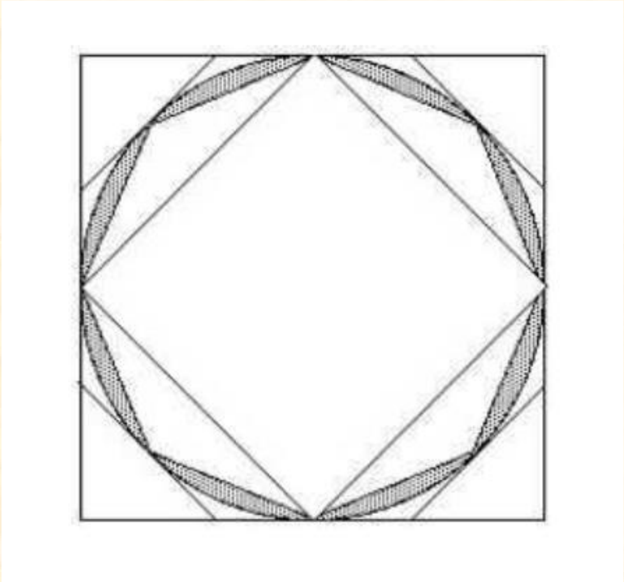
- Στο σχόλιο του Μέτωνα θα απαντήσει ο Πεισθέταιρος, αρχηγός των Όρνιθων: «Αυτός ο άνθρωπος, αλήθεια, είναι ένας Θαλής!»



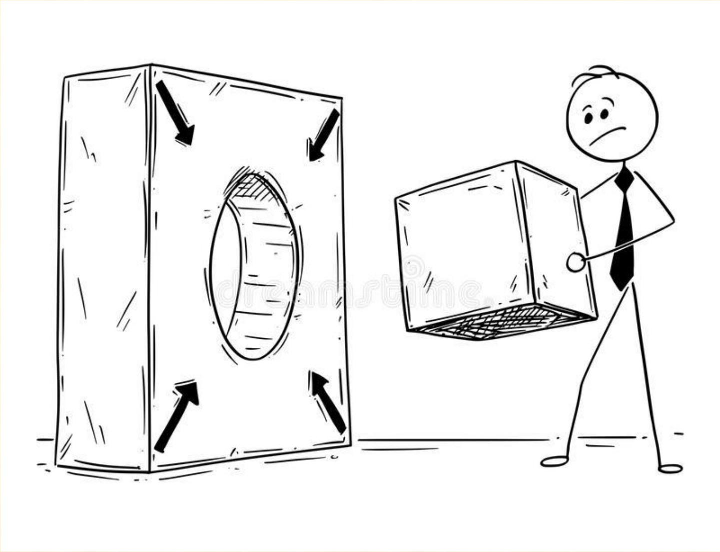
- Ο πρώτος που αναφέρεται ότι ασχολήθηκε με τον τετραγωνισμό του κύκλου είναι ο Αναξαγόρας κατά τη διάρκεια της κράτησής του στην Αθήνα, με την κατηγορία της ασέβειας.

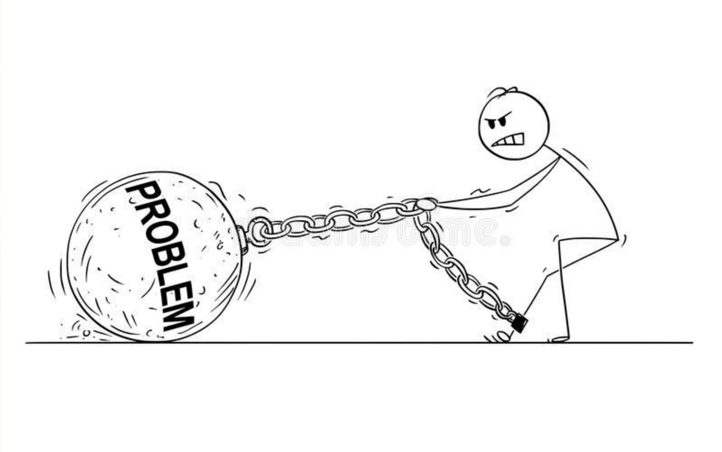
- Ο δεύτερος είναι ο σοφιστής Αντιφώντας. Οι σχολιαστές του Αριστοτέλη περιγράφουν την προσπάθειά του να εξαντλήσει τον κύκλο εκ των έσω με τον εξής τρόπο: εγγράφοντας, αρχικά, ένα τετράγωνο στον κύκλο και, στη συνέχεια, κατασκευάζοντας διαδοχικά ισοσκελή τρίγωνα πάνω στις εκτιθέμενες πλευρές.





- Ο τρίτος είναι ο σοφιστής Βρύσωνας, σύγχρονος του Αντιφώντα. Εμπλούτισε τη μέθοδο Αντιφώντα με περιγεγραμμένα πολύγωνα.



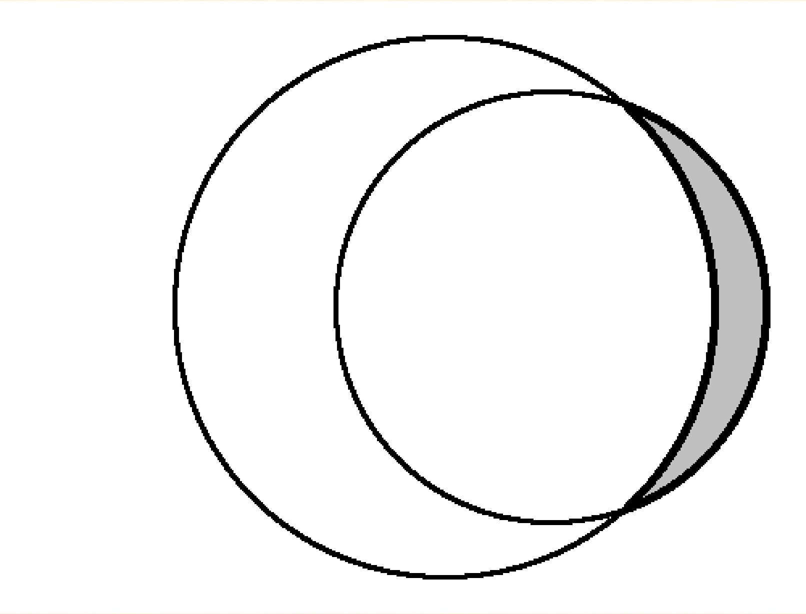


Αυτές οι προσπάθειες δεν θεωρήθηκαν επιτυχημένες (γιατί;)
Είναι όντως αποτυχημένες;

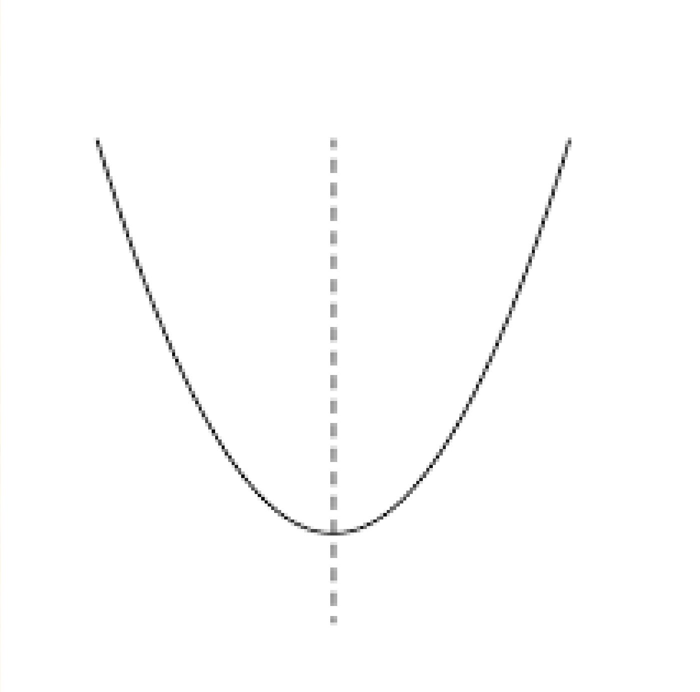
Έτσι άλλαξε η στόχευση:

Να τετραγωνιστούν άλλα καμπυλόγραμμα σχήματα

Ερώτηση: τι σημαίνει στην πράξη «να τετραγωνιστεί» ένα σχήμα;



μηνίσκος

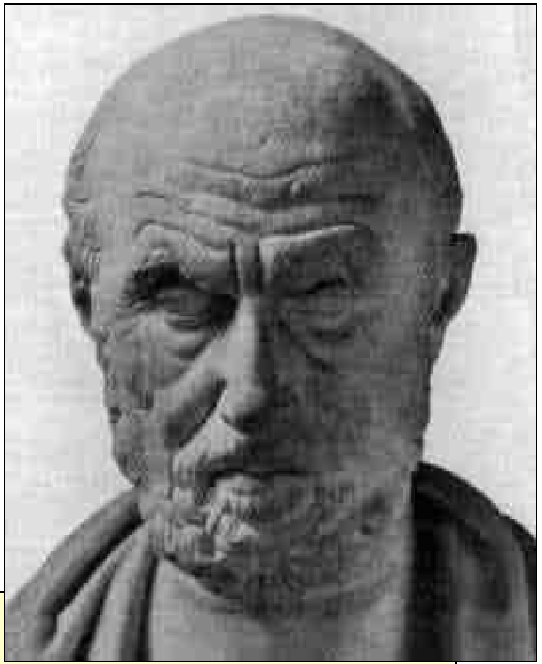


παραβολή

Ἱπποκράτης Χῖός τις ὢν ἔμπορος, λῃστρικῇ νηὶ περιπεσὼν καὶ πάντα ἀπολέσας, ἦλθεν Ἀθήναζε γραψόμενος τοὺς λῃστάς, καὶ πολὺν παραμένων ἐν Ἀθήναις διὰ τὴν γραφὴν χρόνον, ἐφοίτησεν εἰς φιλοσόφους, καὶ εἰς τοσοῦτον ἕξεως γεωμετρικῆς ἦλθεν, ὡς ἐπιχειρῆσαι εὑρεῖν τὸν κύκλου τετραγωνισμόν. καὶ αὐτὸν μὲν οὐχ εὗρε, τετραγωνίσας δὲ τὸν μηνίσκον ᾠήθη ψευδῶς ἐκ τούτου καὶ τὸν κύκλον τετραγωνίζειν· ἐκ γὰρ τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ μηνίσκου καὶ τὸν τοῦ κύκλου τετραγωνισμὸν ᾠήθη συλλογίζεσθαι. ὁ δὲ Ἀντιφῶν καὶ αὐτὸς ἐπεχείρησε τετραγωνίσαι τὸν κύκλον, ἀλλ' οὐ σῴζων

Πληροφορίες για τον Ιπποκράτη που διασώζει ο σχολιαστής του Αριστοτέλη Ιωάννης ο Φιλόπονος (6ος μ.Χ. αι.).

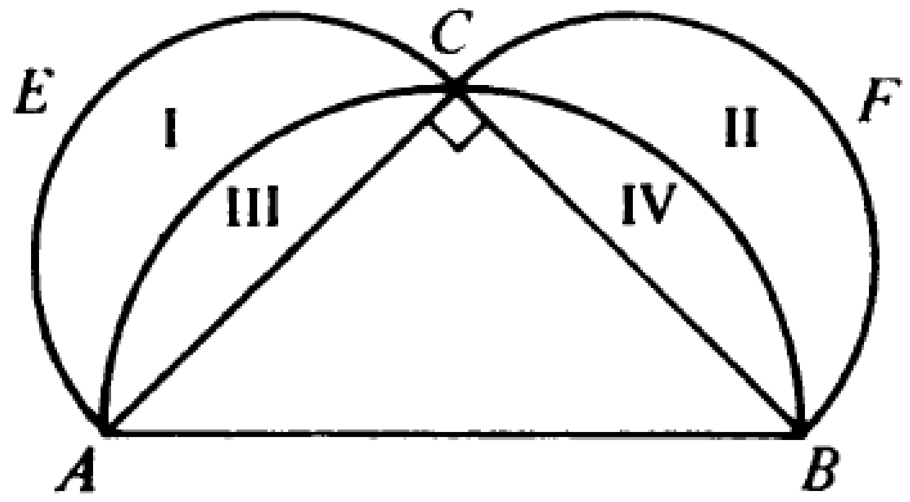
Ιπποκράτης ο Χίος
(ήκμασε περί το 425 π.Χ.)



Σύνοψη

1) Ο πρώτος που συνέγραψε *Στοιχεία της γεωμετρίας*.
2) Ανήγαγε το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου στο ισοδύναμο πρόβλημα της εύρεσης δύο μέσων αναλόγων, σε συνεχή αναλογία, μεταξύ δύο ευθυγράμμων τμημάτων το ένα εκ των οποίων είναι διπλάσιο του άλλου.
3) Τετραγώνισε ειδικές περιπτώσεις μηνίσκων, στην προσπάθειά του να επιλύσει το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου.

ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΥ ΜΗΝΙΣΚΟΥ



$$\frac{\mathscr{A}\,\text{s.c.}(\overline{AC})}{\mathscr{A}\,\text{s.c.}(\overline{AB})} = \frac{\pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2}{\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{AC^2}{AC^2 + CB^2}.$$

From this it follows, since $AC = CB$, that

$$\frac{\mathscr{A}\,\text{s.c.}\ (\overline{AC})}{\mathscr{A}\,\text{s.c.}\ (\overline{AB})} = \frac{AC^2}{2AC^2} = \frac{1}{2}$$

and hence that

$$\mathscr{A}\,\text{s.c.}(\overline{AC}) = \frac{1}{2}\,\mathscr{A}\,\text{s.c.}(\overline{AB}).$$

Hence, again since $AC = CB$,

$$\mathscr{A}\,\text{s.c.}(\overline{CB}) = \frac{1}{2}\,\mathscr{A}\,\text{s.c.}(\overline{AB}),$$

$$\mathscr{A}\,\text{s.c.}(\overline{AC}) + \mathscr{A}\,\text{s.c.}(\overline{CB}) = \mathscr{A}\,\text{s.c.}(\overline{AB}).$$

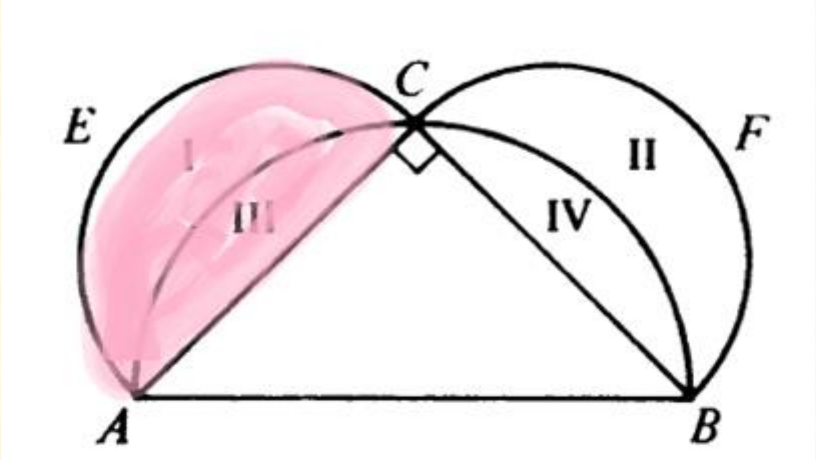
From this we find, by subtraction, that

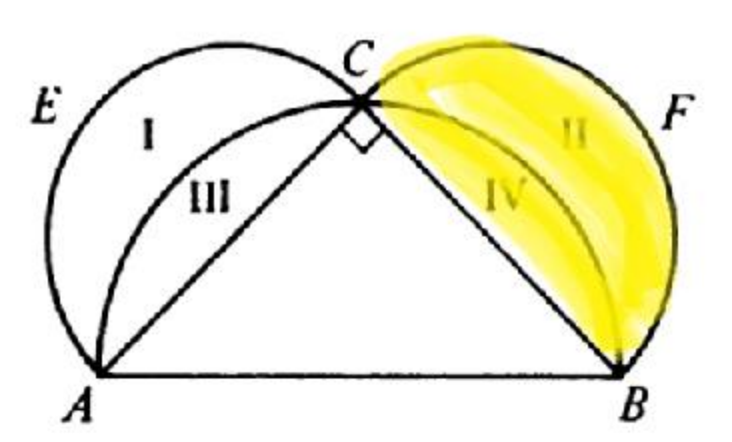
$$\begin{array}{ccccc}
\mathscr{A}\,\text{s.c.}(\overline{AC}) & + & \mathscr{A}\,\text{s.c.}\ (\overline{CB}) & = & \mathscr{A}\,\text{s.c.}(\overline{AB}) \\
\text{area III} & + & \text{area IV} & = & \text{area III} + \text{area IV} \\
\hline
\mathscr{A}\ \text{lune I} & + & \mathscr{A}\ \text{lune II} & = & \mathscr{A}\,\Delta ABC.
\end{array}$$

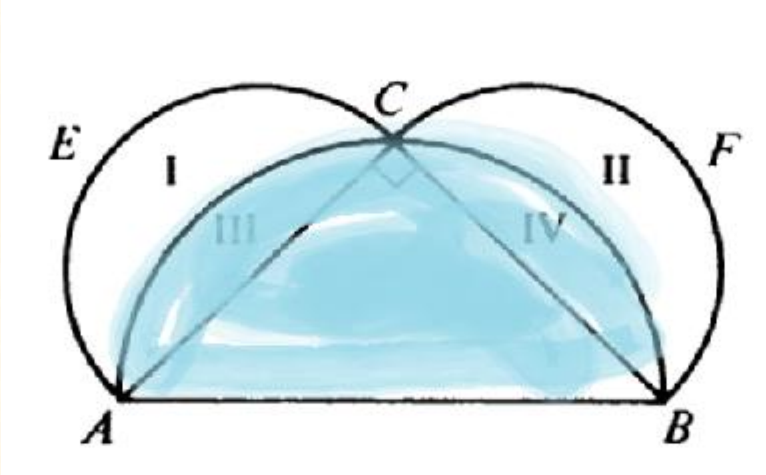
ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ

Αρχικά κατασκευάζουμε τρία ημικύκλια: το ροζ, το κίτρινο και το γαλάζιο.

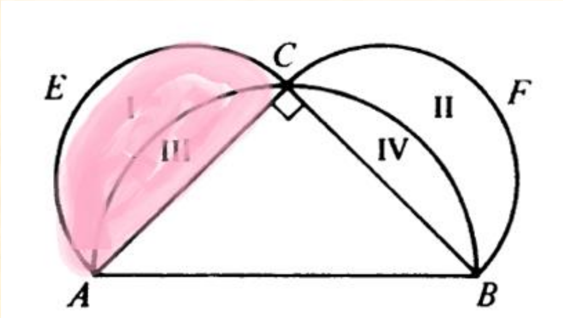
Ισχύουν: AC= CB και η γωνία C είναι ορθή.



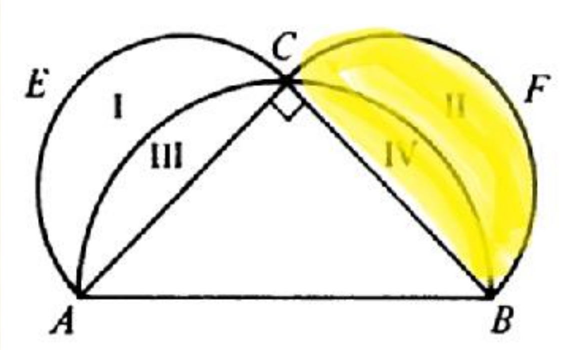




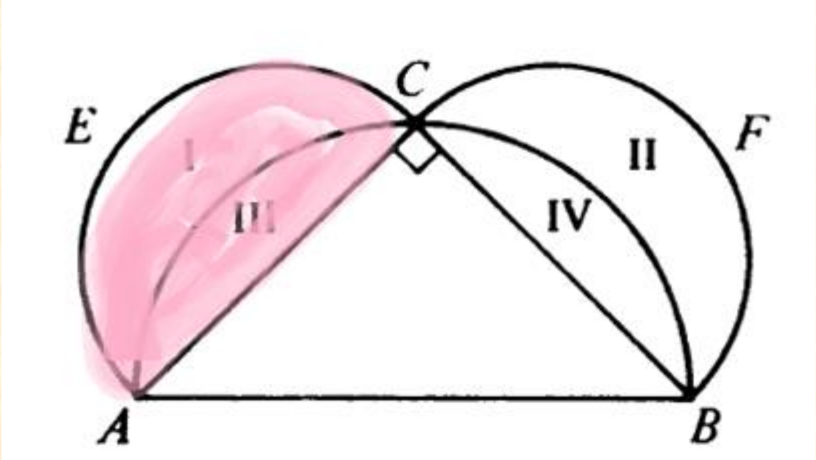
Το ροζ ημικύκλιο αποτελείται από τις περιοχές I και III. Η περιοχή I είναι μηνίσκος.

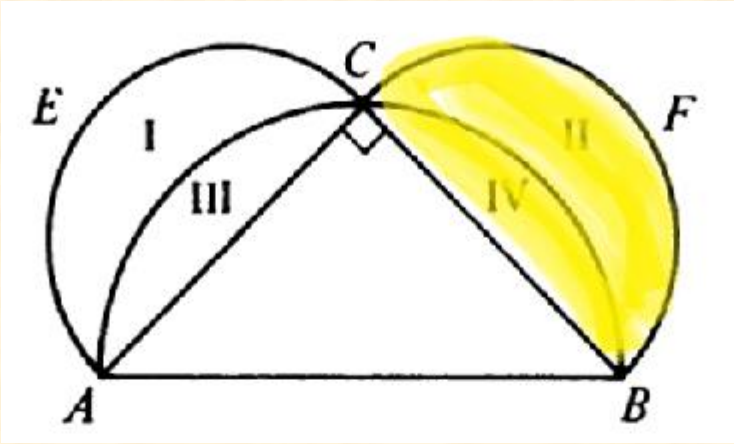


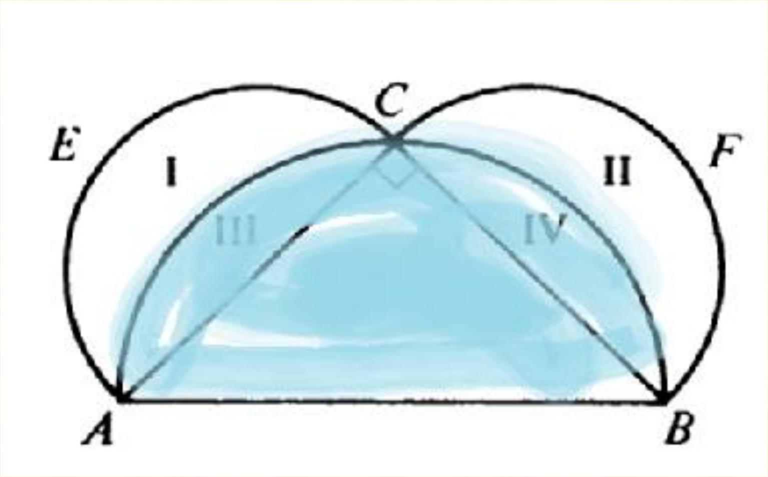
Αντίστοιχα, το κίτρινο ημικύκλιο αποτελείται από τις περιοχές II και IV. Η περιοχή II είναι μηνίσκος.



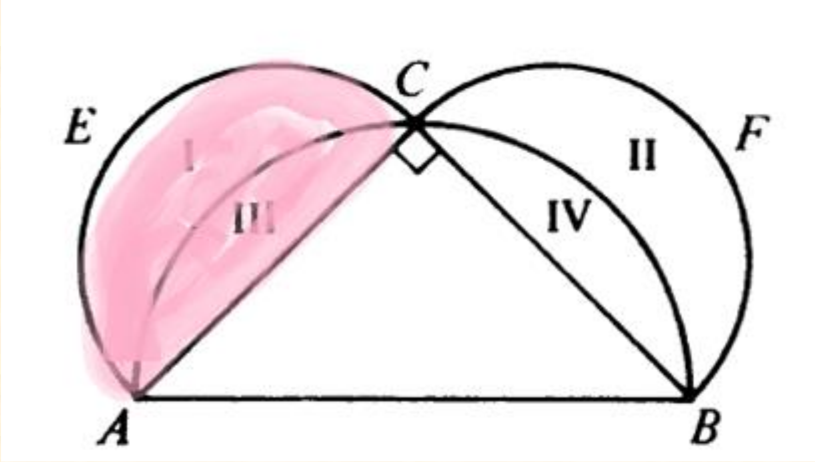
Ο Ιπποκράτης θέλει να δείξει ότι ο μηνίσκος I + ο μηνίσκος II = τρίγωνο ABC







Για να το πετύχει αυτό, βασίζεται σε δύο θεωρήματα:

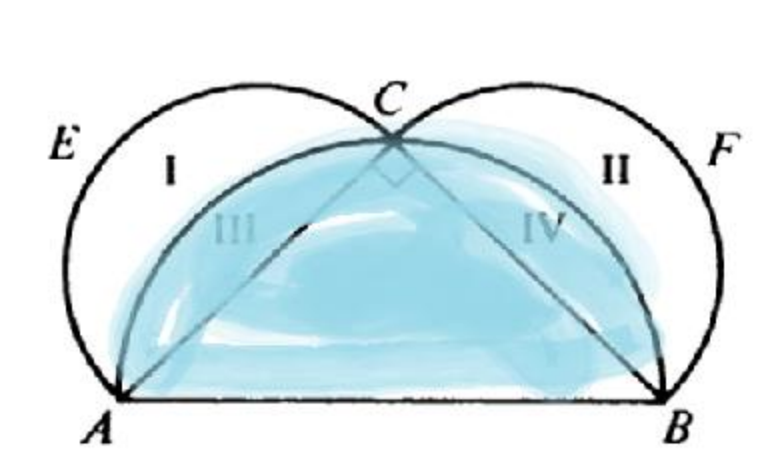


(α) Στο πυθαγόρειο θεώρημα: $AC^2 + BC^2 = AB^2$

(β) Την ιδέα ότι τα εμβαδά δύο κύκλων (ή ημικυκλίων) έχουν μεταξύ τους τη σχέση που έχουν τα τετράγωνα των διαμέτρων τους. Άρα, σε αυτή την περίπτωση:

Το εμβαδό του ροζ ημικυκλίου προς το εμβαδό του γαλάζιου ημικυκλίου είναι ίσο προς $\frac{\mathrm{AC}^2}{AB^2}$

Αν βάλω τη σχέση (α) μέσα στη σχέση (β), προκύπτει:



ότι το εμβαδό του ροζ προς το εμβαδό του γαλάζιου είναι $\frac{\mathrm{AC}^2}{AC^2+BC^2}$.

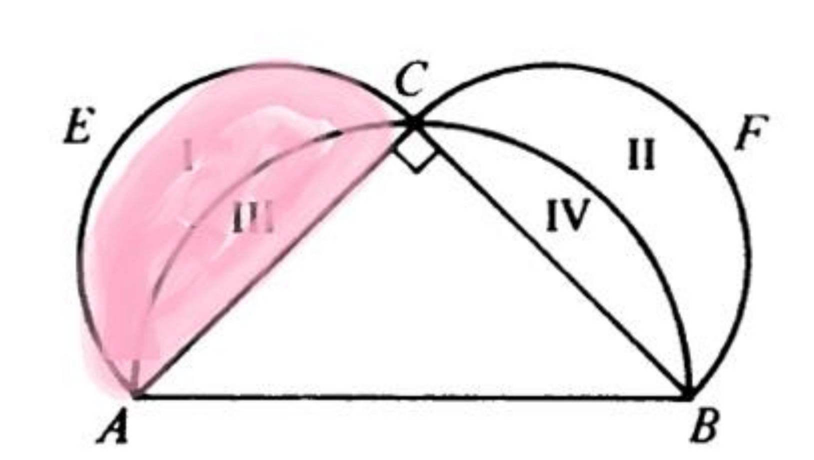
Από την κατασκευή όμως του σχήματος, AC= CB. Άρα η προηγούμενη σχέση γίνεται:

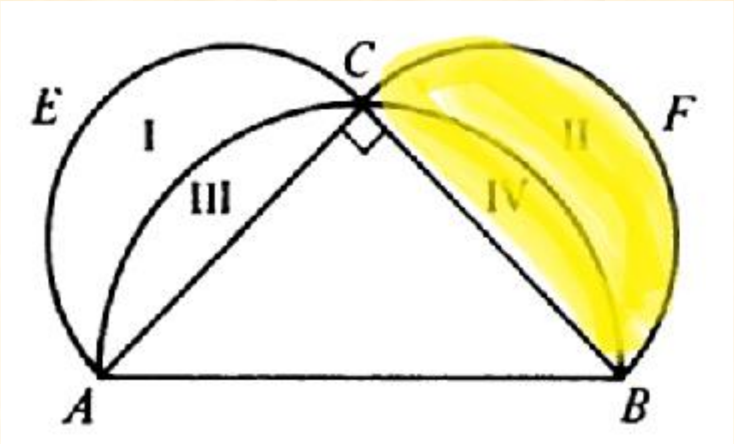
$$\frac{\mathrm{AC}^2}{AC^2+\mathrm{A}C^2}.$$

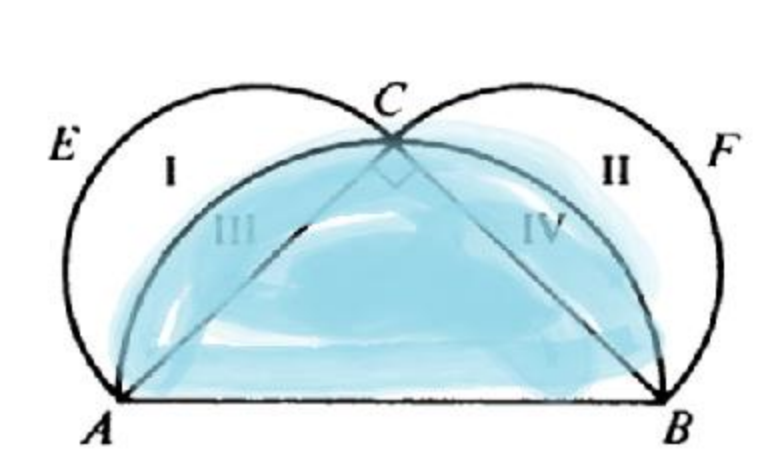
Δηλαδή: $\frac{\mathrm{AC}^2}{2AC^2} = \frac{1}{2}$

Με απλά λόγια, το ροζ είναι το μισό του γαλάζιου.

Με ένα αντίστοιχο επιχείρημα και το κίτρινο είναι το μισό του γαλάζιου.







Άρα ροζ + κίτρινο = γαλάζιο

Άρα I + III + II + IV = III + IV + τρίγωνο

Δηλαδή οι δύο μηνίσκοι έχουν εμβαδόν ίσο με το τρίγωνο.

"Καὶ οἱ τῶν μηνίσκων δὲ τετραγωνισμοὶ δόξαντες εἶναι τῶν 13v
οὐκ ἐπιπολαίων διαγραμμάτων διὰ τὴν οἰκειότητα τὴν πρὸς τὸν κύκλον ὑφ' Ἱπποκράτους ἐγράφησάν τε πρώτου καὶ κατὰ τρόπον ἔδοξαν ἀποδοθῆναι· διόπερ ἐπὶ πλέον ἁψώμεθά τε καὶ διέλθωμεν. ἀρχὴν μὲν οὖν ἐποιήσατο καὶ πρῶτον ἔθετο τῶν πρὸς αὐτοὺς χρησίμων, ὅτι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει τά τε ὅμοια τῶν κύκλων τμήματα πρὸς ἄλληλα καὶ αἱ βάσεις αὐτῶν δυνάμει. (τοῦτο δὲ ἐδείκνυεν ἐκ τοῦ τὰς διαμέτρους δεῖξαι τὸν αὐτὸν λόγον ἐχούσας δυνάμει τοῖς κύκλοις)" ὅπερ Εὐκλείδης δεύτερον τέθεικεν ἐν τῷ δωδεκάτῳ τῶν Στοιχείων βιβλίῳ, τὴν πρότασιν εἰπὼν οὕτως "οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα" ὡς γὰρ οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους ἔχουσιν, οὕτως καὶ τὰ ὅμοια τμήματα. ὅμοια γὰρ τμήματά ἐστι τὰ τὸ αὐτὸ μέρος ὄντα τοῦ κύκλου, οἷον ἡμικύκλιον ἡμικυκλίῳ καὶ τριτημόριον τριτημορίῳ· διὸ "καὶ γωνίας ἴσας δέχεται τὰ ὅμοια τμήματα. αἱ γοῦν τῶν ἡμικυκλίων πάντων ὀρθαί εἰσι, καὶ ⟨αἱ⟩ τῶν μειζόνων ἐλάττονες ὀρθῶν καὶ τοσούτῳ ὅσῳ μείζονα ἡμικυκλίων τὰ τμήματα, καὶ αἱ τῶν ἐλαττόνων μείζονες καὶ τοσούτῳ ὅσῳ ἐλάττονα τὰ τμήματα.

☛ Οι εκφράσεις «αρχήν εποιήσατο» και «πρώτον έθετο των προς αυτούς χρησίμων» παραπέμπουν σε μια συγκρότηση της γεωμετρίας οιονεί αξιωματική–παραγωγική (δηλ. σε μια **Στοιχείωση**).

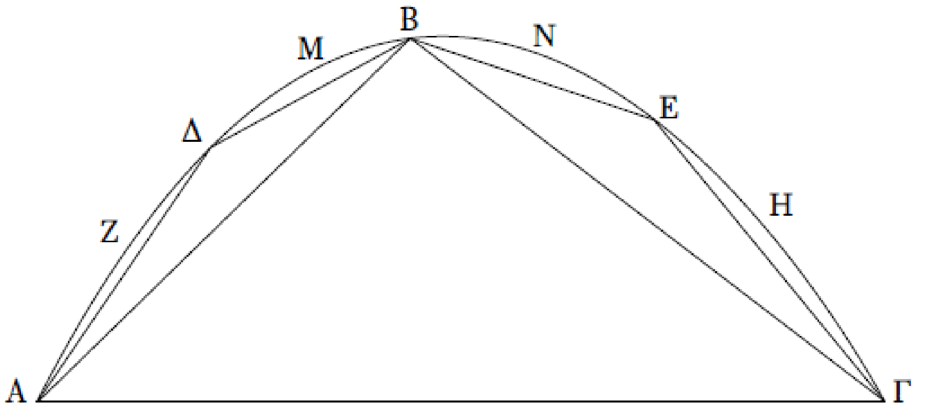
☛ Υπενθύμιση: κατά τον Πρόκλο ο Ιπποκράτης ήταν ο πρώτος που έγραψε ***Στοιχεία***.

Τετραγωνισμοί παραβολής από τον Αρχιμήδη

1ος τρόπος: Γεωμετρικός (εξάντληση)

(βλ. *Τετραγωνισμός Παραβολής (τομής ορθ. Κώνου)*, προτ. 24)

Έστω το παραβολικό χωρίο ΑΔΒΕΓ, όπου Β η κορυφή της παραβολής. Τότε, (ΑΔΒΕΓ) = $\frac{4}{3}$ (ΑΒΓ). Η απόδειξη έχει τη μορφή της διπλής εις άτοπο απαγωγής.

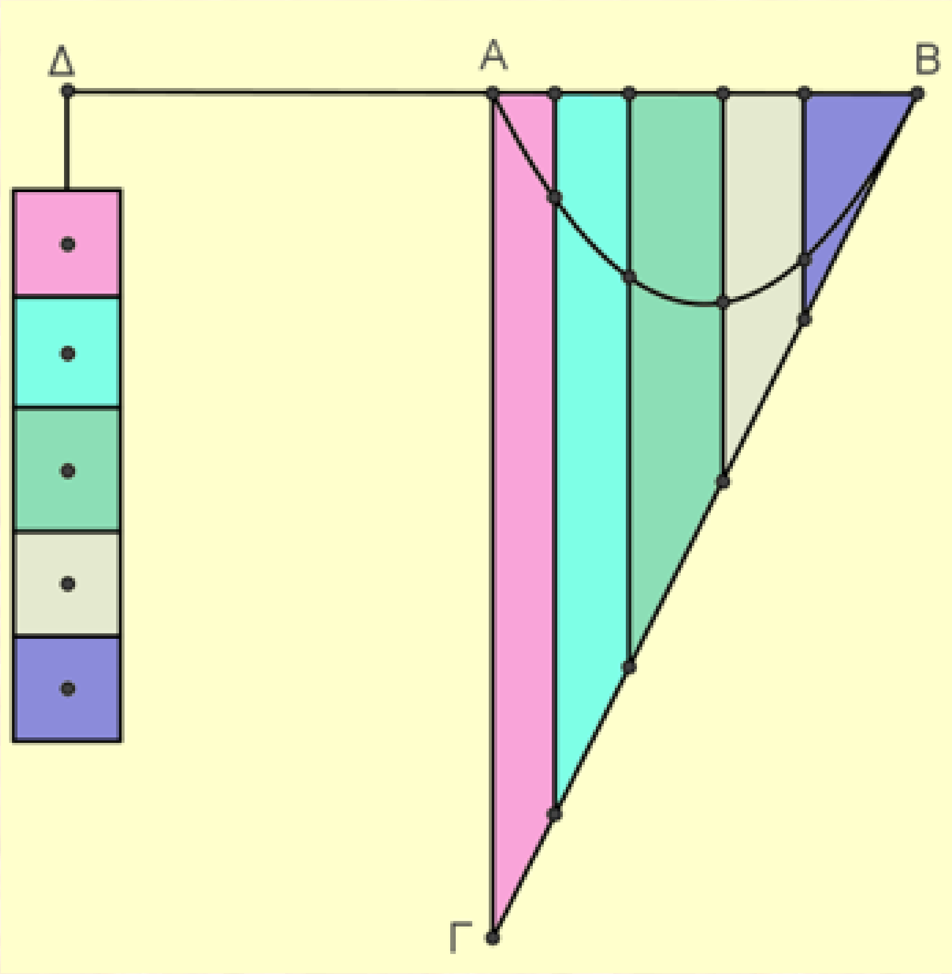


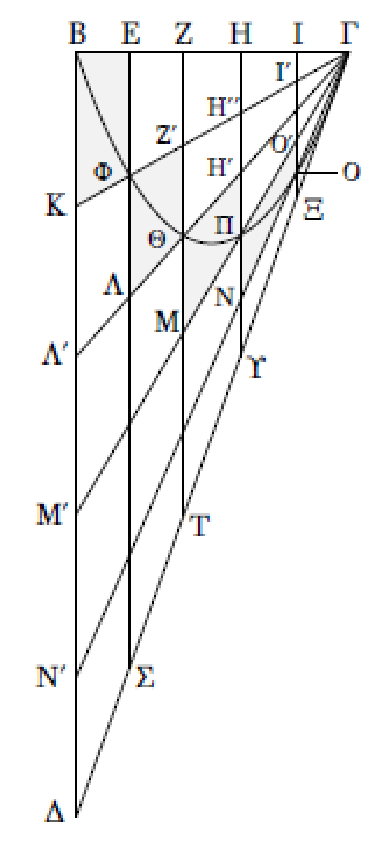
Περίπτωση Α: Έστω ότι (ΑΔΒΕΓ) > $\frac{4}{3}$ (ΑΒΓ).

Περίπτωση Β: Έστω ότι (ΑΔΒΕΓ) < $\frac{4}{3}$ (ΑΒΓ).

2^{ος} τρόπος: Μηχανικός (ζυγός)

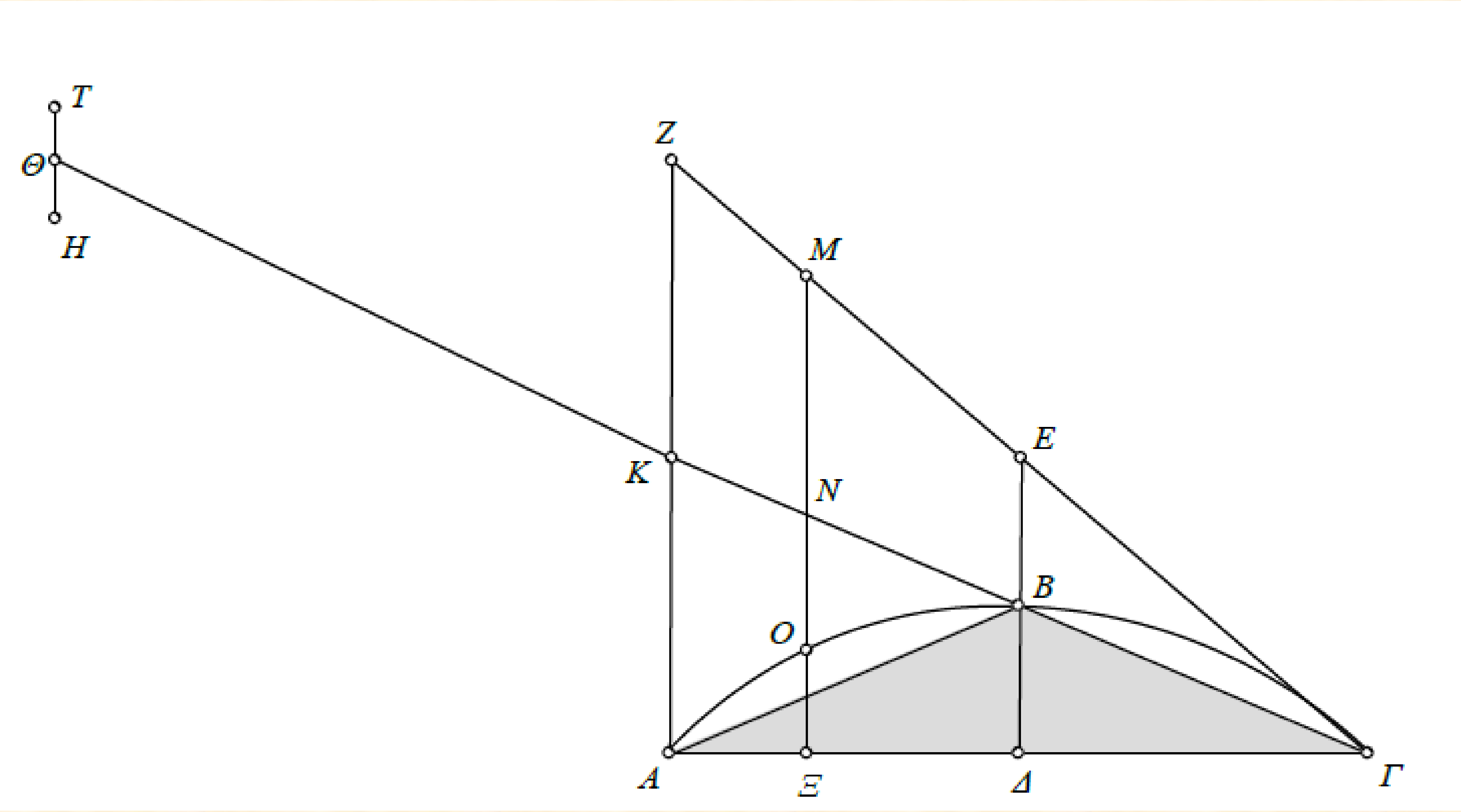
(βλ. *Τετραγωνισμός Παραβολής (τομής ορθ. Κώνου)*, προτ. 14-16)



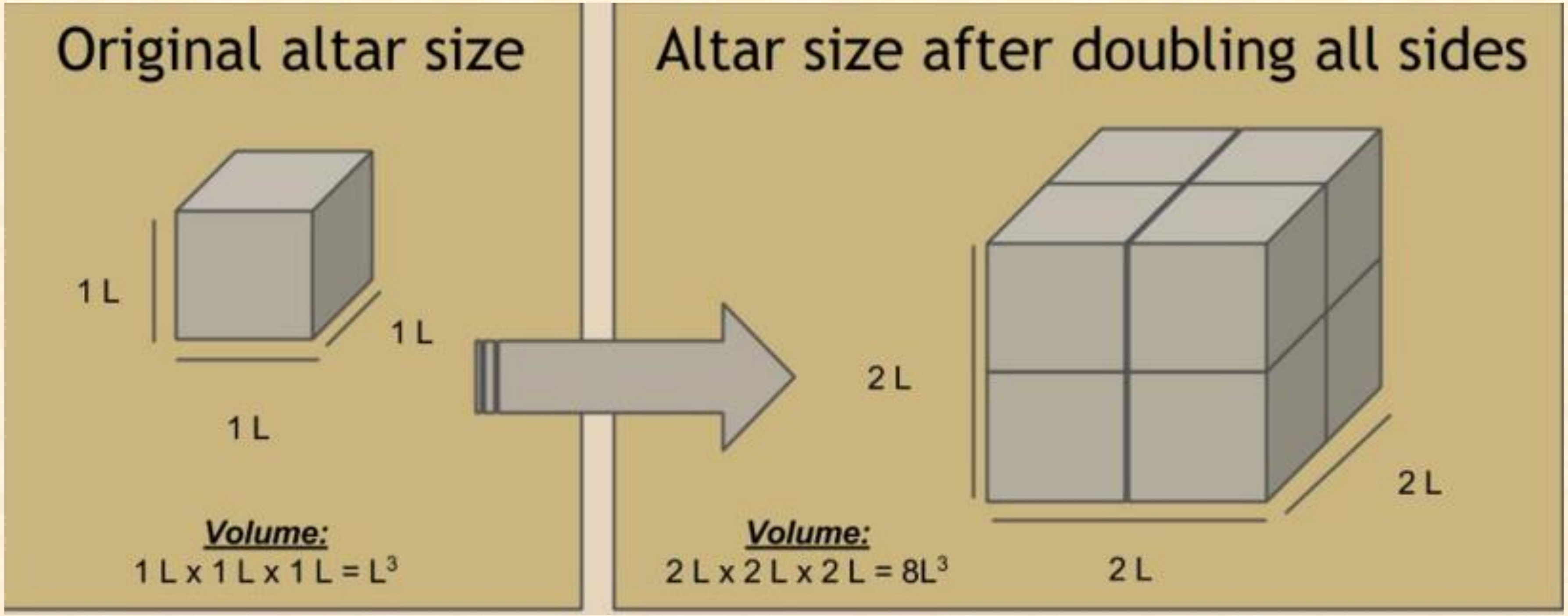


3ος τρόπος: Ευρετικός (αδιαίρετα)

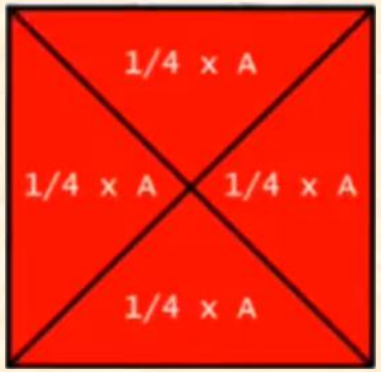
(βλ. προτ. 1, *Μέθοδος*)

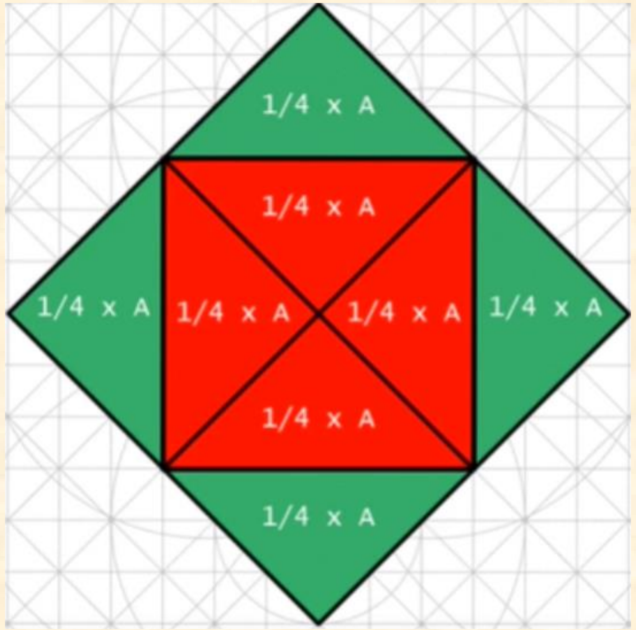


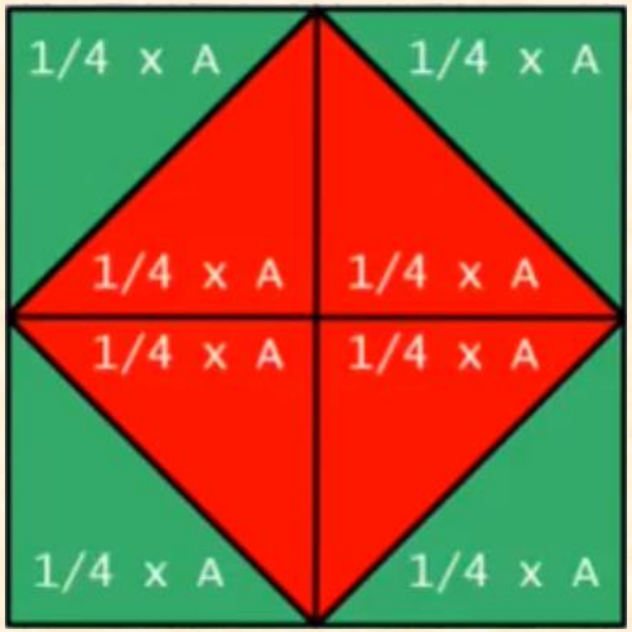
Ο διπλασιασμός του κύβου

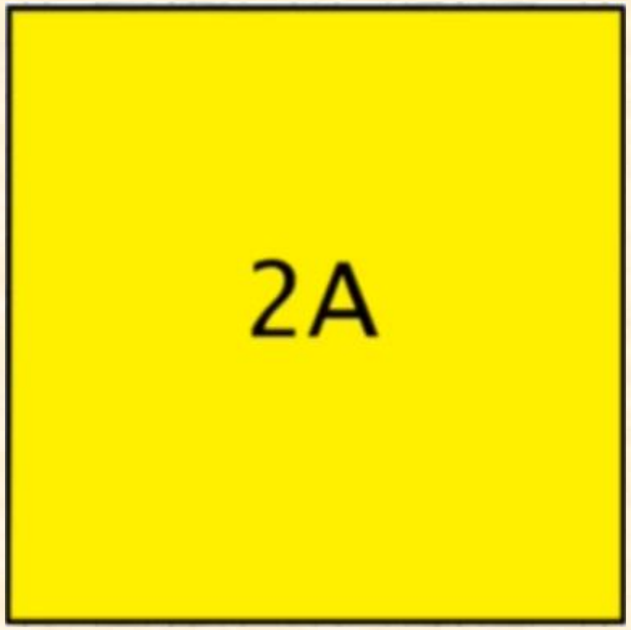


Ας δούμε ένα άλλο πρόβλημα πρώτα: να διπλασιάσουμε ένα τετράγωνο

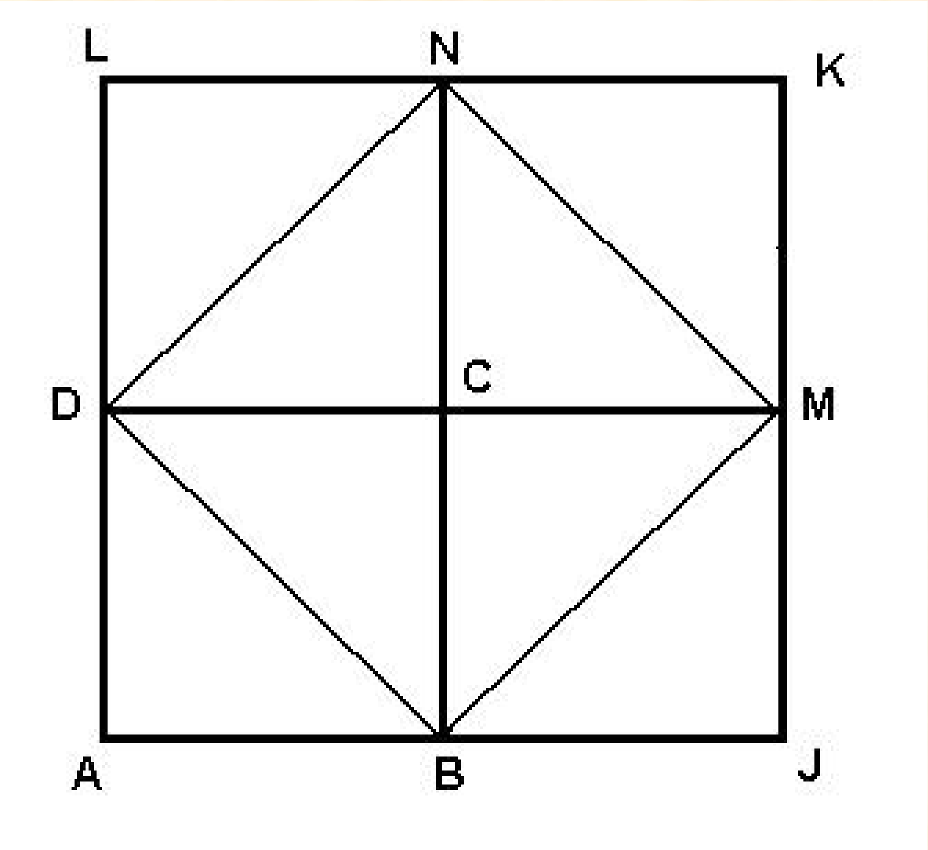








Ο διπλασιασμός του τετραγώνου στον *Μένωνα* του Πλάτωνα



Ο διπλασιασμός του κύβου ή, αλλιώς, το «Δήλιο Πρόβλημα»

1. Μαρτυρία Θέωνος του Σμυρναίου, *Περὶ τῶν κατὰ τὸ μαθηματικὸν χρησίμων εἰς τὴν Πλάτωνος ἀνάγνωσιν* (Expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium), έκδ. E, Hiller, Leipzig, B. G. Teubner, 1878, 2.3–12

Διότι ο Ερατοσθένης αναφέρει στο έργο του που τιτλοφορείται *Πλατωνικός* ότι όταν ο θεός χρησμοδότησε στους κατοίκους της Δήλου να κατασκευάσουν έναν βωμό διπλάσιο του [ήδη] υπάρχοντος, προκειμένου να απαλλαγούν από τον λοιμό, οι αρχιτεχνίτες περιέπεσαν σε μεγάλη αμηχανία προσπαθώντας να βρουν πώς μπορεί ένα στερεό να γίνει διπλάσιο ενός [άλλου] στερεού, και πήγαν να ρωτήσουν τον Πλάτωνα σχετικά με αυτό. Αλλά αυτός είπε σε εκείνους ότι ο θεός έδωσε αυτόν τον χρησμό στους Δηλίους όχι επειδή ήθελε έναν διπλάσιο βωμό, αλλά για να κατακρίνει και να ψέξει τους Έλληνες ότι αμελούν τα μαθηματικά και αδιαφορούν για τη γεωμετρία.

Ἐρατοσθένης μὲν γὰρ ἐν τῷ ἐπιγραφομένῳ Πλατωνικῷ φησιν ὅτι, Δηλίοις τοῦ θεοῦ χρήσαντος ἐπὶ ἀπαλλαγῇ λοιμοῦ βωμὸν τοῦ ὄντος διπλασίονα κατασκευάσαι, πολλὴν ἀρχιτέκτοσιν ἐμπεσεῖν ἀπορίαν ζητοῦσιν ὅπως χρὴ στερεὸν στερεοῦ γενέσθαι διπλάσιον, ἀφικέσθαι τε πευσομένους περὶ τούτου Πλάτωνος. τὸν δὲ φάναι αὐτοῖς, ὡς ἄρα οὐ διπλασίου βωμοῦ ὁ θεὸς δεόμενος τοῦτο Δηλίοις ἐμαντεύσατο, προφέρων δὲ καὶ ὀνειδίζων τοῖς Ἕλλησιν ἀμελοῦσι μαθημάτων καὶ γεωμετρίας ὠλιγωρηκόσιν.

2. Μαρτυρία Ευτοκίου, *Σχόλια στο δεύτερο βιβλίο του* Περί σφαίρας και κυλίνδρου *του Αρχιμήδη* (Commentarii in libros de sphaera et cylindro, ii), έκδ. J. L. Heiberg. *Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii*, iii, Leipzig, B. G. Teubner, 1881, 88.4 – 90.13

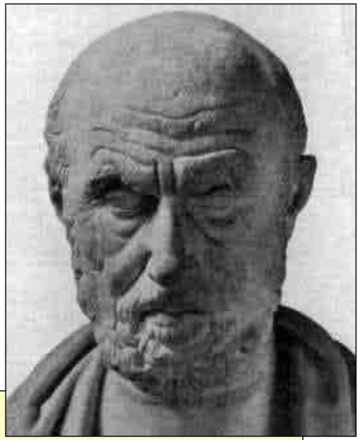
Στον βασιλιά Πτολεμαίο ο Ερατοσθένης απευθύνει χαιρετισμό.

Λέγεται ότι κάποιος από τους αρχαίους τραγικούς ποιητές εμφανίζει τον Μίνωα να κατασκευάζει έναν τάφο για τον [γιο του] Γλαύκο, όταν δε πληροφορήθηκε ότι ο τάφος ήταν σε κάθε πλευρά εκατό πόδες, είπε:

> Μικρό όρισες το λάκκωμα του βασιλικού τάφου.
> Να τον διπλασιάσεις, χωρίς να χαλάσεις το κομψό του σχήμα,
> διπλασιάζοντας κάθε πλευρά του τάφου.

Φαινόταν δε ότι έκανε λάθος. Διότι όταν διπλασιάζονται οι πλευρές, η επιφάνεια γίνεται τετραπλάσια και το στερεό οκταπλάσιο. Οι γεωμέτρες αναζητούσαν λοιπόν με ποιόν τρόπο θα μπορούσε κανείς να διπλασιάσει ένα δεδομένο στερεό, χωρίς αυτό να χάσει το σχήμα του, και αυτό το πρόβλημα ονομαζόταν διπλασιασμός του κύβου· διότι, υποθέτοντας ότι [το στερεό] ήταν κύβος ζητούσαν να τον διπλασιάσουν. Ενώ λοιπόν ήσαν όλοι σε αμηχανία για πολύ καιρό, πρώτος ο Ιπποκράτης ο Χίος σκέφτηκε ότι αν βρεθούν δύο μέσες ανάλογοι, σε συνεχή αναλογία, μεταξύ δύο ευθειών, η μεγαλύτερη από τις οποίες είναι διπλάσια της μικρότερης, τότε ο κύβος θα διπλασιασθεί· αλλά [με την επινόηση αυτή] η αμηχανία περιέπεσε σε άλλη, όχι μικρότερη αμηχανία. Έπειτα από καιρό, λέγεται ότι κάποιοι Δήλιοι, στους οποίους ένας χρησμός είχε επιβάλει να διπλασιάσουν έναν από τους βωμούς τους, αφού περιέπεσαν στην ίδια αμηχανία, απέστειλαν εκπροσώπους στους γεωμέτρες της Ακαδημίας του Πλάτωνα και τους ζήτησαν να λύσουν το πρόβλημα. Αυτοί καταπιάστηκαν δραστήρια με αυτό και ζητούσαν να βρουν δύο μέσες [αναλόγους] σε δύο δοθείσες [ευθείες], λέγεται δε ότι ο Αρχύτας ο Ταραντίνος βρήκε [μια λύση] μέσω των ημικυλίνδρων και ο Εύδοξος μέσω των λεγομένων καμπύλων γραμμών. Αλλά συνέβη όλοι αυτοί να έχουν γράψει κατά τρόπο αποδεικτικό και δεν μπορούσαν να δώσουν μια πρακτική κατασκευή που να μπορεί να χρησιμοποιηθεί, εκτός από τον Μέναιχμο, ώς έναν μικρό βαθμό, και αυτά με δυσκολία. Εμείς, όμως, βρήκαμε μια εύκολη μηχανική λύση, με την οποία θα [μπορούμε να] βρούμε σε δύο δοθείσες [ευθείες] όχι μόνο δύο μέσες [αναλόγους] αλλά όσες ζητήσει κανείς.

Ιπποκράτης ο Χίος
(ήκμασε περί το 425 π.Χ.)



Σύνοψη

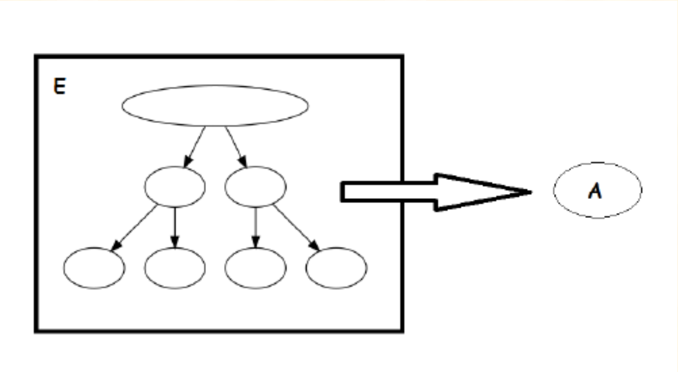
1) Ο πρώτος που συνέγραψε *Στοιχεία της γεωμετρίας*.
2) Ανήγαγε το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου στο ισοδύναμο πρόβλημα της εύρεσης δύο μέσων αναλόγων, σε συνεχή αναλογία, μεταξύ δύο ευθυγράμμων τμημάτων το ένα εκ των οποίων είναι διπλάσιο του άλλου.
3) Τετραγώνισε ειδικές περιπτώσεις μηνίσκων, στην προσπάθεια του να επιλύσει το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου.

Δύο απορίες:

1) Τι σημαίνει «αναγωγή/απαγωγή» ενός προβλήματος σε ένα άλλο;

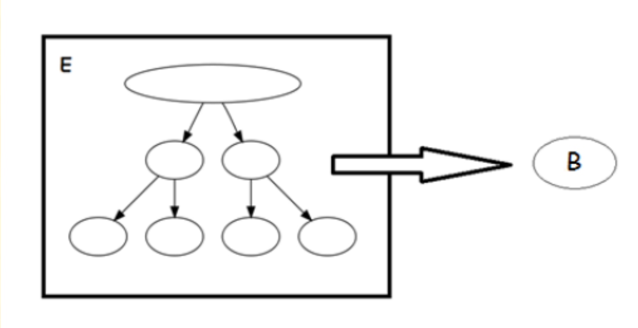
2) Τι είναι η μέση ανάλογος;

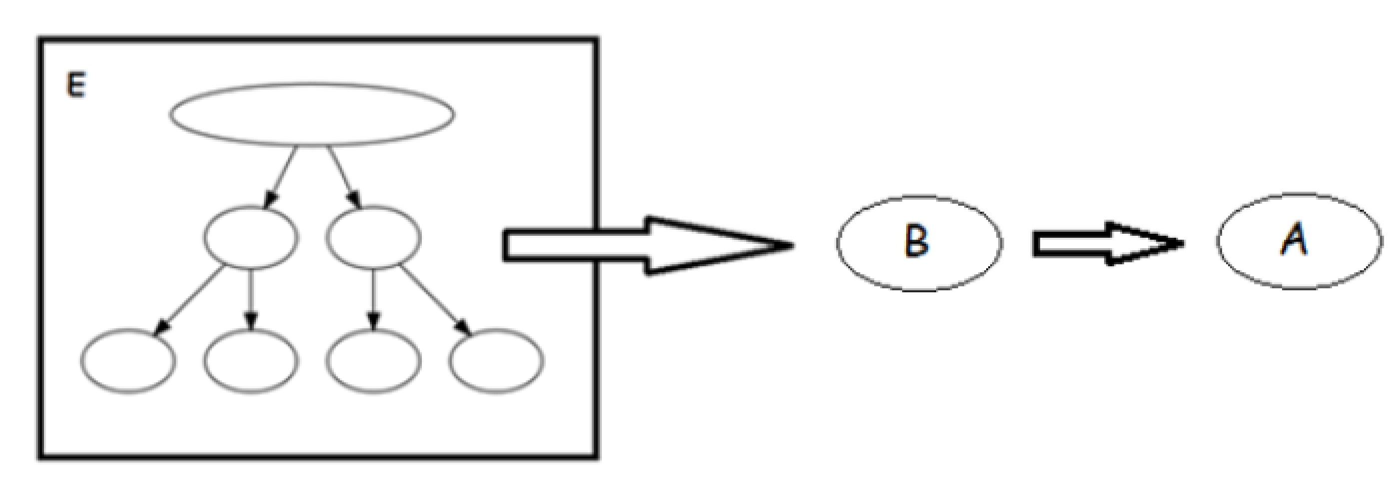
Ἡ δὲ ἀπαγωγὴ μετάβασίς ἐστιν ἀπ' ἄλλου προβλήματος ἢ θεωρήματος ἐπ' ἄλλο, οὗ γνωσθέντος ἢ πορισθέντος καὶ τὸ προκείμενον ἔσται καταφανές, οἷον ὥσπερ καὶ τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου ζητηθέντος μετέθεσαν τὴν ζήτησιν εἰς ἄλλο, ᾧ τοῦτο ἕπεται, τὴν εὕρεσιν τῶν δύο μέσων, καὶ τὸ λοιπὸν ἐζήτουν, πῶς ἂν δύο δοθεισῶν εὐθειῶν δύο μέσαι ἀνάλογον εὑρεθεῖεν. πρῶτον δέ φασι τῶν ἀπορουμένων διαγραμμάτων τὴν ἀπαγωγὴν ποιήσασθαι Ἱπποκράτην τὸν Χῖον, ὃς καὶ μηνίσκον ἐτετραγώνισε καὶ ἄλλα πολλὰ κατὰ γεωμετρίαν εὗρεν εὐφυὴς περὶ τὰ διαγράμματα εἴπερ τις ἄλλος γενόμενος.



For various reasons, this task might not be easy or even possible; thus, the geometer seeks another proposition, B, from which A is deduced:[41]

Following this, the geometer tries to deduce B from the network; viz. to show that E(e_n) --> B:[42]





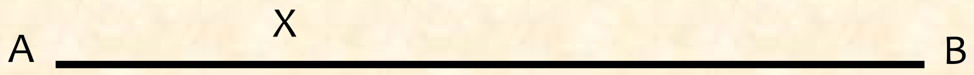
Μια αναφορά: επιστροφή στον *Μένωνα* του Πλάτωνα

Βασικό Ερώτημα: Είναι η Αρετή Διδακτή;

Αλλάζω το αρχικό ερώτημα: Είναι η Αρετή γνώση;

Ἐννοῶ τὸ «ἂς ὑποθέσωμε» ὅπως ἀκριβῶς καὶ οἱ γεωμέτρες
πολλὲς φορές: ὅταν κανεὶς τοὺς ἐρωτήση γιὰ μιὰ ἐπιφάνεια,
λόγου χάρη, ἂν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐγγραφῆ σὲ ὡρισμένο κύ-
κλο ὡρισμένη ἐπιφάνεια, ἐνῶ εἶναι τριγωνική, ἕνας γεωμέ- 87a
τρης θὰ ἔλεγε: δὲν ξέρω ἀκόμη ἂν τούτη ἡ ἐπιφάνεια
μπορῆ νὰ ἐγγραφῆ, νομίζω ὅμως ὅτι χρήσιμο εἶναι γιὰ τὸ
ζήτημα τοῦτο νὰ ξεκινήσω ἀπὸ κάποια βάση (ὑπόθεση)
σὰν αὐτὴν ἐδῶ: ἂν τούτη ἡ τριγωνικὴ ἐπιφάνεια εἶναι τέ-
τοιας λογῆς, ὥστε ἀφοῦ σχηματίσω ἕνα παραλληλόγραμμο
ἀπὸ τὴ βάση της, νὰ τῆς λείψη τόση ἐπιφάνεια, ὅση θὰ προσ-
τεθῆ μὲ τὸ νέο σχῆμα, τότε μοῦ φαίνεται ὅτι ἄλλο συμβαί-
νει μὲ τὴν τριγωνικὴ ἐπιφάνεια (1), καὶ ἄλλο πάλι, ἂν εἶναι
ἀδύνατον νὰ παρουσιασθοῦν σ' αὐτὴν αὐτὰ ποὺ εἶπα (2). Ξε-
κινώντας λοιπὸν ἀπὸ μιὰ βάση θὰ σοῦ πῶ τί γίνεται μὲ τὴν
ἐγγραφὴ τοῦ τριγώνου στὸν κύκλο, ἂν εἶναι ἀδύνατη ἢ ὄχι.

Τι είναι η μέση ανάλογος;

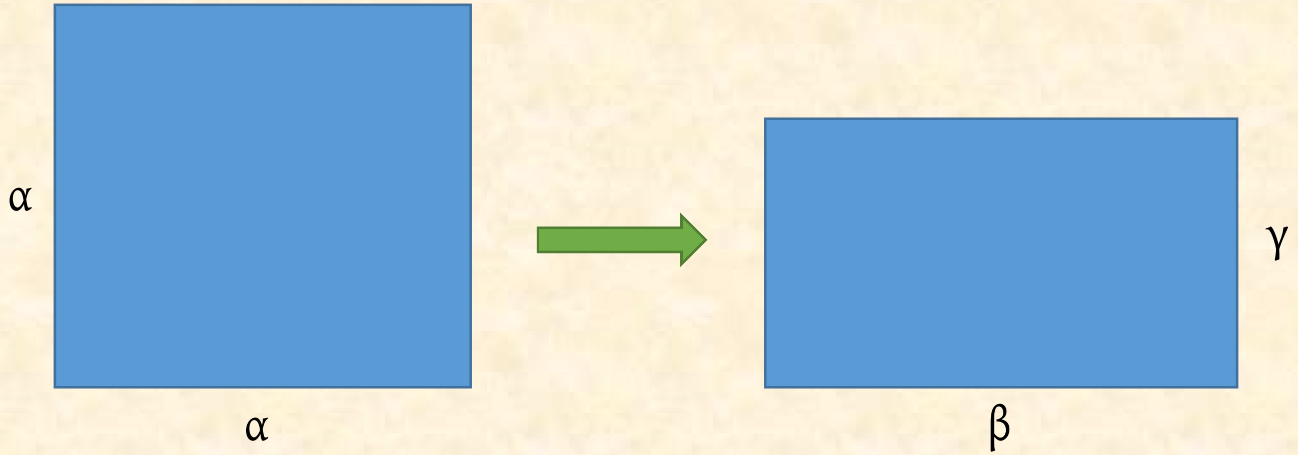


$$\frac{AX}{XB} = \frac{XB}{AB}$$

- Αν δηλαδή έχουμε τους αριθμούς 4 και 9 ποιος αριθμός είναι η μέση ανάλογος;

$$\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$$

«τι εστι το τετραγωνίζειν, ότι μέσης εύρεσις»



$$a^2 = \beta \cdot \gamma$$

$$\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Οι δύο μέσοι ανάλογοι;

$$a : x = x : y = y : b$$

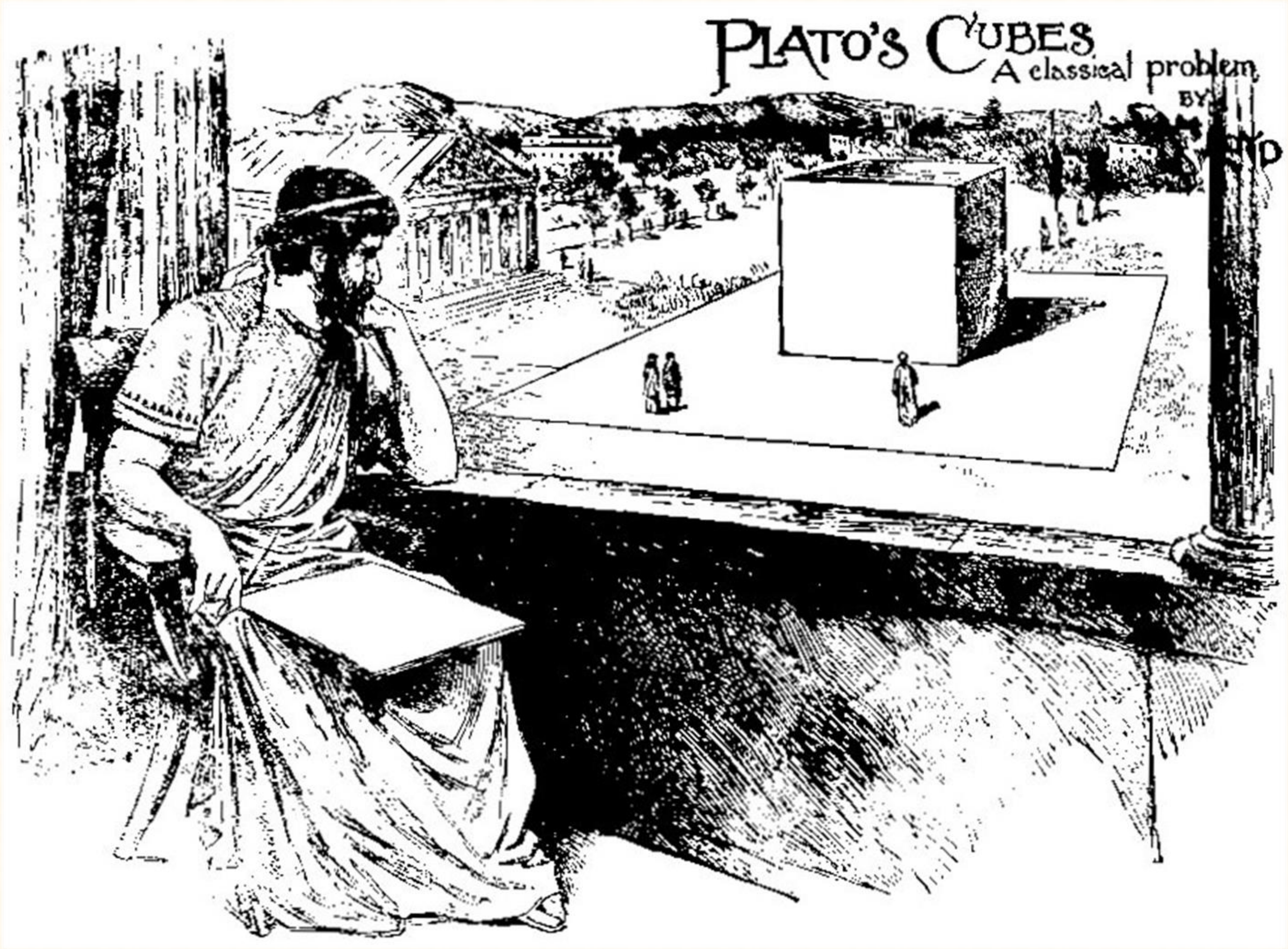
$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$$

Η αναγωγή του προβλήματος του διπλασιασμού του κύβου στο πρόβλημα της κατασκευής δύο μέσων αναλόγων

Ἡ δὲ ἀπαγωγὴ μετάβασίς ἐστιν ἀπ' ἄλλου προβλήματος ἢ θεωρήματος ἐπ' ἄλλο, οὗ γνωσθέντος ἢ πορισθέντος καὶ τὸ προκείμενον ἔσται καταφανές, οἷον ὥσπερ καὶ τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου ζητηθέντος μετέθεσαν τὴν ζήτησιν εἰς ἄλλο, ᾧ τοῦτο ἕπεται, τὴν εὕρεσιν τῶν δύο μέσων, καὶ τὸ λοιπὸν ἐζήτουν, πῶς ἂν δύο δοθεισῶν εὐθειῶν δύο μέσαι ἀνάλογον εὑρεθεῖεν. πρῶτον δέ φασι τῶν ἀπορουμένων διαγραμμάτων τὴν ἀπαγωγὴν ποιήσασθαι Ἱπποκράτην τὸν Χῖον, ὃς καὶ μηνίσκον ἐτετραγώνισε καὶ ἄλλα πολλὰ κατὰ γεωμετρίαν εὗρεν εὐφυὴς περὶ τὰ διαγράμματα εἴπερ τις ἄλλος γενόμενος.

Με σύγχρονους όρους: Αν $a : x = x : y = y : b$ και $b = 2a$ τότε $\mathbf{x^3 = 2a^3}$

Το Δήλιο Πρόβλημα

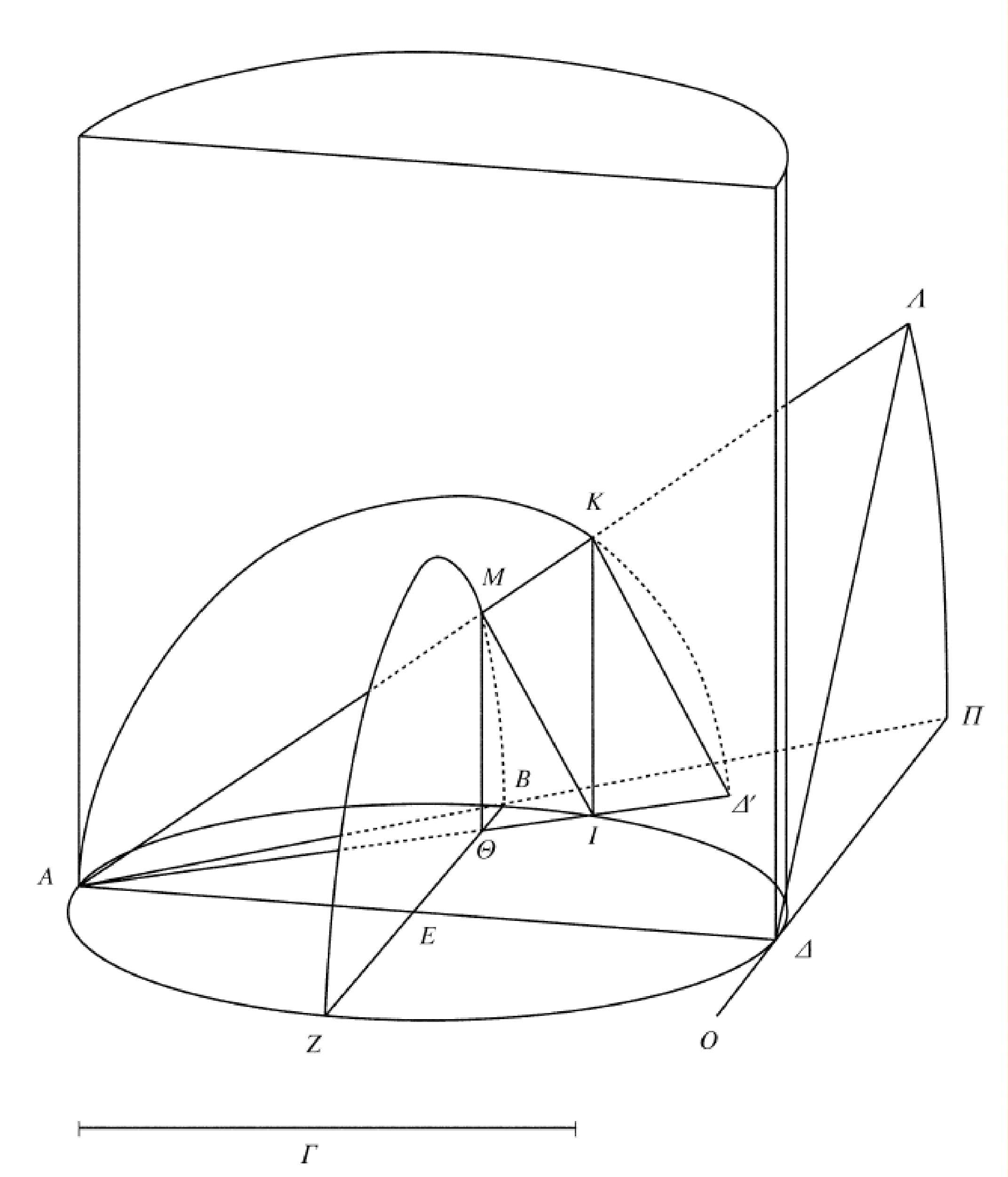


Και όταν αυτοί [οι γεωμέτρες της Ακαδημίας] εργάστηκαν με επιμέλεια και αναζήτησαν τον τρόπο κατασκευής των δυο μέσων αναλόγων των δεδομένων ευθυγράμμων τμημάτων, λέγεται ότι ο Αρχύτας ο Ταραντίνος τον ανακάλυψε χρησιμοποιώντας ημικυλίνδρους ενώ ο Εύδοξος [το έλυσε] μέσω των λεγόμενων «καμπύλων γραμμών». Ωστόσο, όλοι τους έλυσαν το πρόβλημα με αποδεικτικό τρόπο, αλλά δεν ήταν σε θέση να το κατασκευάσουν φυσικά ή να το θέσουν σε λειτουργία, με εξαίρεση σε μικρό βαθμό τον Μέναιχμο, που το έκανε με μεγάλη δυσκολία.

Ο Πλάτωνας αγανάκτησε μαζί τους και θεώρησε ότι αυτοί έχασαν και διέφθειραν το αγαθό της γεωμετρίας, γιατί από τα ασώματα και νοητά αυτοί ξέπεσαν στα αισθητά, και η γεωμετρία κατάντησε μηχανική

Πλούταρχος, *Β. Μαρχ.* 14.11.1-5

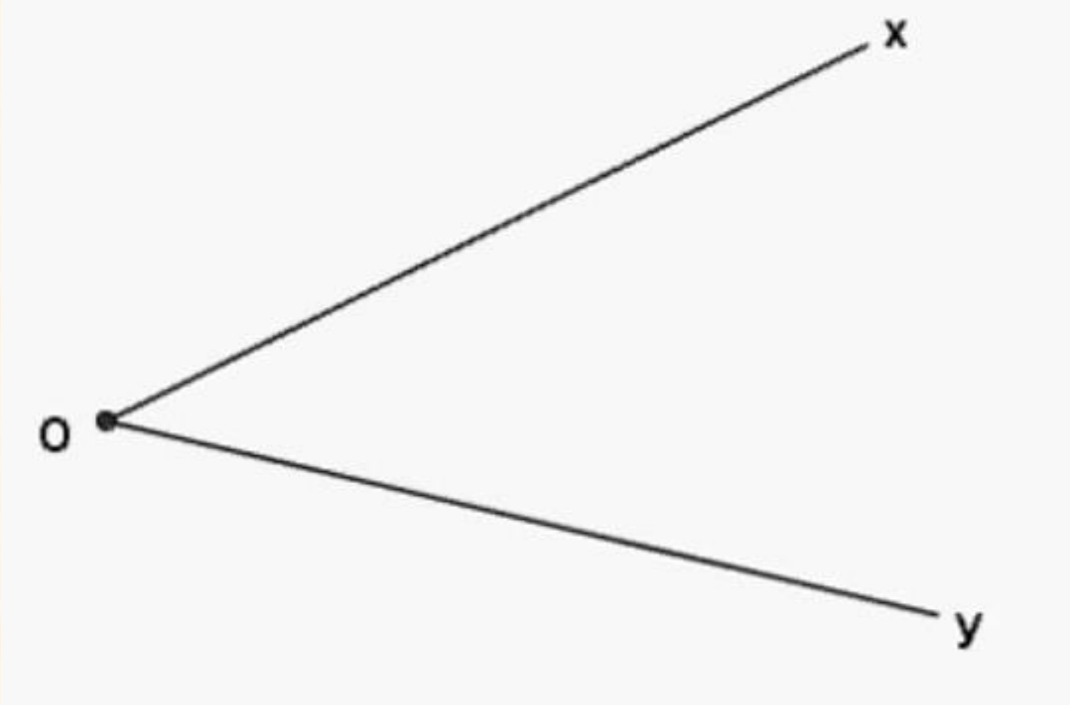
- Ο Ευτόκιος (σχολιαστής του Αρχιμήδη) διασώζει δώδεκα λύσεις του «Δήλιου προβλήματος».
- Αποδίδονται σε διάφορους συγγραφείς, π.χ. Ιπποκράτης, Αρχύτας, Πλάτων, Μέναιχμος, Αρχιμήδης, Ερατοσθένης, Απολλώνιος, Νικομήδης, Ήρων, Διοκλής, Πάππος.
- Σύμφωνα με τον Ερατοσθένη, τρεις από τους συνεργάτες του Πλάτωνα επεξεργάστηκαν λύσεις για το Δήλιο πρόβλημα: Ο Αρχύτας «μέσω ημικυλίνδρων», ο Εύδοξος «μέσω καμπύλων γραμμών» και ο Μέναιχμος «μέσω των τριάδων που αποκόπτονται από τον κώνο».
- Η κατασκευή του Αρχύτα είναι ένα εντυπωσιακό κατόρθωμα στερεομετρικής ενόρασης.

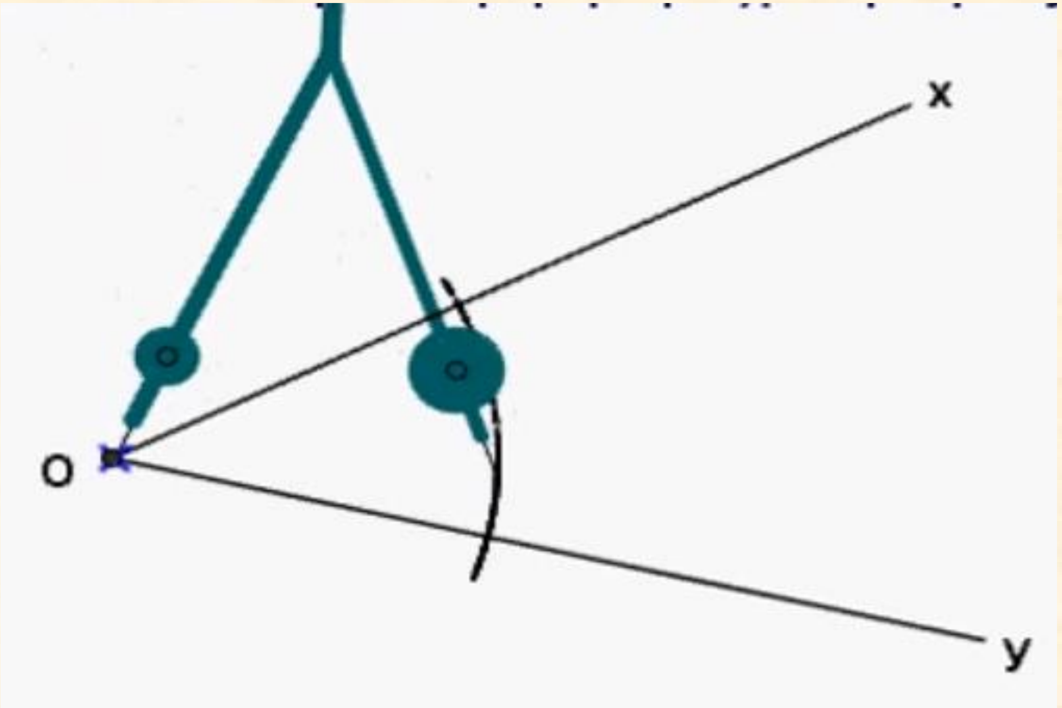


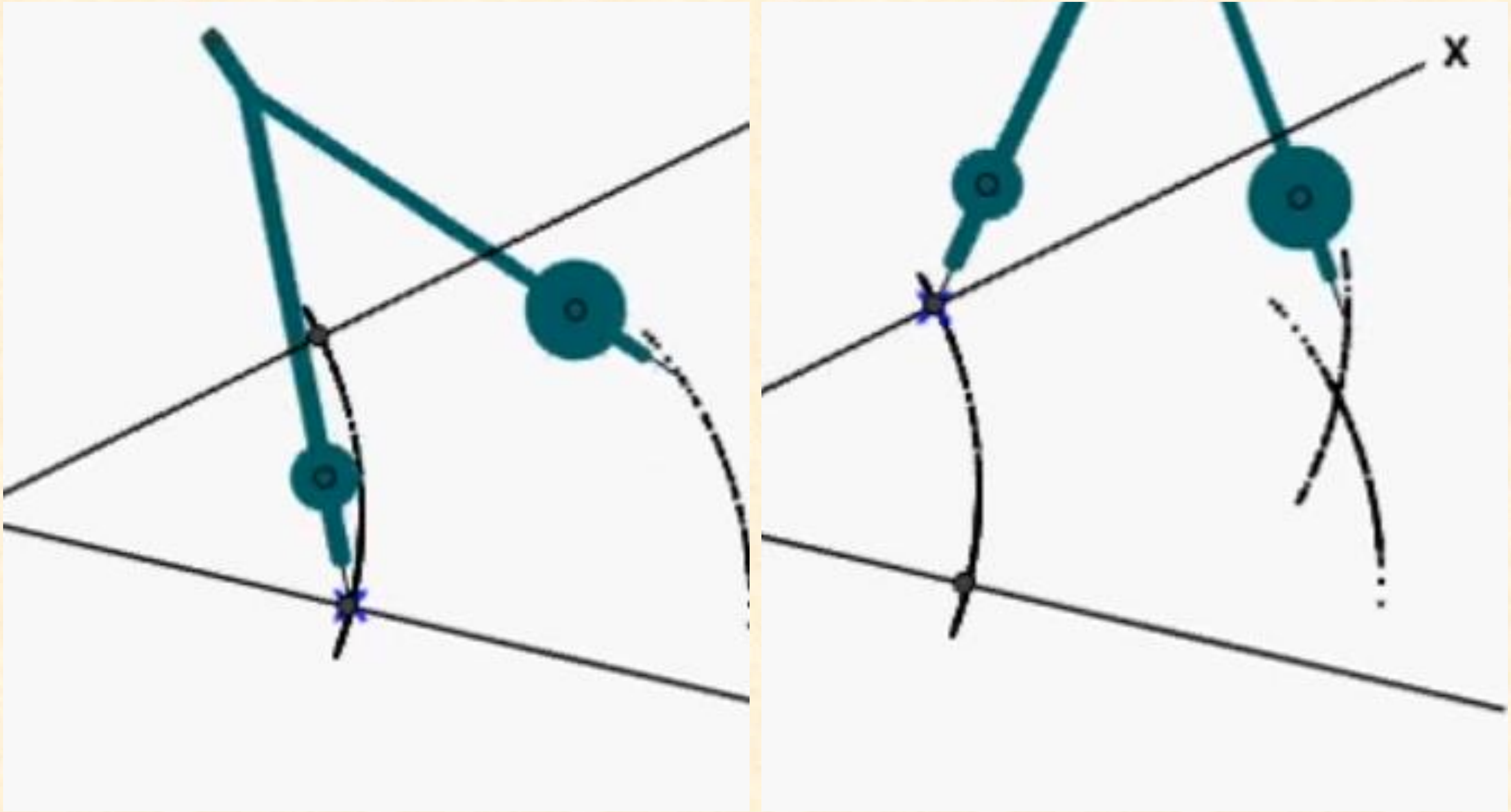
Εάν, ω αγαθέ, θέλεις να επιτύχεις κύβο διπλάσιο ενός μικρού ή θέλεις να μετασχηματίσεις με κομψό τρόπο κάθε άλλο στερεό σώμα, αυτό είναι στο χέρι σου και θα μπορέσεις να μετρήσεις και μάντρα ή λάκκο ή ευρύ κύτος κοίλου πηγαδιού, αν βρεις δύο μέσες αναλόγους, αφού συμπεριλάβεις μεταξύ δύο κανόνων συνδρομείς, οι τομές των οποίων να συγκλίνουν προς τα άκρα των τερμάτων τους. Να μην ζητάς να το πετύχεις αυτό με τα δυσμήχανα έργα των κυλίνδρων του Αρχύτα, ούτε να θέλεις να το βρεις τέμνοντας τον κώνο κατά τις τριάδες του Μεναίχμου, ούτε αν κατασκευάζεται κάποιο είδος καμπύλων γραμμών, όπως περιγράφεται από τον θεοσεβή Εύδοξο. Διότι με αυτή τη συσκευή μπορείς, ξεκινώντας από μια μικρή βάση να βρεις μυριάδες μέσων αναλόγων ευκολότερα. Είσαι ευτυχής Πτολεμαίε διότι, απολαμβάνοντας με το παιδί σου τις νεανικές διασκεδάσεις, συ ο ίδιος χάρισες σ' αυτό όλα όσα είναι αγαπητά και στις μούσες και στους βασιλείς. Σε ό,τι αφορά δε στο μέλλον, ουράνιε Ζευ, μακάρι το παιδί σου να δεχθεί από το χέρι σου και τα σκήπτρα. Και αυτά μεν ας γίνουν έτσι, είθε δε όποιος βλέπει το ανάθημα αυτό να λέει ότι αυτό είναι έργο του Ερατοσθένη του Κυρηναίου.

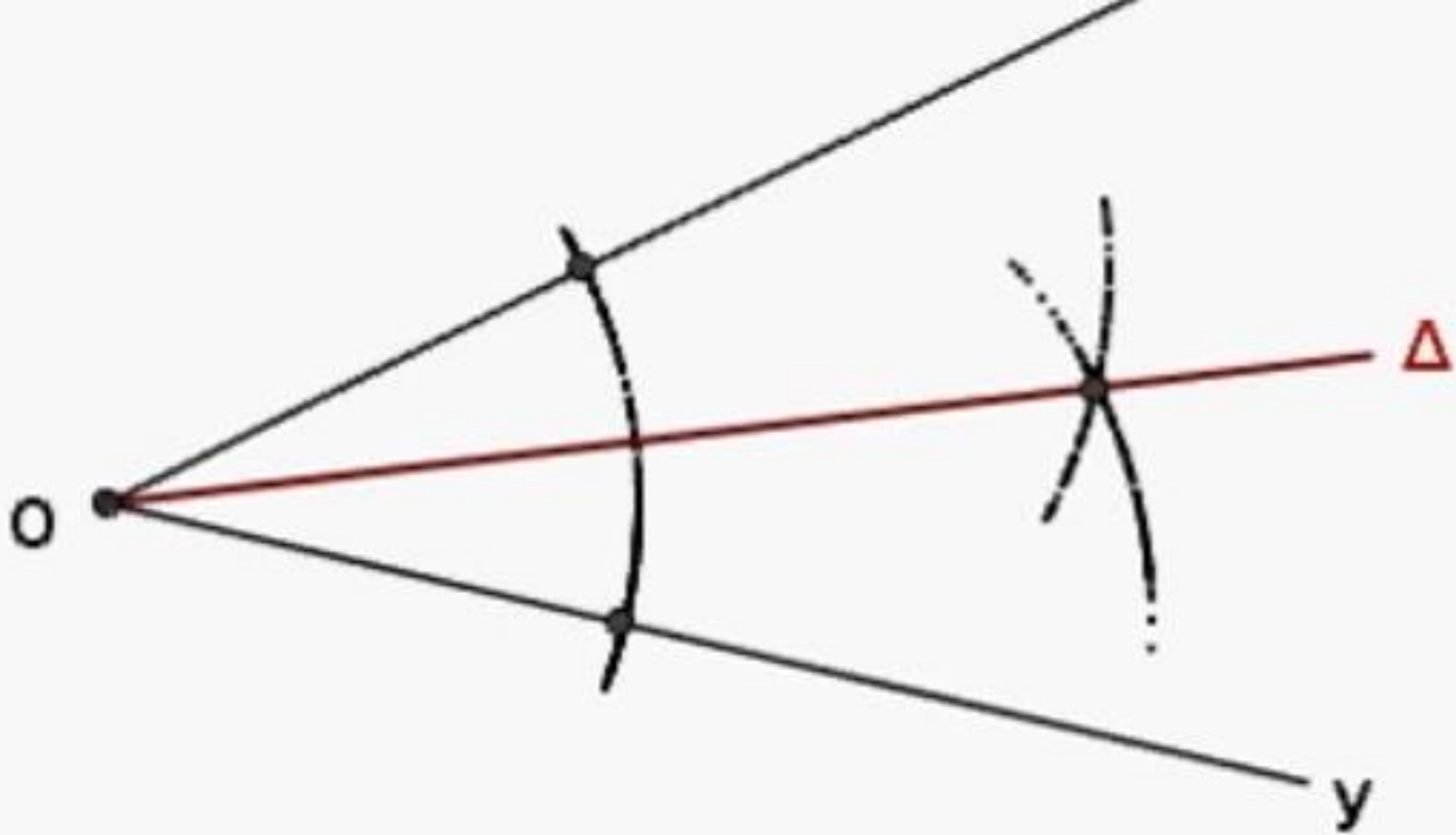
Η τριχοτόμηση της γωνίας

Ας δούμε ένα άλλο πρόβλημα πρώτα: Τη διχοτόμηση της γωνίας






X

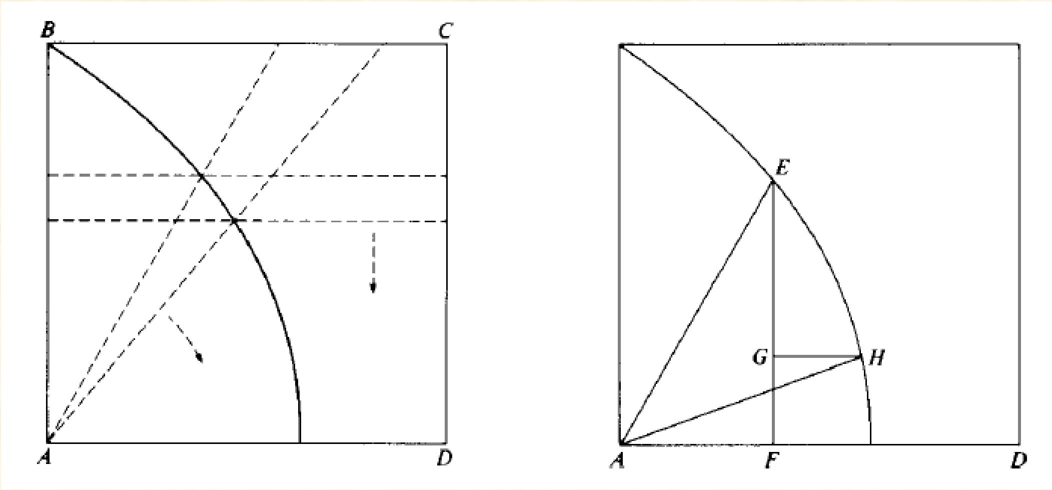


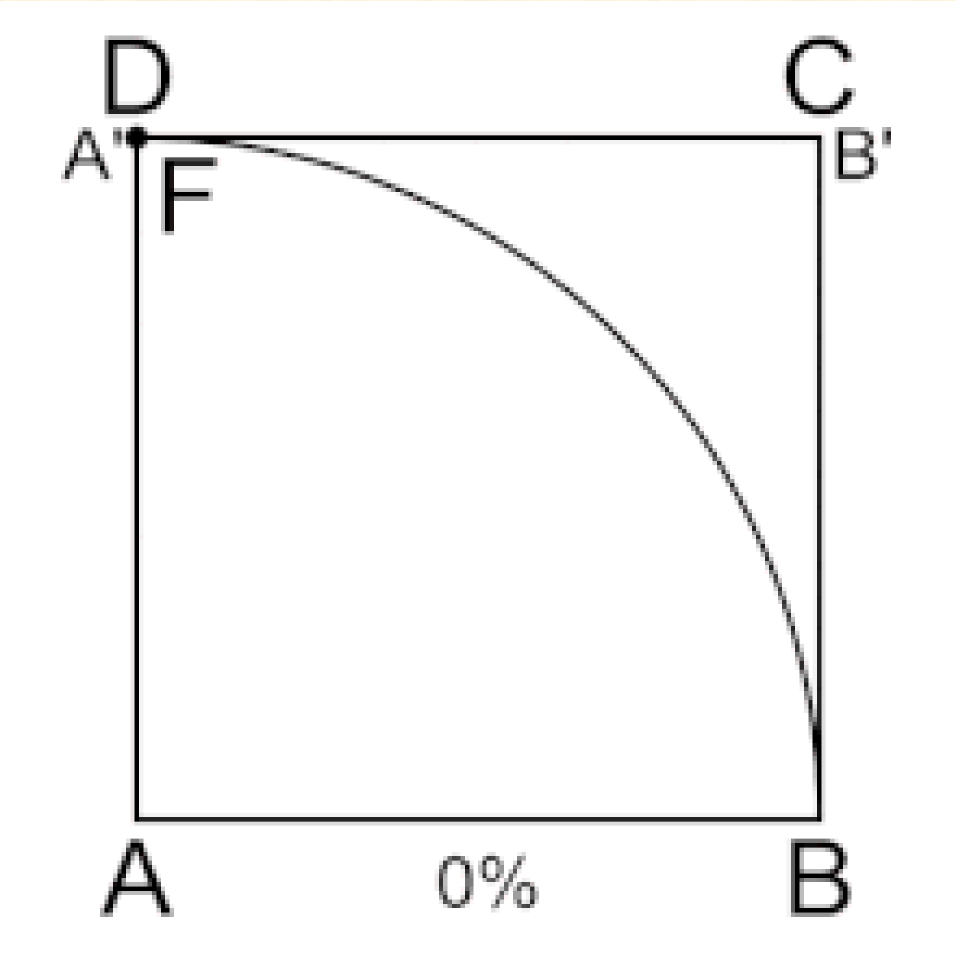
O
Δ
y

- Γιατί είναι σημαντικό να ξέρουμε να φτιάχνουμε συγκεκριμένες γωνίες;

Η τριχοτόμηση της γωνίας

- Δεν ξέρουμε πότε ξεκίνησε η ενασχόληση με το πρόβλημα, αλλά γρήγορα οι αρχαίοι Έλληνες στράφηκαν σε γραμμές πέραν της ευθείας και του κύκλου.
- Η πρώτη προσπάθεια έγινε από τον Ιππία τον Ηλείο. Επίσης καταγράφονται οι λύσεις του Αρχιμήδη, του Νικομήδη και του Πάππου.
- Η αρχαιότερη γνωστή μέθοδος για την τριχοτόμηση μιας γωνίας είναι μέσω μιας καμπύλης που θα την ονομάζουμε τριχοτομούσα. Η κατασκευή περιγράφεται από τον Πάππο: Ξεκινώντας από το τετράγωνο ΑΒΓΔ ας φαντασθούμε την ευθεία ΒΓ να μετατοπίζεται παράλληλα με σταθερή ταχύτητα προς τα κάτω μέχρι να συμπέσει με την ΑΔ και, ταυτόχρονα, την ευθεία ΑΒ να περιστρέφεται ομαλά, εντός του τετραγώνου, γύρω από το σταθερό άκρο Α μέχρι να συμπέσει και αυτή, στον αυτό χρόνο, με την ΑΔ. Η τριχοτομούσα είναι η καμπύλη που διαγράφει το σημείο τομής των δύο κινουμένων ευθειών (βλ. σχήμα αριστερά).




D
C
A''
F
B'
A
0%
B

λα΄. Δυσαρεστεῖται δὲ αὐτῇ ὁ Σπόρος εὐλόγως διὰ ταῦτα.

πρῶτον μὲν γὰρ πρὸς ὃ δοκεῖ χρειώδης εἶναι πρᾶγμα, τοῦτ' ἐν ὑποθέσει λαμβάνει. πῶς γὰρ δυνατόν, δύο σημείων ἀρξαμένων ἀπὸ τοῦ Β κινεῖσθαι, τὸ μὲν κατ' εὐθείας ἐπὶ τὸ Α, τὸ δὲ κατὰ περιφερείας ἐπὶ τὸ Δ ἐν ἴσῳ χρόνῳ συναποκαταστῆσαι μὴ πρότερον τὸν λόγον τῆς ΑΒ εὐθείας πρὸς τὴν ΒΕΔ περιφέρειαν ἐπιστάμενον; ἐν γὰρ τούτῳ τῷ λόγῳ καὶ τὰ τάχη τῶν κινήσεων ἀνάγκη εἶναι.