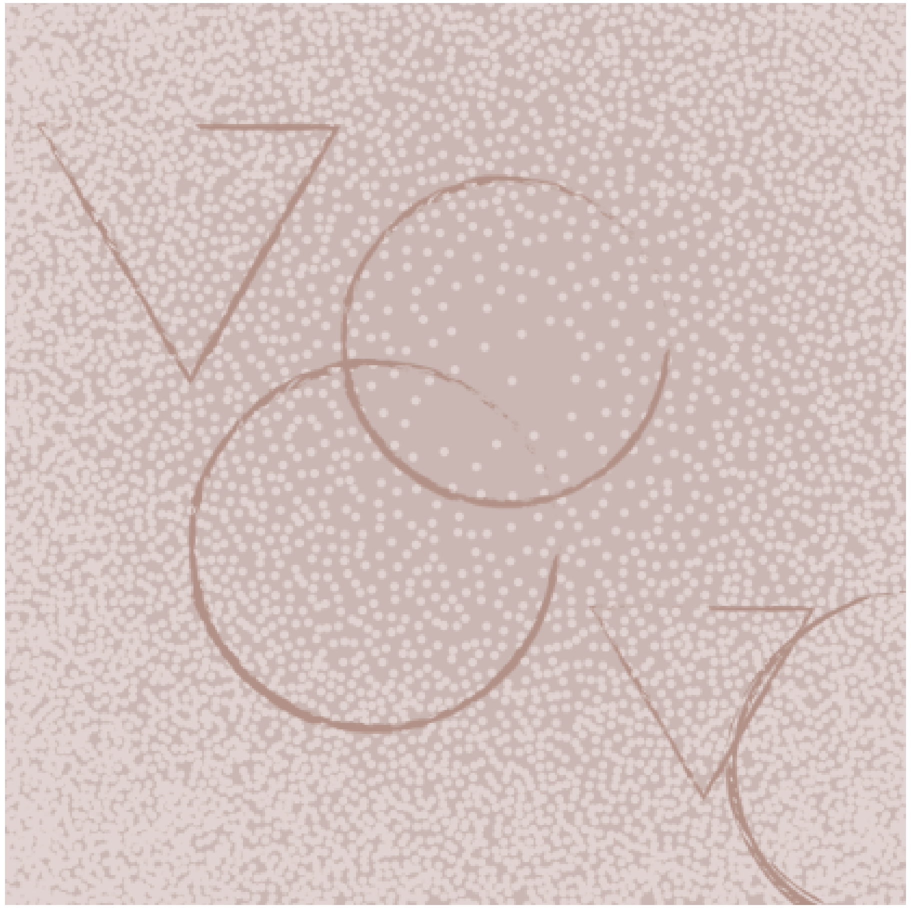


Το μεταπτυχιακό μάθημα

Ιστορία των Μαθηματικών (Υ16)

(Τετ. 18:00 - 21:00, Αίθ. Β)

προσφέρει μια επισκόπηση των πιο επιδραστικών μαθηματικών ιδεών που αναπτύχθηκαν από την αρχαιότητα έως και τους νεωτερικούς χρόνους στον ευρύτερο χώρο της Μεσογείου. Παράλληλα, εξετάζει τον ρόλο που διαδραμάτισαν οι κοινωνικοί, θεσμικοί και πολιτισμικοί παράγοντες στην εξέλιξη της μαθηματικής σκέψης και, αντιστρόφως, τους τρόπους με τους οποίους οι μαθηματικές ιδέες επηρέασαν την κοινωνία και τον πολιτισμό. Σε ιστοριογραφικό επίπεδο, στόχος του μαθήματος είναι να βοηθήσει τις φοιτήτριες και τους φοιτητές του ΙΦΕΤ να αναπτύξουν κριτική σκέψη ως προς τους τρόπους με τους οποίους κατανοείται και καταγράφεται η ιστορία των Μαθηματικών.

Μ. Σιάλαρος (msialaros@phs.uoa.gr)

https://en-uoa-gr.academia.edu/MichalisSialaros
https://www.ancientscienceportal.com
https://www.instagram.com/ancient_science_portal

Οι πηγές μας για τα αιγυπτιακά μαθηματικά

Υλικές πηγές

- Τοιχογραφίες και ευρήματα σε νεκροταφεία.
- Κατά την περίοδο του Παλαιού Βασιλείου (~2650-2150) έχουμε μεγάλα έργα (π.χ. η Πυραμίδα της Γκίζας). Μπορούν αυτά να γίνουν χωρίς μαθηματική υποστήριξη; Και αν όχι, τι είδους μαθηματικά χρειάζονται;

Χειρόγραφες πηγές

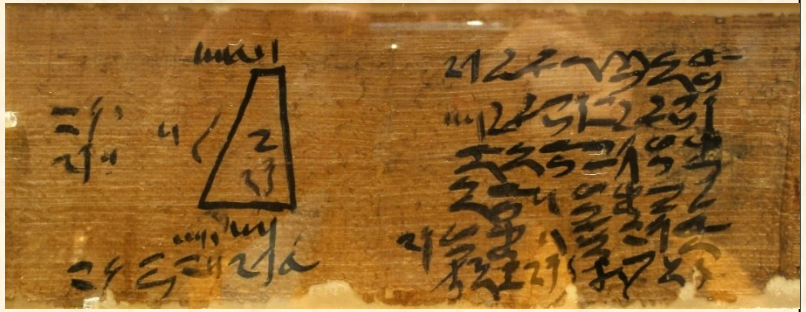
- Ο πάπυρος Rhind (~1650): 84 προβλήματα. Η πίσω όψη του παπύρου περιέχει τον πίνακα 2:ν
- Ο πάπυρος της Μόσχας (~1850): 25 προβλήματα.
- Ο δερμάτινος κύλινδρος (~1650): 26 αθροίσματα αιγυπτιακών κλασμάτων (μοναδιαίων).
- Ο πάπυρος Kahun και ο πάπυρος του Βερολίνου (~1850): πράξεις και μερικά προβλήματα.

Γενικά, έχουμε:

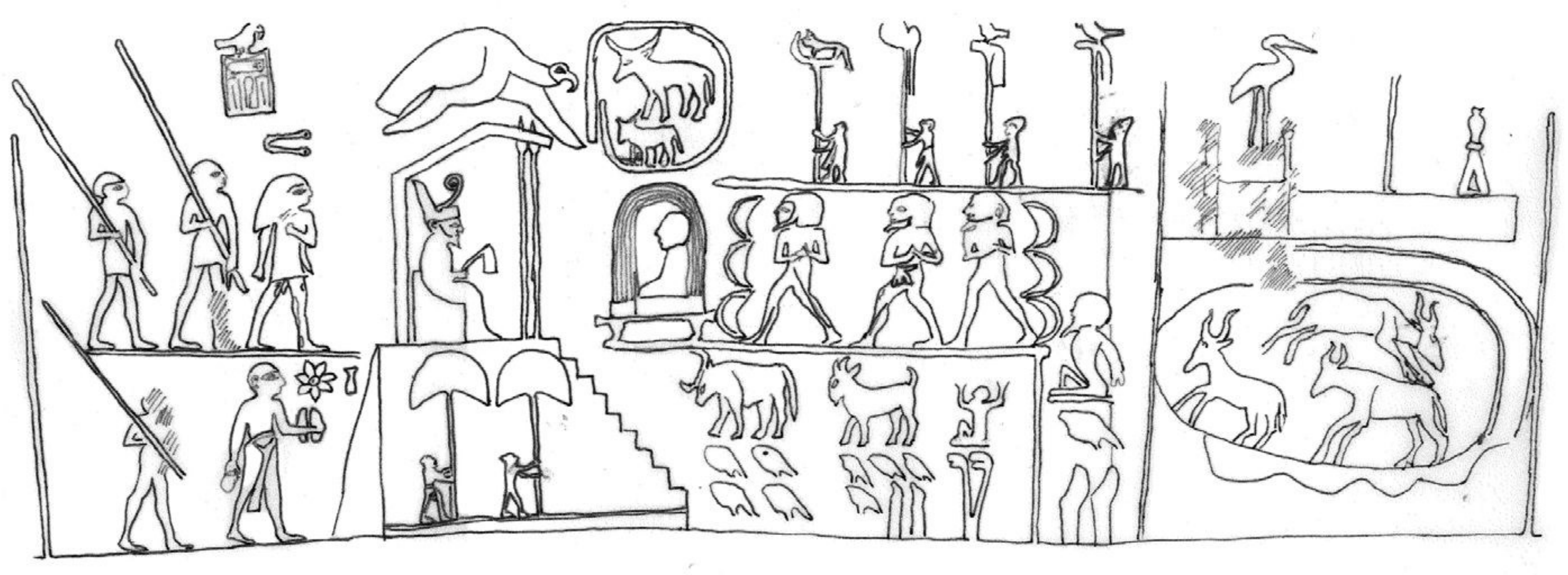
(1) Πράξεις

(2) Προβλήματα

(3) Πίνακες

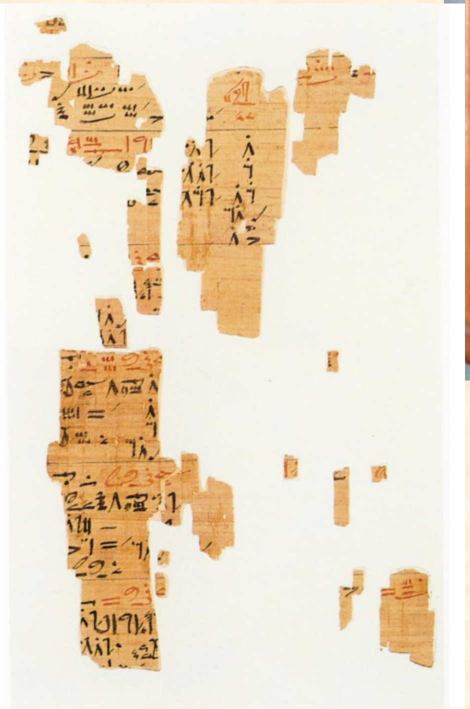


Είδαμε το παρακάτω παράδειγμα υλικής πηγής:



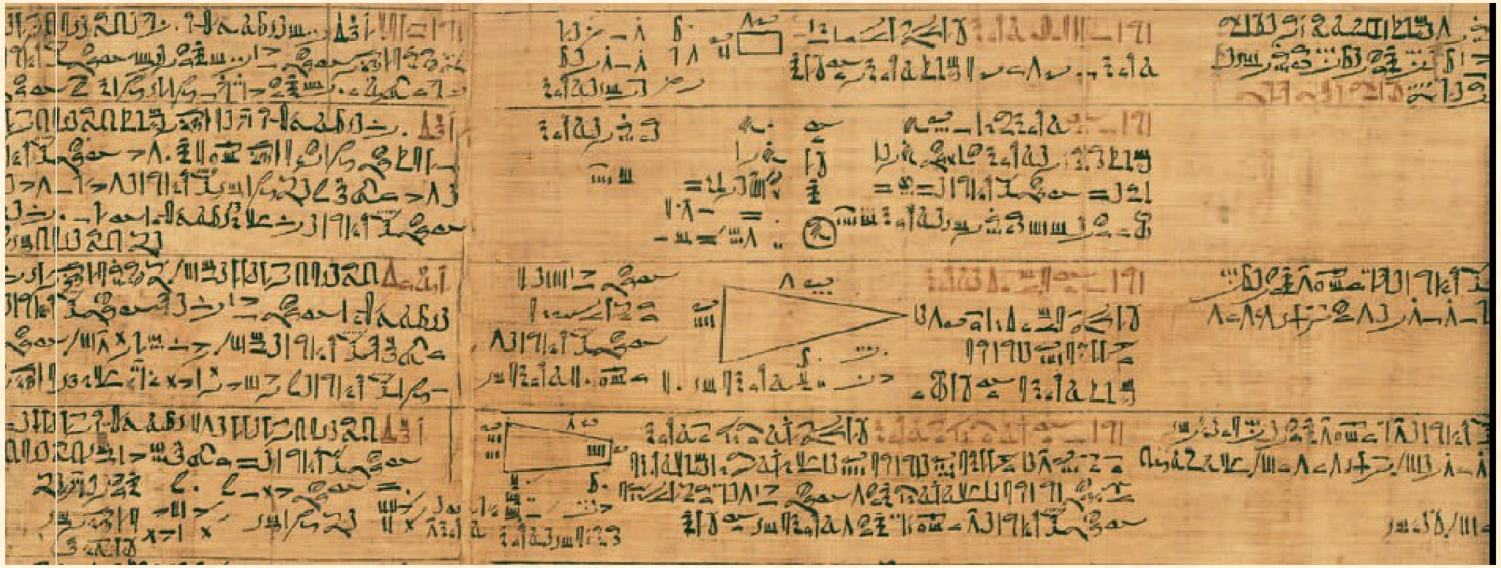
400.000 ( ) bulls, 1.422.000 ( ) goats, and 120.000 ( )

Οι αιγύπτιοι «μαθηματικοί»



Η παλέτα και οι γραφίδες του γραφέα

Ο πάπυρος Rhind

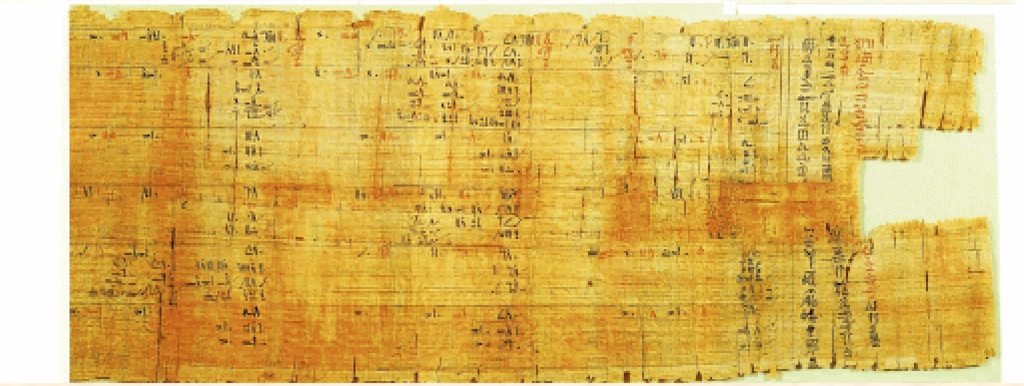


Έγκριτος λογισμός [ή Κανόνες λογισμού, ήτοι,] για να διεισδύεις στα πράγματα, για τη γνώση όλων των πραγμάτων, των μυστηρίων ... όλων των μυστικών. Αυτό το βιβλίο αντιγράφηκε το βασιλικό έτος 33, τον τέταρτο μήνα της εποχής των πλημμυρών, υπό την αυτού μεγαλειότητα τον Βασιλέα της Άνω και Κάτω Αιγύπτου, ‘A-user-Rê‘ (Απόφις), πολλά τα χρόνια του, από ένα παλαιό αντίγραφο που έγινε στα χρόνια του Βασιλέα της Άνω και Κάτω Αιγύπτου, Ne-ma‘et-Rê‘ (Αμενεμχέτ Γ΄). Ο γραφέας A‘h-mosè γράφει τούτο το αντίγραφο.

pBM10057-8
(pBM = πάπυρος Βρετ. Μουσείου)

- Ονομάστηκε έτσι από τον Alexander H. Rhind που είχε αγοράσει τον πάπυρο το 1858 στην Αίγυπτο.
- Ορισμένα τμήματά του βρίσκονται στο μουσείο του Brooklyn.
- Αντιγράφτηκε τον $16^{ο}$ αι. π.Χ. από τον γραφέα Ahmes από ένα κείμενο του $20^{ου}$ αι. π.Χ.
- Περιέχει 84 προβλήματα, οργανωμένα ανά είδος. Για παράδειγμα, τα πρώτα έξι προβλήματα ασχολούνται με τον διαμοιρασμό ψωμιού σε εργάτες.

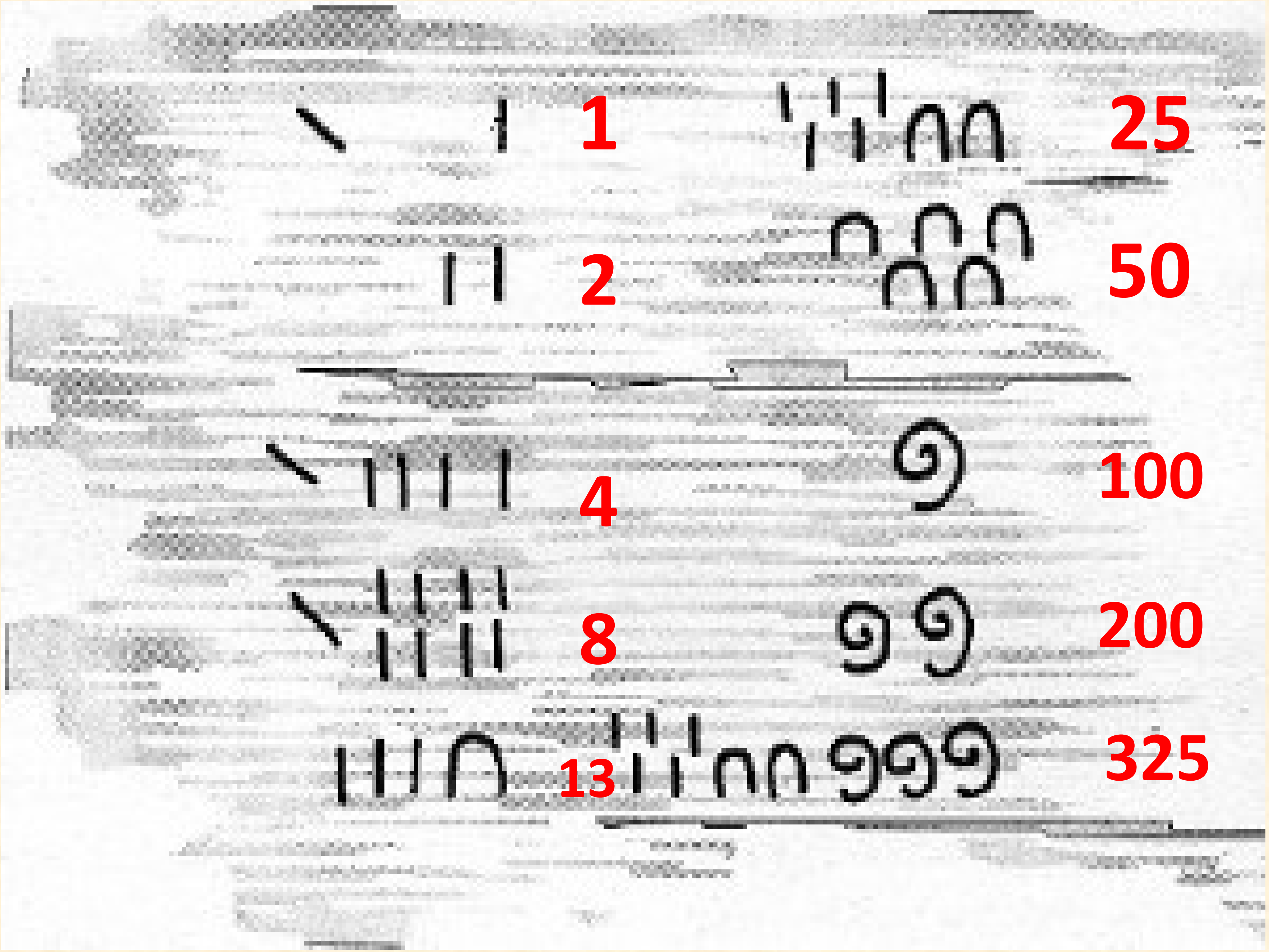
Ο πίνακας 2:n



The 2/n table from the Rhind Mathematical Papyrus

2/3 = 1/2 + 1/6	2/5 = 1/3 + 1/15	2/7 = 1/4 + 1/28
2/9 = 1/6 + 1/18	2/11 = 1/6 + 1/66	2/13 = 1/8 + 1/52 + 1/104
2/15 = 1/10 + 1/30	2/17 = 1/12 + 1/51 + 1/68	2/19 = 1/12 + 1/76 + 1/114
2/21= 1/14 + 1/42	2/23 = 1/12 + 1/276	2/25 = 1/15 + 1/75
2/27 = 1/18 + 1/54	2/29 = 1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232	2/31 = 1/20 + 1/124 + 1/155
2/33 = 1/22 + 1/66	2/35 = 1/30 + 1/42	2/37 = 1/24 + 1/111 + 1/296
2/39 = 1/26 + 1/78	2/41 = 1/24 + 1/246 + 1/328	2/43 = 1/42 + 1/86 + 1/129 + 1/301
2/45 = 1/30 + 1/90	2/47 = 1/30 + 1/141 + 1/470	2/49 = 1/28 + 1/196
2/51 = 1/34 + 1/102	2/53 = 1/30 + 1/318 + 1/795	2/55 = 1/30 + 1/330
2/57 = 1/38 + 1/114	2/59 = 1/36 + 1/236 + 1/531	2/61 = 1/40 + 1/244 + 1/488 + 1/610
2/63 = 1/42 + 1/126	2/65 = 1/39 + 1/195	2/67 = 1/40 + 1/335 + 1/536
2/69 = 1/46 + 1/138	2/71 = 1/40 + 1/568 + 1/710	2/73 = 1/60 + 1/219 + 1/292 + 1/365
2/75 = 1/50 + 1/150	2/77 = 1/44 + 1/308	2/79 = 1/60 + 1/237 + 1/316 + 1/790
2/81 = 1/54 + 1/162	2/83 = 1/60 + 1/332 + 1/415 + 1/498	2/85 = 1/51 + 1/255
2/87 = 1/58 + 1/174	2/89 = 1/60 + 1/356 + 1/534 + 1/890	2/91 = 1/70 + 1/130
2/93 = 1/62 + 1/186	2/95 = 1/60 + 1/380 + 1/570	2/97 = 1/56 + 1/679 + 1/776
2/99 = 1/66 + 1/198	2/101 = 1/101 + 1/202 + 1/303 + 1/606	

Πρόσθεση και Αφαίρεση


1
25
2
50
4
100
8
200
13
325

Ο πολλαπλασιασμός εκτελείται με συνεχείς διπλασιασμούς
(σε ορισμένες περιπτώσεις και δεκαπλασιασμούς)

Πρόβλημα 52

\ 1	2000
2	4000
\ 4	8000
Άθροισμα	10000

Πρόβλημα 69

1	80
\ 10	800
2	160
\ 4	320
Άθροισμα	1120

Διαίρεση

- 30 διά 2 ½

19 διά 8;

Πρόβλημα 76

1	2 ½
\ 10	25
\ 2	5
Άθροισμα	12

Λυμένα Παραδείγματα:

Πολλαπλασιασμός

Ο πολλαπλασιασμός εκτελείται με συνεχείς διπλασιασμούς. (Σε περιπτώσεις μεγάλων αριθμών γινόταν και δεκαπλασιασμός.)

Παράδειγμα: Να εκτελεστεί ο πολλαπλασιασμός **37 × 59**

1ο βήμα: συνεχείς διπλασιασμοί

1	59
2	118
4	236
8	472
16	944
32	1888

2ο βήμα: βρίσκουμε στην **αριστερή στήλη** αριθμούς που δίνουν ως άθροισμα τον αριθμό 37:

1 + 4 + 32 = 37

3ο βήμα: σημειώνουμε στη **δεξιά στήλη** τους αριθμούς που αντιστοιχούν στους 1, 4, 32 και τους προσθέτουμε

1	59	✓
2	118	
4	236	✓
8	472	
16	944	
32	1888	✓

Απάντηση:

37 × 59 = 2183

(διότι 59 + 236 + 1888 = 2183)

(Τέλεια) Διαίρεση

Η διαίρεση εκτελείται όπως ο πολλαπλασιασμός: Για να διαιρέσουμε το 2183 με το 37 λογαριάζουμε με το 37 (διπλασιάζοντας συνεχώς) μέχρι να βρούμε 2183.

1ο βήμα: συνεχείς διπλασιασμοί

1	37
2	74
4	148
8	296
16	592
32	1184

2ο βήμα: βρίσκουμε στη **δεξιά στήλη** αριθμούς που δίνουν ως άθροισμα τον αριθμό 2183:

37 + 74 + 296 + 592 + 1184 = 2183

3ο βήμα: σημειώνουμε στην **αριστερή στήλη** τους αριθμούς που αντιστοιχούν στους 37, 74, 296, 592, 1184 και τους προσθέτουμε

✓	1	37
✓	2	74
	4	148
✓	8	296
✓	16	592
✓	32	1184

Απάντηση:

2183 : 37 = 59

(διότι 1 + 2 + 8 + 16 + 32 = 59)

(Ατελής) Διαίρεση – 1ο μέρος

Αν η διαίρεση δεν είναι τέλεια καταφεύγουμε στα κλάσματα.
Χρησιμοποιούνταν δύο ακολουθίες κλασμάτων:

A) 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, …   (ακολουθία του 2)

B) 2/3, 1/3, 1/6, 1/12, 1/24, … (ακολουθία του 3)

Παράδειγμα: Να εκτελεστεί η διαίρεση **19 : 8**

1ο βήμα: διπλασιασμοί και υποδιπλασιασμοί (χρήση ακολουθίας του 2)

1	8
2	16
1/2	4
1/4	2
1/8	1

2ο βήμα: βρίσκουμε στη **δεξιά στήλη** τους αριθμούς που έχουν άθροισμα 19:
16 + 2 + 1 = 19

3ο βήμα: σημειώνουμε τους αριθμούς που αντιστοιχούν στην **αριστερή στήλη** και προσθέτουμε

	1	8
✓	2	16
	1/2	4
✓	1/4	2
✓	1/8	1

Απάντηση:
19 : 8 = 2 + 1/4 + 1/8

(Ατελής) Διαίρεση – 2ο μέρος

Παράδειγμα: Να εκτελεστεί η διαίρεση **16 : 3**

1ο βήμα:
Διπλασιασμοί και χρήση της ακολουθίας του 3

1	3
2	6
4	12
2/3	2
1/3	1

2ο βήμα:
Βρίσκουμε στη **δεξιά στήλη** το άθροισμα
16: 12 + 3 + 1 = 16

3ο βήμα:
Σημειώνουμε τους αντίστοιχους αριθμούς στην **αριστερή στήλη** και προσθέτουμε

✓	1	3
	2	6
✓	4	12
	2/3	2
✓	1/3	1

Απάντηση:
16 : 3 = 5 + 1/3

(Ατελής) Διαίρεση – 3ο μέρος

Παράδειγμα: Να εκτελεστεί η διαίρεση **5 : 17**

1ο βήμα: Υποδιπλασιασμοί

1	17
½	8 + ½
¼	4 + ¼

Φτάσαμε στον αριθμό 4 + ¼ που είναι μικρότερος του 5. Σκεφτόμαστε ως εξής: Με τι πρέπει να συμπληρώσουμε το 4 + ¼ για να γίνει 5;

2ο βήμα: Βοηθητικός υπολογισμός: Με τι να συμπληρώσουμε το ¼ για να γίνει 1; Μεταβαίνοντας σε μονάδα 4 φορές μικρότερη, το ερώτημα γίνεται: Με τι να συμπληρώσουμε το 1 για να γίνει 4; [Διευκρίνιση: Αν η αρχική μονάδα είναι Ε και η νέα μονάδα είναι e, τότε 1Ε = 4e]

¼	+	**?**	κάνει	1
1	+	**?**	κάνει	4
1	+	**3**	κάνει	4

Η απάντηση 3 αναφέρεται σε μονάδα (έστω e) 4 φορές μικρότερη της αρχικής μονάδας (έστω Ε). Για να την ανάγουμε στην αρχική μονάδα πρέπει να εκτελέσουμε τη διαίρεση 3 : 4 (αφού, 1e = ¼ Ε, τότε 3e = ¾ Ε)

	1	4
✓	½	2
✓	¼	1

Επειδή 2 + 1 = 3, η απάντηση είναι ½ ¼

5 διά 17 (μια ιδιαίτερη περίπτωση – ο αριθμητής είναι μικρότερος από τον παρονομαστή)

3ο βήμα: Αφού βρήκαμε με τι πρέπει να συμπληρωθεί το ¼ ως το 1 (ισοδύναμα: το 4 + ¼ ως το 5) συνεχίζουμε τη διαίρεση που αρχίσαμε στο 1ο βήμα με σκοπό να βρούμε στη δεξιά στήλη το ½ και το ¼

1	17
1/2	8 + ½
1/4	4 + ¼
1/17	1
1/34	½
1/68	¼

4ο βήμα: Ξέροντας ότι (4 + ¼) + ½ + ¼ κάνει 5, σημειώνουμε στην αριστερή στήλη τους αντίστοιχους αριθμούς

	1	17
	1/2	8 + ½
✓	1/4	4 + ¼
	1/17	1
✓	1/34	½
✓	1/68	¼

Απάντηση:
5 : 17 = 1/4 + 1/34 + 1/68

Οι υπολογισμοί αχά (προβλήματα 24-34 στον πάπυρο Rhind)

Πρόβλημα 26

Μια ποσότητα, το ¼ αυτής (προστίθεται) σε αυτήν και προκύπτει 15

Λογάριασε με το 4.

Θα λογαριάσεις το ¼ αυτού, 1. Άθροισμα 5.

Διαίρεσε το 15 με 5.

\ 1 5

\ 2 10

3 θα προκύψει.

Πολλαπλασίασε 3 φορές το 4.

1 3

2 6

\ 4 12

12 θα προκύψει.

1 12

¼ 3 Άθροισμα 15.

Η ποσότητα 12

το ¼ αυτής 3, Άθροισμα 15.

$X + X/4 = 15.$

Let X=4; thus, 4+1= 5

15:5 = 3 and 4*3 = 12

Thus, X=12, X/4 = 3 all together 15.

1. Μια ποσότητα. Αν προστεθεί σε αυτήν το ένα πέμπτο της, κάνουν 21. Ποια είναι η ποσότητα;
2. Μια ποσότητα. Αν προστεθεί σε αυτήν το μισό της, κάνουν 16. Ποια είναι η ποσότητα;
3. Μια ποσότητα. Αν προστεθεί και το ένα έβδομό της, κάνουν 19. (απ:=$16\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{8}$)
4. Αριθμός, το μισό του και το τρίτο του, όλα μαζί, κάνουν 13. (απ:= $7\,\frac{1}{22}\,\frac{1}{33}\,\frac{1}{66}$)

Σημείωση: Το τελευταίο πρόβλημα είναι το πλέον δύσκολο από όσα έχουμε δει. Κάνει χρήση του πίνακα 2:ν

Αριθμός, το μισό του και το τρίτο του, όλα μαζί, κάνουν 13.

- Υποθέτουμε το 6.
- Βγαίνει 11.
- Πόσες φορές χωράει το 11 στο 13; Ή με τι πρέπει να πολλαπλασιάσω το 11 για να γίνει 13;

- 1 11
- 1/11 1
- 2/11 2

Το 2/11 το βρίσκουμε από τον πίνακα 2/ν

The 2/n table from the Rhind Mathematical Papyrus

2/3 = 1/2 + 1/6	2/5 = 1/3 + 1/15	2/7 = 1/4 + 1/28
2/9 = 1/6 + 1/18	2/11 = 1/6 + 1/66	2/13 = 1/8 + 1/52 + 1/104
2/15 = 1/10 + 1/30	2/17 = 1/12 + 1/51 + 1/68	2/19 = 1/12 + 1/76 + 1/114
2/21= 1/14 + 1/42	2/23 = 1/12 + 1/276	2/25 = 1/15 + 1/75
2/27 = 1/18 + 1/54	2/29 = 1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232	2/31 = 1/20 + 1/124 + 1/155
2/33 = 1/22 + 1/66	2/35 = 1/30 + 1/42	2/37 = 1/24 + 1/111 + 1/296
2/39 = 1/26 + 1/78	2/41 = 1/24 + 1/246 + 1/328	2/43 = 1/42 + 1/86 + 1/129 + 1/301
2/45 = 1/30 + 1/90	2/47 = 1/30 + 1/141 + 1/470	2/49 = 1/28 + 1/196
2/51 = 1/34 + 1/102	2/53 = 1/30 + 1/318 + 1/795	2/55 = 1/30 + 1/330
2/57 = 1/38 + 1/114	2/59 = 1/36 + 1/236 + 1/531	2/61 = 1/40 + 1/244 + 1/488 + 1/610
2/63 = 1/42 + 1/126	2/65 = 1/39 + 1/195	2/67 = 1/40 + 1/335 + 1/536
2/69 = 1/46 + 1/138	2/71 = 1/40 + 1/568 + 1/710	2/73 = 1/60 + 1/219 + 1/292 + 1/365
2/75 = 1/50 + 1/150	2/77 = 1/44 + 1/308	2/79 = 1/60 + 1/237 + 1/316 + 1/790
2/81 = 1/54 + 1/162	2/83 = 1/60 + 1/332 + 1/415 + 1/498	2/85 = 1/51 + 1/255
2/87 = 1/58 + 1/174	2/89 = 1/60 + 1/356 + 1/534 + 1/890	2/91 = 1/70 + 1/130
2/93 = 1/62 + 1/186	2/95 = 1/60 + 1/380 + 1/570	2/97 = 1/56 + 1/679 + 1/776
2/99 = 1/66 + 1/198	2/101 = 1/101 + 1/202 + 1/303 + 1/606	

Οι απόψεις των Ελλήνων για τα μαθηματικά επιτεύγματα των Αιγυπτίων

1. Ηρόδοτος, *Ιστορίαι*, 2 (Ευτέρπη), 109.1–12

Οι ιερείς μου είπαν ότι αυτός ο βασιλιάς[a] μοίρασε όλη τη χώρα στους Αιγυπτίους και έδωσε στον καθένα τον ίδιο κλήρο, ένα τετράγωνο χωράφι, για το οποίο καθόρισε να πληρώνεται ετήσιος φόρος, που δημιούργησε τις προσόδους του. Αν ο ποταμός έπαιρνε ένα κομμάτι από το χωράφι κανενός, τότε αυτός πήγαινε στον βασιλιά, του ανέφερε το γεγονός, και εκείνος έστελνε ανθρώπους να κάνουν έλεγχο και να μετρήσουν πόσο μικρότερο έγινε το χωράφι, ώστε από τότε και στο εξής να ελαττωθεί ανάλογα και ο φόρος. Από αυτό, νομίζω, προέρχεται η εφεύρεση της γεωμετρίας, που αργότερα μεταδόθηκε στην Ελλάδα, διότι το ηλιακό ρολόι, τον γνώμονα και τα δώδεκα μέρη της ημέρας οι Έλληνες τα έμαθαν από τους Βαβυλωνίους.

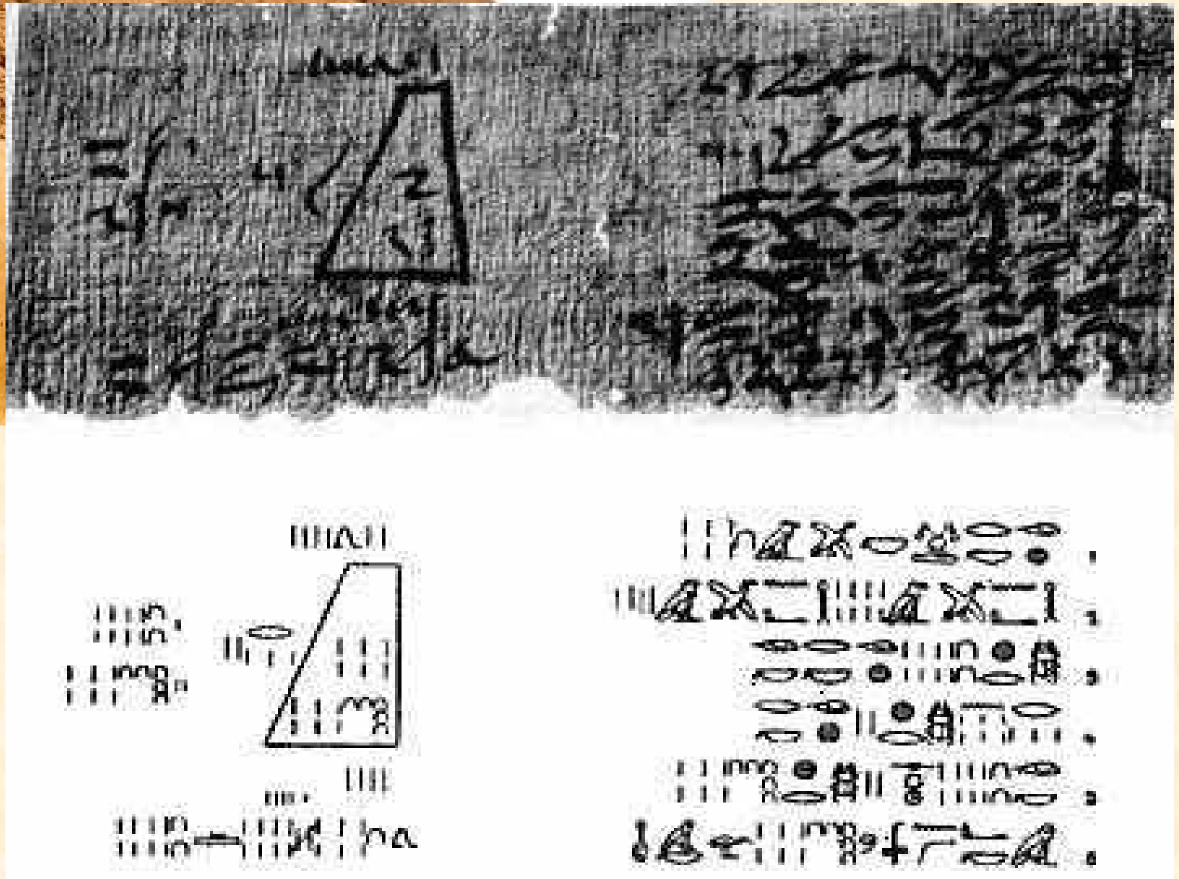
3. Αριστοτέλης, *Μετά τα Φυσικά*, 981*b*20–25

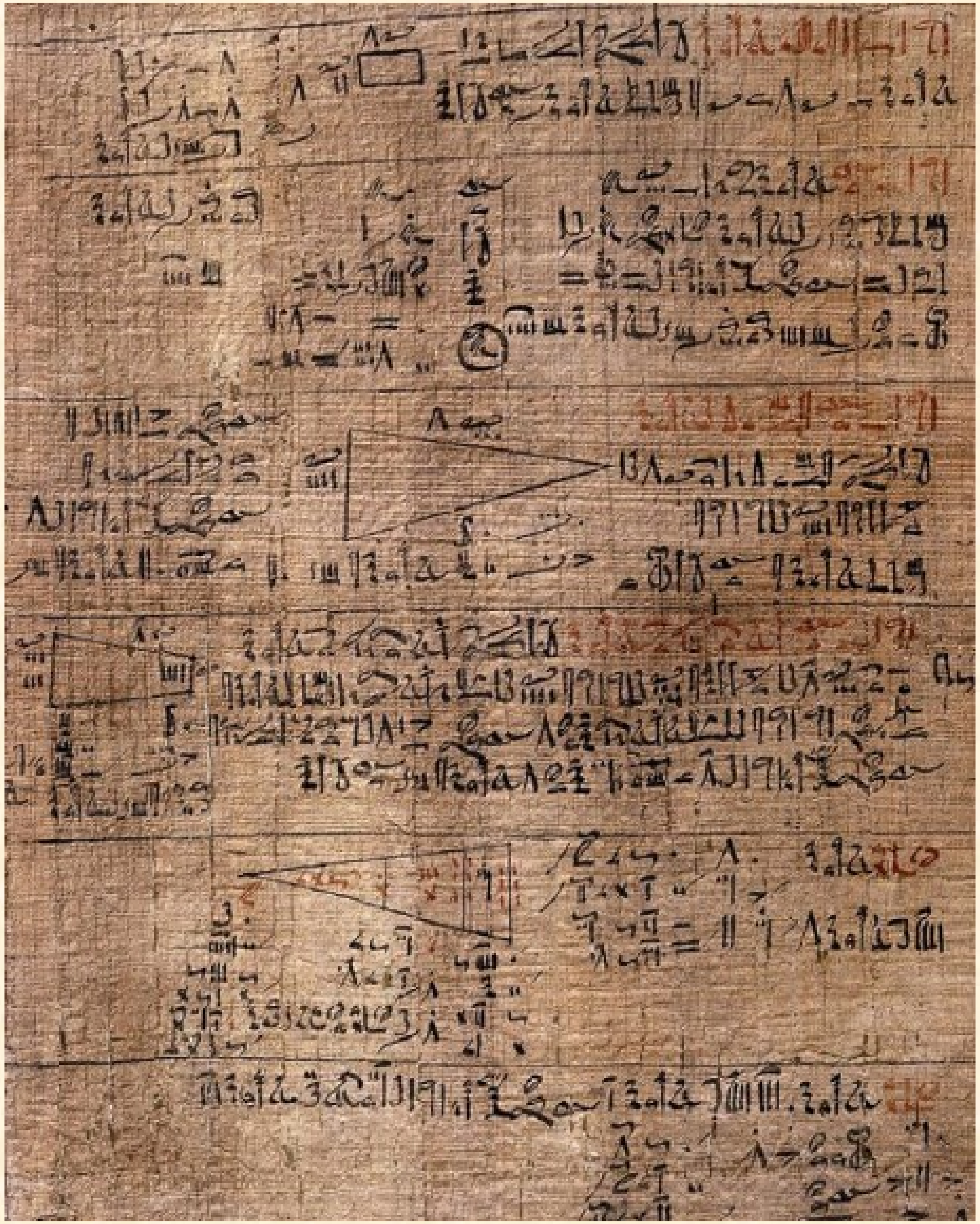
Για αυτό, όταν πια είχαν ικανοποιηθεί όλες οι τέτοιας λογής ανάγκες, επινοήθηκαν οι επιστήμες που δεν απέβλεπαν μήτε σε απόλαυση μήτε στις ανάγκες της ζωής, και [επινοήθηκαν] αρχικά στις χώρες εκείνες στις οποίες δόθηκε διαθέσιμος χρόνος. Για αυτό οι μαθηματικές τέχνες συγκροτήθηκαν πρώτα-πρώτα στην Αίγυπτο, διότι εκεί αφέθηκε διαθέσιμος χρόνος στην κοινότητα των ιερέων.

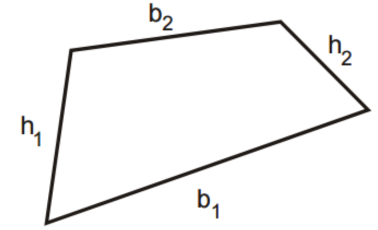
Κανένας δεν με ξεπέρασε στις συνθέσεις γραμμών μετά αποδείξεων, ούτε ακόμα οι αποκαλούμενοι «αρπεδονάπτες» μεταξύ των Αιγυπτίων.

Δημόκριτος, Απόσπασμα 299

Αιγυπτιακή Γεωμετρία
Προβλήματα 41-60 στον π.Ρ.







Quadrilateral

$$A = \left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right)\left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right)$$

Πρόβλημα 50 (τετραγωνισμός κύκλου):

Ένα κυκλικό χωράφι έχει διάμετρο 9 κετ. Πόσα σετάτ γης περικλείει;

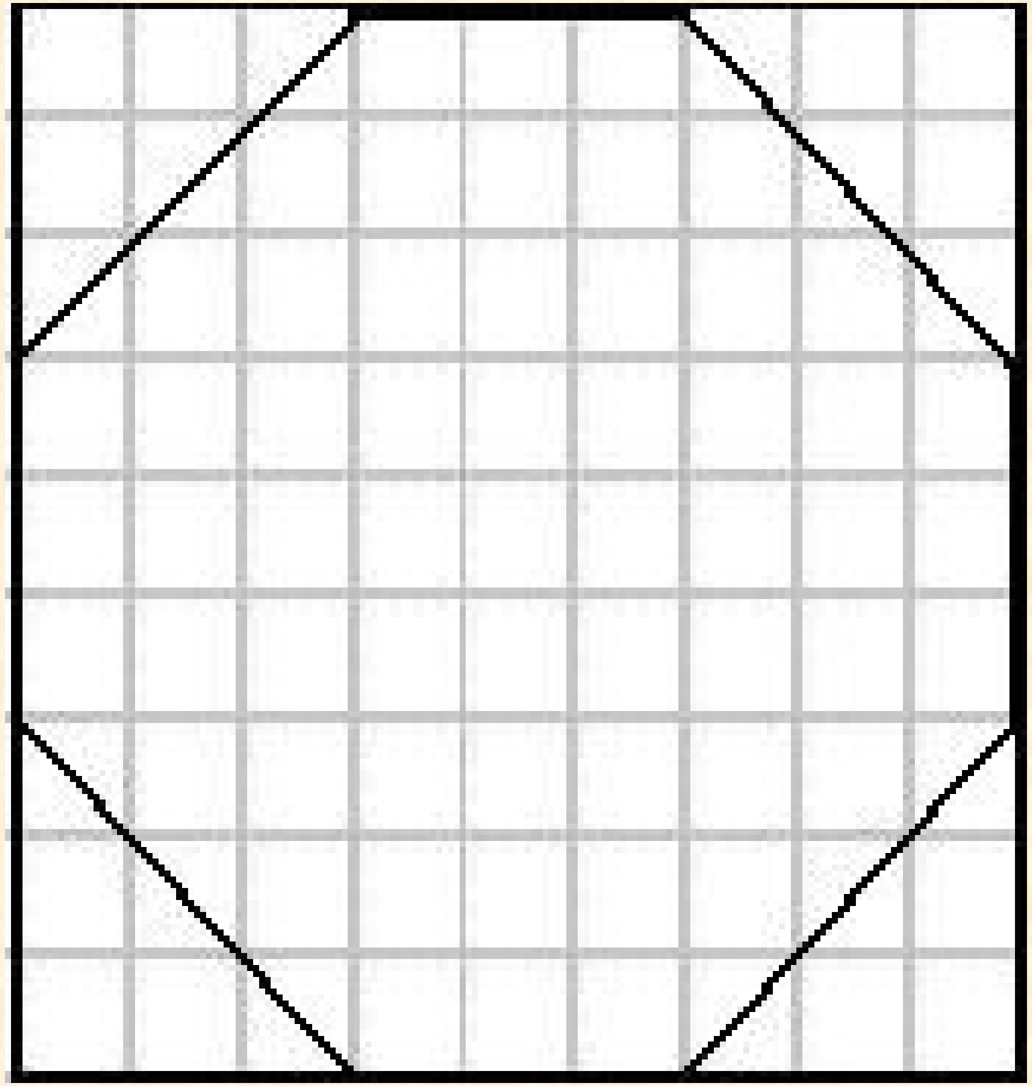
Αφαίρεσε το 1/9 της διαμέτρου, δηλαδή 1. Περισσεύουν 8.

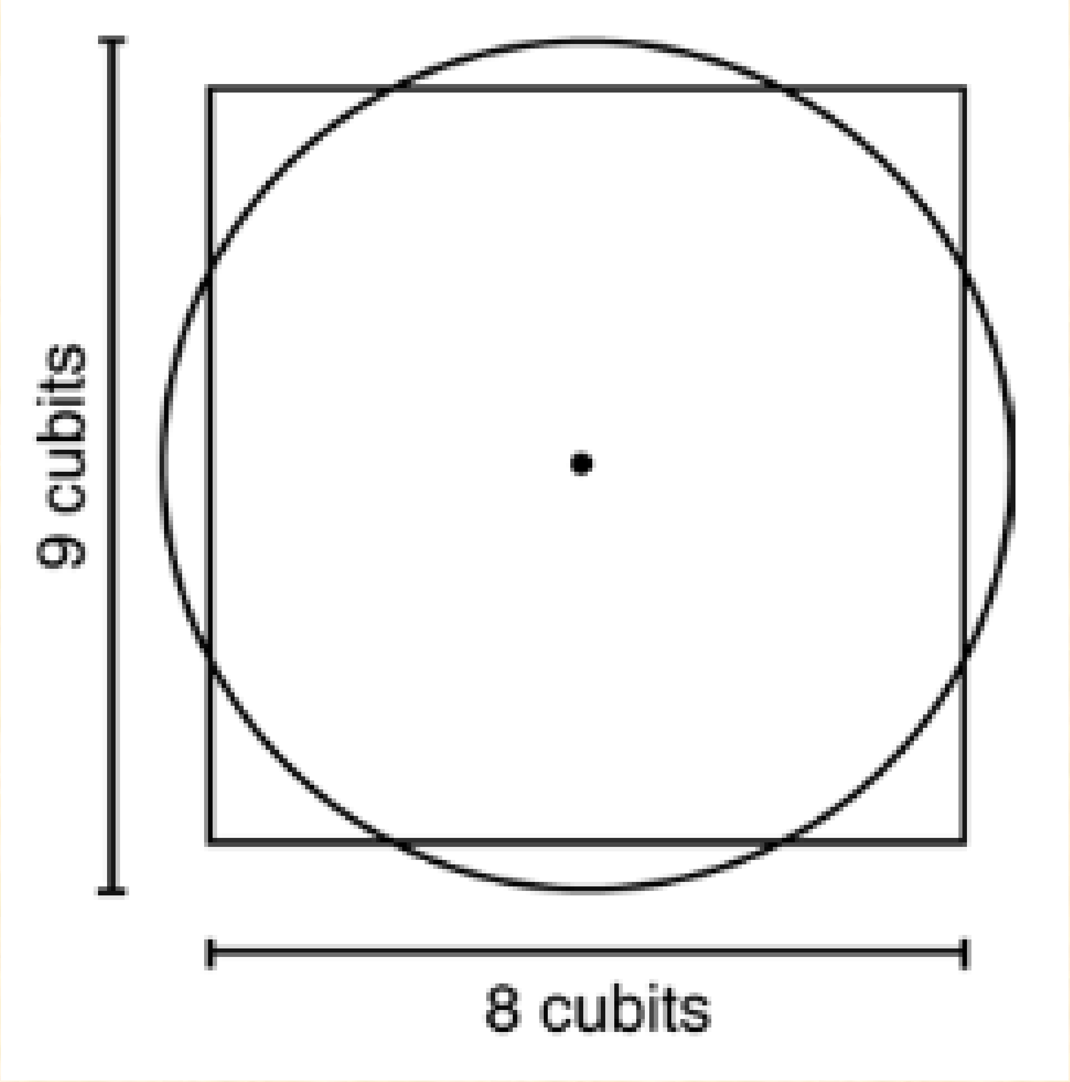
Πολλαπλασίασε 8 φορές. Μας κάνει 64.

Άρα ο κύκλος περικλείει 64 σετάτ γης.

$$A = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2 = \frac{64}{81} d^2$$

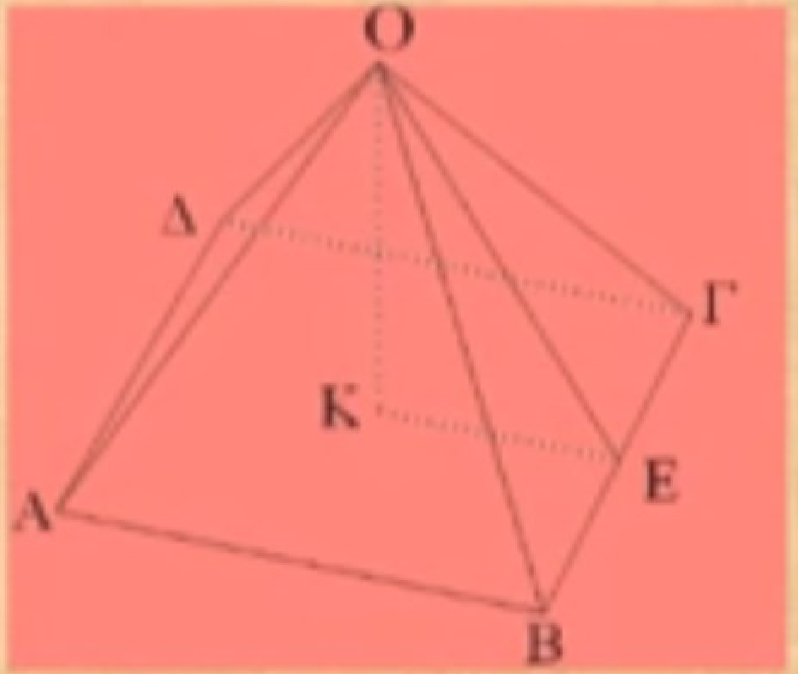
Σημείωση: Ένα κετ = 52.3 μέτρα
Αυτό μας δίνει μια εκτίμηση για το π = 256/81 περίπου ίση με 3,16




9 cubits
8 cubits

Τα προβλήματα «σεκέντ»

Πρόβλημα 56



Δεδομένα: ΟΚ=250

Πλευρά τετραγώνου=360

Ζητούμενο: το σεκέντ

Λύση:

- Το μισό του 360: 180
- 180:250=1/2+1/5+1/50

Προβλήματα 56 – 60 του παπύρου του Αχμές

Πυραμίδα Χεφρήνου

Το αιγυπτιακό «κλάσμα»

	Egyptian notation	
Value	**hieratic**	**hieroglyphic**
$\frac{2}{3}$		
$\frac{1}{2}$		
$\frac{1}{3}$		
$\frac{1}{4}$		

- Εμφανίζονται πρώτα ως μετρολογικές μονάδες αλλά στη συνέχεια καθιερώνονται ως κλάσματα.
- Εννοιολογικά, δεν είναι μικτά κλάσματα με την έννοια του αριθμητική και του παρονομαστή αλλά αντίστροφες ποσότητες. Αναχρονιστική ορολογία: «μοναδιαία» κλάσματα.
- Επίσης υπάρχει η ανάγκη ένα αποτέλεσμα να αποδίδεται σε «μοναδιαία» κλάσματα.

Το αιγυπτιακό «κλάσμα»

- Δεν εμφανίζονται κλάσματα, πλην

$$\frac{2}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$$

- Όλα τα υπόλοιπα μετατρέπονται σε μοναδιαία κλάσματα (1:ν)

- Η απουσία του γενικού κλάσματος μ:ν καθιστά τον χειρισμό των κλασμάτων δυσχερή

- Ο διπλασιασμός του ‘κλάσματος’ με άρτιο παρονομαστή είναι εύκολος

1/6 + 1/6 = 1/3

- Ο διπλασιασμός με περιττό παρονομαστή είναι δύσκολο πρόβλημα και όχι μονοσήμαντο

1/5 + 1/5 = 1/3 + 1/15 = 1/4 + 1/10 + 1/20