

5. Η σύνοψη της ιστορίας της προευκλείδειας γεωμετρίας από τον Πρόκλο

Η περικοπή που ακολουθεί, η οποία αναφέρεται συχνά στα βιβλία της ιστορίας των μαθηματικών ως «Ο κατάλογος των γεωμετρών», περιέχεται στο βιβλίο του Πρόκλου, *Εἰς τὸ πρῶτον τῶν Εὐκλείδου στοιχείων βιβλίον* (In Primum Euclidis Elementorum Librum Commentarii), έκδ. G. Friedlein, Leipzig, B. G. Teubner, 1873, 64.16 – 70.18

Επειδή πρέπει να εξετάσουμε τις απαρχές και των τεχνών και των επιστημών στην παρούσα περίοδο [της ιστορίας του κόσμου], λέμε ότι οι περισσότεροι [συγγραφείς] αναφέρουν ότι η γεωμετρία επινοήθηκε πρώτα από τους Αιγυπτίους, και οφείλει τη γέννησή της στην καταμέτρηση των χωραφιών. Διότι αυτή ήταν αναγκαία σε εκείνους, λόγω της ανόδου του Νείλου η οποία εξαφάνιζε τα όρια της ιδιοκτησίας του καθενός. Δεν προκαλεί καμία έκπληξη εξάλλου το γεγονός ότι η επινόηση τόσο αυτής όσο και των άλλων επιστημών έλκει την καταγωγή της στις πρακτικές ανάγκες, διότι καθετί το οποίο βρίσκεται στη διαδικασία του γίνεσθαι προχωρεί από το ατελές προς το τέλειο. Εύλογο είναι λοιπόν η μετάβαση να γίνεται από την αίσθηση προς τον συλλογισμό και από αυτόν προς την κατανόηση. Ακριβώς, λοιπόν, όπως εξ αιτίας του εμπορίου και των συναλλαγών έλαβε στους Φοίνικες την αρχή η ακριβής γνώση των αριθμών, έτσι, και για την προαναφερθείσα αιτία, επινοήθηκε η γεωμετρία από τους Αιγυπτίους.

Ο Θαλής ήταν ο πρώτος ο οποίος, αφού ήλθε στην Αίγυπτο, μετέφερε τη θεωρία αυτή στην Ελλάδα· ο ίδιος ανακάλυψε πολλά πράγματα, και παρέδωσε τις αρχές πολλών άλλων στους νεωτέρους του, εφαρμόζοντας σε άλλες περιπτώσεις μέθοδο περισσότερο γενική και σε άλλες περισσότερο εμπειρική. Μετά από αυτόν ο Μάμερκος,^a ο αδελφός του ποιητή Σησιχόρου, μνημονεύεται ότι επέδειξε ενδιαφέρον για τη μελέτη της γεωμετρίας και ο Ιππίας ο Ηλείος έγραψε για αυτόν ότι απέκτησε φήμη ως γεωμέτρης. Μετά από αυτούς ο Πυθαγόρας μετέτρεψε τη φιλοσοφία της [γεωμετρίας] σε μια μορφή ελεύθερης παιδείας, αναλογιζόμενος τις πρώτες αρχές της εκ των άνω, και διερευνώντας τα θεωρήματα αὐλως και νοερώς· αυτός ανακάλυψε επίσης τη θεωρία των αρρήτων^b και τη σύσταση των κοσμικών σχημάτων. Μετά από αυτόν με πολλά [προβλήματα] της γεωμετρίας καταπιάστηκε ο Αναξαγόρας από τις Κλαζομενές, και ο Οινοπίδης ο Χίος, ο οποίος ήταν λίγο νεώτερος του Αναξαγόρα, και ο Πλάτων αναφέρει στους *Αντεραστές* ότι [αμφότεροι] απέκτησαν φήμη στα Μαθηματικά.

Μετά από αυτούς επιφανείς στη γεωμετρία έγιναν ο Ιπποκράτης ο Χίος, ο οποίος ανακάλυψε πώς τετραγωνίζεται ο μηνίσκος, και ο Θεόδωρος ο Κυρηναίος· ο Ιπποκράτης, μάλιστα, είναι ο πρώτος από τους προαναφερόμενους που συνέγραψε *Στοιχεία*. Ο Πλάτων, ο οποίος ακολουθεί μετά από αυτούς, συνέβαλε ώστε να λάβουν μεγάλη ανάπτυξη και οι λοιπές μαθηματικές επιστήμες και η γεωμετρία με τον ζήλο [που επέδειξε] για αυτές, ο οποίος είναι κατά κάποιον τρόπο εμφανής, αφού και τα συγγράμματά του τα έχει γεμίσει με μαθηματικούς συλλογισμούς και με κάθε ευκαιρία διεγείρει τον θαυμασμό προς αυτά όσων αφοσιώνονται στη φιλοσοφία. Την ίδια εποχή έζησαν

^a Η ορθή γραφή του ονόματος είναι πιθανώς Μαμέρτιος. Βλ. W. Burkert, *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism*, tr. E. L. Minar, Jr., Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1972, σ. 417 υποσημείωση 93.

^b Το σύνολο σχεδόν των χειρογράφων του έργου του Πρόκλου έχει τη γραφή «ἀλόγων πραγματεῖαν» (θεωρία των αρρήτων), όμως οι περισσότεροι ερευνητές θεωρούν ότι η σωστή γραφή είναι «ἀνά λόγων πραγματεῖαν» (θεωρία των αναλόγων). Το θέμα έχει συζητηθεί εκτενώς στη νεώτερη βιβλιογραφία. Βλ. L. Zhmud, «Pythagoras as a Mathematician», *Historia Mathematica* 16 (1989), 249–268 και τη βιβλιογραφία που αναφέρεται εκεί.

επίσης ο Λεωδάμας από τη Θάσο, ο Αρχύτας ο Ταραντίνος και ο Θεαίτητος ο Αθηναίος, οι οποίοι αύξησαν τον αριθμό των θεωρημάτων και συνέβαλαν στην επιστημονικότερη συγκρότησή τους.

Νεώτερος του Λεωδάμαντος ήταν ο Νεοκλείδης, και ο μαθητής αυτού Λέων, οι οποίοι πρόσθεσαν πολλά σε όσα [είχαν επιτύχει] οι προγενέστεροί τους· έτσι, ο Λέων μπόρεσε να συντάξει τα *στοιχεία* με μεγαλύτερη επιμέλεια ως προς το πλήθος και τη χρήση των αποδεικνυόμενων [προτάσεων], και να βρει διορισμούς^a για το πότε το ζητούμενο πρόβλημα είναι δυνατό και πότε αδύνατο. Ο Εύδοξος από την Κνίδα, λίγο νεώτερος του Λέοντος, αφού συνδέθηκε με τους κύκλους του Πλάτωνα, ήταν ο πρώτος ο οποίος αύξησε το πλήθος των λεγόμενων γενικών θεωρημάτων, στις τρεις αναλογίες πρόσθεσε άλλες τρεις, και προήγαγε τις σχετικές με την «τομή» [έρευνες] που είχε αρχίσει ο Πλάτων, χρησιμοποιώντας σε αυτές και τη μέθοδο της ανάλυσης.^b Ακόμη περισσότερο τελειοποίησαν τη γεωμετρία ο Αμύκλας από την Ηράκλεια, ένας από τους εταίρους του Πλάτωνα, ο Μέναιχμος, ο οποίος ήταν μαθητής του Ευδόξου και συνδέθηκε με τον Πλάτωνα, και ο αδελφός αυτού Δεινόστρατος. Ο Θεύδιος από τη Μαγνησία φαίνεται, επίσης, ότι διακρίθηκε τόσο στα μαθηματικά όσο και στην υπόλοιπη φιλοσοφία· διότι και τα *στοιχεία* συνέταξε καλώς και γενίκευσε πολλά από τα επιμέρους^c [θεωρήματα]. Και βεβαίως ο Αθήναιος από την Κύζικο, ο οποίος έζησε κατά την ίδια εποχή, έγινε επιφανής και στους άλλους κλάδους των μαθηματικών και, ιδιαιτέρως, στη γεωμετρία. Αυτοί ζούσαν όλοι μαζί στην Ακαδημία και διεξήγαγαν τις έρευνές τους από κοινού. Ο Ερμότιμος από την Κολοφώνα προήγαγε περισσότερο αυτά που είχαν επιτύχει ο Εύδοξος και ο Θεαίτητος, ανακάλυψε πολλά [από τα περιεχόμενα] στα *Στοιχεία* και συνέγραψε ορισμένα περί [γεωμετρικών] τόπων. Ο Φίλιππος από τη Μένδη, ο οποίος ήταν μαθητής του Πλάτωνα, και εκείνος τον προέτρεψε να ασχοληθεί με τα μαθηματικά, έκανε τις έρευνές του σύμφωνα με τις υποδείξεις του Πλάτωνα, ανέλαβε δε να κάνει όσα νόμιζε ότι συμβάλλουν στη φιλοσοφία του Πλάτωνα.

Μέχρι αυτού [του σημείου], λοιπόν, αφηγούνται την εξέλιξη αυτής της επιστήμης όσοι συνέγραψαν ιστορίες. Δεν είναι δε πολύ νεώτερος αυτών ο Ευκλείδης, ο οποίος συγκέντρωσε τα *στοιχεία*, έβαλε σε τάξη πολλά [θεωρήματα] του Ευδόξου, τελειοποίησε πολλά [θεωρήματα] του Θεαιτήτου, και προσέφερε αψεγάδιαστες αποδείξεις σε όσα οι προγενέστεροί του είχαν αποδείξει με τρόπο λιγότερο αυστηρό. Αυτός ο άνδρας έζησε την εποχή του Πτολεμαίου του πρώτου· διότι ο Αρχιμήδης, ο οποίος ακολουθεί αμέσως μετά τον πρώτο [Πτολεμαίο], μνημονεύει τον Ευκλείδη, και, ακόμη, λέγεται ότι ο Πτολεμαίος τον ρώτησε κάποτε αν υπάρχει τρόπος για [να μάθει κανείς] τη γεωμετρία πιο σύντομος από τη *Στοιχειώση* και εκείνος απάντησε ότι δεν υπάρχει «βασιλική οδός» προς τη γεωμετρία. Είναι, λοιπόν, νεώτερος από τους [μαθητές] του Πλάτωνα, αλλά πρεσβύτερος του Ερατοσθένη και του Αρχιμήδη. Διότι αυτοί ήταν σύγχρονοι, όπως αναφέρει κάπου ο Ερατοσθένης. Όσον αφορά τις προθέσεις του ήταν Πλατωνικός και φιλικά διακείμενος προς τη φιλοσοφία αυτή· για αυτόν τον λόγο άλλωστε έθεσε ως τελικό σκοπό της *Στοιχειώσεως* την κατασκευή των λεγόμενων πλατωνικών σχημάτων. Υπάρχουν και πολλά άλλα μαθηματικά συγγράμματα αυτού του άνδρα, θαυμαστά ως προς την ακρίβειά τους και μεστά επιστημονικών διερευνήσεων. Διότι τέτοια είναι τα *Οπτικά* και τα *Κατοπτρικά*, η *Μουσική στοιχειώσις*, και επίσης

^a Συνθήκες επιλυσιμότητας.

^b Για μια εμπεριστατωμένη ανάλυση αυτής της ενδιαφέρουσας περικοπής που αναφέρεται στα μαθηματικά επιτεύγματα του Ευδόξου, βλ. W. R. Knorr, *The Evolution of the Euclidean Elements. A Study of the Theory of Incommensurable Magnitudes and Its Significance for Early Greek Geometry*, Dordrecht, Reidel, 1975, σ. 274–284.

^c Τα χειρόγραφα στο σημείο αυτό περιέχουν τη γραφή «πολλά τῶν ὀρικῶν». Ο εκδότης του έργου (G. Friedlein) θεωρεί ότι η γραφή αυτή είναι προϊόν αλλοίωσης και πρέπει να αντικατασταθεί με τη γραφή «πολλά τῶν μερικῶν».

το βιβλίο *Περί διαιρέσεων*. Ο καθένας, όμως, θα τον θαυμάσει προ πάντων χάριν της *Γεωμετρικής στοιχειώσεως*, λόγω της διάταξης και της επιλογής που έκανε των θεωρημάτων και των προβλημάτων σε σχέση προς τα στοιχεία. Διότι δεν συμπεριέλαβε όσα ήταν δυνατόν να αναφέρει, αλλά [μόνο] όσα μπορούσε να κάνει δεκτά ως στοιχεία. Επίσης, [αξίζει να τον θαυμάσει κανείς] για τους κάθε είδους συλλογισμούς, άλλους μεν οι οποίοι αντλούν την αξιοπιστία τους από τις πρώτες αρχές, άλλους δε οι οποίοι εκπορεύονται από αποδείξεις, όλοι όμως είναι αψεγάδιαστοι, ακριβείς και εναρμονισμένοι με την επιστήμη. Επιπροσθέτως, [αξίζει να θαυμάσει κανείς] όλες τις διαλεκτικές μεθόδους, τη «διαιρετική» στις ευρέσεις των ειδών, την «οριστική» στους ουσιώδεις συλλογισμούς, την «αποδεικτική» στις μεταβάσεις από τις πρώτες αρχές προς τα ζητούμενα και την «αναλυτική» στις αντίστροφες πορείες από τα ζητούμενα προς τις πρώτες αρχές. Και ακόμη, τα ποικίλα είδη των αντιστροφών, τόσο των απλούστερων [προτάσεων] όσο και των πιο σύνθετων, εκτίθενται επαρκώς και με κάθε ακρίβεια σε αυτήν την πραγματεία για να τα μελετήσει κανείς, δηλαδή ποια μπορούν να αντιστραφούν ως όλα σε όλα, ποια ως όλα σε μέρη και αντιστρόφως, και ποια ως μέρη σε μέρη. Πρέπει δε ακόμη να αναφέρουμε τη συνέχεια των αποδείξεων, τη διευθέτηση και τη διάταξη όσων προηγούνται και όσων έπονται, και την τέχνη με την οποία πραγματεύεται καθετί. Δεν [λένε άλλωστε] ότι εάν προσθέσεις ή αφαιρέσεις οτιδήποτε παρεκκλίνεις της επιστήμης χωρίς να το καταλάβεις και οδηγείσαι στην αντίφαση και στην άγνοια; Επειδή δε πολλά πράγματα φαίνεται ότι είναι σύμφωνα προς την αλήθεια και ότι προκύπτουν από επιστημονικές αρχές, αλλά ξεστρατίζουν από τις αρχές οδηγώντας σε πλάνη και εξαπατούν τους πιο επιπόλαιους, [ο Ευκλείδης] παρέδωσε μεθόδους ώστε να κατανοεί κανείς καθαρά και αυτά, με τις οποίες θα μπορέσουμε να εκπαιδύσουμε τους αρχάριους σε αυτήν τη θεωρία ώστε να ανακαλύπτουν τους παραλογισμούς και να αποφεύγουν να εξαπατώνται. Και στο σύγγραμμα αυτό, με το οποίο μας παρέχει τα μέσα για αυτήν την προετοιμασία, έδωσε τον τίτλο *Ψευδάρια*· σε αυτό απαριθμεί κατά σειρά τους διάφορους τρόπους αυτών [των παραλογισμών], και για κάθε περίπτωση εξασκεί τη διάνοιά μας με θεωρήματα κάθε είδους, παραθέτοντας δίπλα δίπλα το αληθές και το ψευδές και προσαρμόζοντας την ανασκευή της απάτης με τη συγκεκριμένη περίπτωση.^a Έτσι, αυτό το βιβλίο είναι καθαρικό και γυμναστικό, ενώ η *Στοιχείωσις* είναι ο αψεγάδιαστος και πλήρης οδηγός στην ίδια την επιστημονική έρευνα των θεμάτων της γεωμετρίας.

Ἐπει δὲ χρῆ τὰς ἀρχὰς καὶ τῶν τεχνῶν καὶ τῶν ἐπιστημῶν πρὸς τὴν παροῦσαν περίοδον σκοπεῖν, λέγομεν, ὅτι παρ' Αἰγυπτίοις μὲν εὐρῆσθαι πρῶτον ἢ γεωμετρία παρὰ τῶν πολλῶν ἰστόρηται, ἐκ τῆς τῶν χωρίων ἀναμετρήσεως λαβοῦσα τὴν γένεσιν. ἀναγκαία γὰρ ἦν ἐκείνοις αὕτη διὰ τὴν ἄνοδον τοῦ Νείλου τοὺς προσήκοντας ὄρους ἐκάστοις ἀφανίζοντος. καὶ θαυμαστὸν οὐδὲν ἀπὸ τῆς χρείας ἄρξασθαι τὴν εὕρεσιν καὶ ταύτης καὶ τῶν ἄλλων ἐπιστημῶν, ἐπειδὴ πᾶν τὸ ἐν γενέσει φερόμενον ἀπὸ τοῦ ἀτελοῦς εἰς τὸ τέλειον πρόεισιν. ἀπὸ αἰσθήσεως οὖν εἰς λογισμὸν καὶ ἀπὸ τούτου ἐπὶ νοῦν ἢ μετάβασιν γένοιτο ἂν εἰκότως. ὥσπερ οὖν παρὰ τοῖς Φοίνιξιν διὰ τὰς ἐμπορείας καὶ τὰ συναλλάγματα τὴν ἀρχὴν ἔλαβεν ἢ τῶν ἀριθμῶν ἀκριβῆς γνῶσις, οὕτω δὲ καὶ παρ' Αἰγυπτίοις ἢ γεωμετρία διὰ τὴν εἰρημένην αἰτίαν εὕρηται. Θαλῆς δὲ πρῶτον εἰς Αἴγυπτον ἐλθὼν μετέγαγεν εἰς τὴν Ἑλλάδα τὴν θεωρίαν ταύτην καὶ πολλὰ μὲν αὐτὸς εὔρεν, πολλῶν δὲ τὰς ἀρχὰς τοῖς μετ' αὐτὸν ὑφηγήσατο, τοῖς μὲν καθολικώτερον ἐπιβάλλων, τοῖς δὲ αἰσθητικώτερον. μετὰ δὲ τοῦτον Μάμερκος ὁ Στησιχόρου τοῦ ποιητοῦ ἀδελφός, ὃς ἐφαψάμενος τῆς περὶ γεωμετρίαν σπουδῆς μνημονεύεται, καὶ Ἰππίας ὁ Ἡλεῖος ἰστόρησεν ὡς ἐπὶ γεωμετρίᾳ δόξαν αὐτοῦ λαβόντος. ἐπὶ δὲ τούτοις Πυθαγόρας

^a Για την ερμηνεία αυτής της πρότασης βλ. F. Acerbi, «Euclid's *Pseudaria*», *Archive for History of Exact Sciences* 62 (2008), 511–551, στις σ. 512–513.

τὴν περὶ αὐτὴν φιλοσοφίαν εἰς σχῆμα παιδείας ἐλευθέρου μετέστησεν, ἄνωθεν τὰς ἀρχὰς αὐτῆς ἐπισκοπούμενος καὶ αὐτῶς καὶ νοερῶς τὰ θεωρήματα διερευνώμενος, ὃς δὴ καὶ τὴν τῶν ἀλόγων πραγματείαν καὶ τὴν τῶν κοσμικῶν σχημάτων σύστασιν ἀνεῦρεν. μετὰ δὲ τοῦτον Ἀναξαγόρας ὁ Κλαζομένιος πολλῶν ἐφήψατο τῶν κατὰ γεωμετρίαν καὶ Οἰνοπίδης ὁ Χίος, ὀλίγῳ νεώτερος ὢν Ἀναξαγόρου, ὧν καὶ ὁ Πλάτων ἐν τοῖς ἀντερασταῖς ἐμνημόνευσεν ὡς ἐπὶ τοῖς μαθήμασι δόξαν λαβόντων. ἐφ' οἷς Ἴπποκράτης ὁ Χίος ὁ τὸν τοῦ μηνίσκου τετραγωνισμόν εὐρών, καὶ Θεόδωρος ὁ Κυρηναῖος ἐγένοντο περὶ γεωμετρίαν ἐπιφανεῖς. πρῶτος γὰρ ὁ Ἴπποκράτης τῶν μνημονευομένων καὶ στοιχεῖα συνέγραψεν. Πλάτων δ' ἐπὶ τούτοις γενόμενος μεγίστην ἐποίησεν ἐπίδοσιν τὰ τε ἄλλα μαθήματα καὶ τὴν γεωμετρίαν λαβεῖν διὰ τὴν περὶ αὐτὰ σπουδὴν, ὅς που δηλὸς ἐστὶ καὶ τὰ συγγράμματα τοῖς μαθηματικοῖς λόγοις καταπυκνῶσας καὶ πανταχοῦ τὸ περὶ αὐτὰ θαῦμα τῶν φιλοσοφίας ἀντεχομένων ἐπεγεῖρων. ἐν δὲ τούτῳ τῷ χρόνῳ καὶ Λεωδάμας ὁ Θάσιος ἦν καὶ Ἀρχύτας ὁ Ταραντῖνος καὶ Θεαίτητος ὁ Ἀθηναῖος, παρ' ὧν ἐπηυξήθη τὰ θεωρήματα καὶ προήλθεν εἰς ἐπιστημονικωτέραν σύστασιν. Λεωδάμαντος δὲ νεώτερος ὁ Νεοκλείδης καὶ ὁ τούτου μαθητὴς Λέων, οἱ πολλὰ προσευπόρησαν τοῖς πρὸ αὐτῶν, ὥστε τὸν Λέοντα καὶ τὰ στοιχεῖα συνθεῖναι τῷ τε πλήθει καὶ τῇ χρεῖα τῶν δεικνυμένων ἐπιμελέστερον, καὶ διορισμοὺς εὐρεῖν, πότε δυνατόν ἐστὶ τὸ ζητούμενον πρόβλημα καὶ πότε ἀδύνατον. Εὐδοξος δὲ ὁ Κνίδιος, Λέοντος μὲν ὀλίγῳ νεώτερος, ἑταῖρος δὲ τῶν περὶ Πλάτωνα γενόμενος, πρῶτος τῶν καθόλου καλουμένων θεωρημάτων τὸ πλῆθος ἠύξησεν καὶ ταῖς τρισὶν ἀναλογίαις ἄλλας τρεῖς προσέθηκεν καὶ τὰ περὶ τὴν τομὴν ἀρχὴν λαβόντα παρὰ Πλάτωνος εἰς πλῆθος προήγαγεν καὶ ταῖς ἀναλύσεσιν ἐπ' αὐτῶν χρησάμενος. Ἀμύκλας δὲ ὁ Ἡρακλεώτης, εἷς τῶν Πλάτωνος ἑταίρων καὶ Μέναιχος ἀκροατὴς ὢν Εὐδόξου καὶ Πλάτωνι δὲ συγγεγονῶς καὶ ὁ ἀδελφὸς αὐτοῦ Δεινόστρατος ἔτι τελεωτέραν ἐποίησαν τὴν ὅλην γεωμετρίαν. Θεύδιος δὲ ὁ Μάγνης ἔν τε τοῖς μαθήμασιν ἔδοξεν εἶναι διαφέρων καὶ κατὰ τὴν ἄλλην φιλοσοφίαν· καὶ γὰρ τὰ στοιχεῖα καλῶς συνέταξεν καὶ πολλὰ τῶν ὀρικῶν καθολικώτερα ἐποίησεν. καὶ μέντοι καὶ ὁ Κυζικηνὸς Ἀθήναιος κατὰ τοὺς αὐτοὺς γεγονῶς χρόνους καὶ ἐν τοῖς ἄλλοις μὲν μαθήμασι, μάλιστα δὲ κατὰ γεωμετρίαν ἐπιφανῆς ἐγένετο. διῆγον οὖν οὗτοι μετ' ἀλλήλων ἐν Ἀκαδημίᾳ κοινὰς ποιούμενοι τὰς ζητήσεις. Ἐρμότιμος δὲ ὁ Κολοφώνιος τὰ ὑπ' Εὐδόξου προηυπορημένα καὶ Θεαιτήτου προήγαγεν ἐπὶ πλέον καὶ τῶν στοιχείων πολλὰ ἀνεῦρε καὶ τῶν τόπων τινὰ συνέγραψεν. Φίλιππος δὲ ὁ Μενδαῖος, Πλάτωνος ὢν μαθητὴς καὶ ὑπ' ἐκείνου προτραπεῖς εἰς τὰ μαθήματα, καὶ τὰς ζητήσεις ἐποίητο κατὰ τὰς Πλάτωνος ὑφηγήσεις καὶ ταῦτα πρὸ βάλαντος ἑαυτῷ, ὅσα ᾤετο τῇ Πλάτωνος φιλοσοφίᾳ συντελεῖν. οἱ μὲν οὖν τὰς ἱστορίας ἀναγράψαντες μέχρι τούτου προάγουσι τὴν τῆς ἐπιστήμης ταύτης τελείωσιν. οὐ πόλυ δὲ τούτων νεώτερός ἐστὶν Εὐκλείδης ὁ τὰ στοιχεῖα συναγαγὼν καὶ πολλὰ μὲν τῶν Εὐδόξου συντάξας, πολλὰ δὲ τῶν Θεαιτήτου τελεωσάμενος, ἔτι δὲ τὰ μαλακώτερον δεικνύμενα τοῖς ἔμπροσθεν εἰς ἀνελέγκτους ἀποδείξεις ἀναγαγὼν. γέγονε δὲ οὗτος ὁ ἀνὴρ ἐπὶ τοῦ πρώτου Πτολεμαίου· καὶ γὰρ ὁ Ἀρχιμήδης ἐπιβαλὼν καὶ τῷ πρώτῳ μνημονεύει τοῦ Εὐκλείδου, καὶ μέντοι καὶ φασὶν ὅτι Πτολεμαῖος ἠρετό ποτε αὐτόν, εἴ τίς ἐστὶν περὶ γεωμετρίαν ὁδὸς συντομωτέρα τῆς στοιχειώσεως· ὁ δὲ ἀπεκρίνατο, μὴ εἶναι βασιλικὴν ἀτραπὸν ἐπὶ γεωμετρίαν. νεώτερος μὲν οὖν ἐστὶ τῶν περὶ Πλάτωνα, πρεσβύτερος δὲ Ἐρατοσθένους καὶ Ἀρχιμήδους. οὗτοι γὰρ σύγχρονοι ἀλλήλοις, ὡς πού φησιν Ἐρατοσθένης. καὶ τῇ προαιρέσει δὲ Πλατωνικός ἐστὶ καὶ τῇ φιλοσοφίᾳ ταύτῃ οἰκεῖος, ὅθεν δὴ καὶ τῆς συμπάσης στοιχειώσεως τέλος προεστήσατο τὴν τῶν καλουμένων Πλατωνικῶν σχημάτων σύστασιν. πολλὰ μὲν οὖν καὶ ἄλλα τοῦ ἀνδρὸς τούτου μαθηματικὰ συγγράμματα θαυμαστῆς ἀκριβείας καὶ ἐπιστημονικῆς θεωρίας μεστά. τοιαῦτα γὰρ καὶ τὰ ὀπτικά καὶ τὰ κατοπτρικά, τοιαῦτα δὲ καὶ αἱ κατὰ μουσικὴν στοιχειώσεις, ἔτι δὲ τὸ περὶ διαιρέσεων βιβλίον. διαφερόντως δ' ἂν τις αὐτὸν ἀγασθῆι κατὰ τὴν γεωμετρικὴν στοιχειώσιν τῆς τάξεως ἕνεκα καὶ τῆς ἐκλογῆς τῶν πρὸς τὰ στοιχεῖα πεποιημένων θεωρημάτων τε καὶ προβλημάτων. καὶ γὰρ οὐχ ὅσα ἐνεχώρει λέγειν ἀλλ' ὅσα στοιχειοῦν ἠδύνατο παρεῖληφεν, ἔτι δὲ τοὺς τῶν

συλλογισμῶν παντοίους τρόπους, τοὺς μὲν ἀπὸ τῶν αἰτίων λαμβάνοντας τὴν πίστιν, τοὺς δὲ ἀπὸ τεκμηρίων ὠρμημένους, πάντας δὲ ἀνελέγκτους καὶ ἀκριβεῖς καὶ πρὸς ἐπιστήμην οἰκείου, πρὸς δὲ τούτοις τὰς μεθόδους ἀπάσας τὰς διαλεκτικάς, τὴν μὲν διαιρετικὴν ἐν ταῖς εὐρέσεσι τῶν εἰδῶν, τὴν δὲ ὀριστικὴν ἐν τοῖς οὐσιώδεσι λόγοις, τὴν δὲ ἀποδεικτικὴν ἐν τοῖς ἀπὸ τῶν ἀρχῶν εἰς τὰ ζητούμενα μεταβάσει, τὴν δὲ ἀναλυτικὴν ἐν ταῖς ἀπὸ τῶν ζητουμένων ἐπὶ τὰς ἀρχὰς ἀναστροφαῖς. καὶ μὴν καὶ τὰ ποικίλα τῶν ἀντιστροφῶν εἶδη τῶν τε ἀπλουστέρων καὶ τῶν συνθετωτέρων ἰκανῶς ἐστὶν ἐν τῇ πραγματείᾳ ταύτῃ διηκριβωμένα θεωρεῖν, καὶ τίνα μὲν ὅλα ὅλοις ἀντιστρέφειν δύναται, τίνα δὲ ὅλα μέρεσι καὶ ἀνάπαλιν, τίνα δὲ ὡς μέρη μέρεσιν. ἔτι δὲ λέγομεν τὴν συνέχειαν τῶν εὐρέσεων, τὴν οἰκονομίαν καὶ τὴν τάξιν τῶν τε προηγουμένων καὶ τῶν ἐπομένων, τὴν δύναμιν, μεθ' ἧς ἕκαστα παραδίδωσιν. ἢ καὶ τὸ τυχὸν προσθεῖς ἢ ἀφελὼν οὐκ ἐπιστήμης λανθάνεις ἀποπεσῶν καὶ εἰς τὸ ἐναντίον ψεῦδος καὶ τὴν ἄγνοιαν ὑπενεχθεῖς; ἐπειδὴ δὲ πολλὰ φαντάζεται μὲν ὡς τῆς ἀληθείας ἀντεχόμενα καὶ ταῖς ἐπιστημονικαῖς ἀρχαῖς ἀκολουθοῦντα, φέρεται δὲ εἰς τὴν ἀπὸ τῶν ἀρχῶν πλάνην καὶ τοὺς ἐπιπολαιότερους ἐξαπατᾶ, μεθόδους παραδέδωκεν καὶ τῆς τούτων διορατικῆς φρονήσεως, ἃς ἔχοντες γυμνάζειν μὲν δυνασόμεθα τοὺς ἀρχομένους τῆς θεωρίας ταύτης πρὸς τὴν εὐρεσιν τῶν παραλογισμῶν, ἀνεξαπάτητοι δὲ διαμένειν. καὶ τοῦτο δὴ τὸ σύγγραμμα, δι' οὗ τὴν παρασκευὴν ἡμῖν ταύτην ἐντίθησι, Ψευδαρίων ἐπέγραψεν, τρόπους τε αὐτῶν ποικίλους ἐν τάξει διαριθμησάμενος καὶ καθ' ἕκαστον γυμνάσας ἡμῶν τὴν διάνοιαν παντοίοις θεωρήμασι καὶ τῷ ψεύδει τὸ ἀληθὲς παραθεῖς καὶ τῇ πείρᾳ τὸν ἔλεγχον τῆς ἀπάτης συναρμόσας. τοῦτο μὲν οὖν τὸ βιβλίον καθαρτικόν ἐστὶ καὶ γυμναστικόν, ἢ δὲ στοιχείωσις αὐτῆς τῆς ἐπιστημονικῆς θεωρίας τῶν ἐν γεωμετρίᾳ πραγμάτων ἀνέλεγκτον ἔχει καὶ τελείαν ὑφήγησιν.