Το μεταπτυχιακό μάθημα

Ιστορία των Μαθηματικών (Υ16)

(Τετ. 18:00 - 21:00, Αίθ. Β)

προσφέρει μια επισκόπηση των πιο επιδραστικών μαθηματικών ιδεών που αναπτύχθηκαν από την αρχαιότητα έως και τους νεωτερικούς χρόνους στον ευρύτερο χώρο της Μεσογείου. Παράλληλα, εξετάζει τον ρόλο που διαδραμάτισαν οι κοινωνικοί, θεσμικοί και πολιτισμικοί παράγοντες στην εξέλιξη της μαθηματικής σκέψης και, αντιστρόφως, τους τρόπους με τους οποίους οι μαθηματικές ιδέες επηρέασαν την κοινωνία και τον πολιτισμό. Σε ιστοριογραφικό επίπεδο, στόχος του μαθήματος είναι να βοηθήσει τις φοιτήτριες και τους φοιτητές του ΙΦΕΤ να αναπτύξουν κριτική σκέψη ως προς τους τρόπους με τους οποίους κατανοείται και καταγράφεται η ιστορία των Μαθηματικών.

Μ. Σιάλαρος (msialaros@phs.uoa.gr)

https://en-uoa-gr.academia.edu/MichalisSialaros
https://www.ancientscienceportal.com
https://www.instagram.com/ancient_science_portal

Τον 5ο αιώνα μ.Χ., ο Πρόκλος γράφει σχόλια στο πρώτο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη. Σε αυτό το έργο, περιέχεται μια ενότητα (η οποία υποτίθεται ότι βασίζεται σε παλαιότερους συγγραφείς) που περιγράφει την εξέλιξη των μαθηματικών από τον Θαλή μέχρι τον Ευκλείδη (64.16 – 70.18)

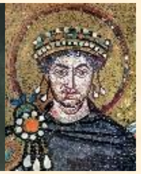
Ο Θαλής ήταν ο πρώτος ο οποίος, αφού ήλθε στην Αίγυπτο, μετέφερε τη θεωρία αυτή στην Ελλάδα· ο ίδιος ανακάλυψε πολλά πράγματα, και παρέδωσε τις αρχές πολλών άλλων στους νεωτέρους του, εφαρμόζοντας σε άλλες περιπτώσεις μέθοδο περισσότερο γενική και σε άλλες περισσότερο εμπειρική. Μετά από αυτόν ο Μάμερκος,[a] ο αδελφός του ποιητή Στησιχόρου, μνημονεύεται ότι επέδειξε ενδιαφέρον για τη μελέτη της γεωμετρίας και ο Ιππίας ο Ηλείος έγραψε για αυτόν ότι απέκτησε φήμη ως γεωμέτρης. Μετά από αυτούς ο Πυθαγόρας μετέτρεψε τη φιλοσοφία της [γεωμετρίας] σε μια μορφή ελεύθερης παιδείας, αναλογιζόμενος τις πρώτες αρχές της εκ των άνω, και διερευνώντας τα θεωρήματα αΰλως και νοερώς· αυτός ανακάλυψε επίσης τη θεωρία των αρρήτων[b] και τη σύσταση των κοσμικών σχημάτων. Μετά από αυτόν με πολλά [προβλήματα] της γεωμετρίας καταπιάστηκε ο Αναξαγόρας από τις Κλαζομενές, και ο Οινοπίδης ο Χίος, ο οποίος ήταν λίγο νεώτερος του Αναξαγόρα, και ο Πλάτων αναφέρει στους *Αντεραστές* ότι [αμφότεροι] απέκτησαν φήμη στα Μαθηματικά.

Μετά από αυτούς επιφανείς στη γεωμετρία έγιναν ο Ιπποκράτης ο Χίος, ο οποίος ανακάλυψε πώς τετραγωνίζεται ο μηνίσκος, και ο Θεόδωρος ο Κυρηναίος· ο Ιπποκράτης, μάλιστα, είναι ο πρώτος από τους προαναφερόμενους που συνέγραψε *Στοιχεία*. Ο Πλάτων, ο οποίος ακολουθεί μετά από αυτούς, συνέβαλε ώστε να λάβουν μεγάλη ανάπτυξη και οι λοιπές μαθηματικές επιστήμες και η γεωμετρία με τον ζήλο [που επέδειξε] για αυτές, ο οποίος είναι κατά κάποιον τρόπο εμφανής, αφού και τα συγγράμματά του τα έχει γεμίσει με μαθηματικούς συλλογισμούς και με κάθε ευκαιρία διεγείρει τον θαυμασμό προς αυτά όσων αφοσιώνονται στη φιλοσοφία. Την ίδια εποχή έζησαν επίσης ο Λεωδάμας από τη Θάσο, ο Αρχύτας ο Ταραντίνος και ο Θεαίτητος ο Αθηναίος, οι οποίοι αύξησαν τον αριθμό των θεωρημάτων και συνέβαλαν στην επιστημονικότερη συγκρότησή τους.

Νεώτερος του Λεωδάμαντος ήταν ο Νεοκλείδης, και ο μαθητής αυτού Λέων, οι οποίοι πρόσθεσαν πολλά σε όσα [είχαν επιτύχει] οι προγενέστεροί τους· έτσι, ο Λέων μπόρεσε να συντάξει τα *στοιχεία* με μεγαλύτερη επιμέλεια ως προς το πλήθος και τη χρήση των αποδεικνυόμενων [προτάσεων], και να βρει διορισμούς[a] για το πότε το ζητούμενο πρόβλημα είναι δυνατό και πότε αδύνατο. Ο Εύδοξος από την Κνίδο, λίγο νεώτερος του Λέοντος, αφού συνδέθηκε με τους κύκλους του Πλάτωνα, ήταν ο πρώτος ο οποίος αύξησε το πλήθος των λεγόμενων γενικών θεωρημάτων, στις τρεις αναλογίες πρόσθεσε άλλες τρεις, και προήγαγε τις σχετικές με την «τομή» [έρευνες] που είχε αρχίσει ο Πλάτων, χρησιμοποιώντας σε αυτές και τη μέθοδο της ανάλυσης.[b] Ακόμη περισσότερο τελειοποίησαν τη γεωμετρία ο Αμύκλας από την Ηράκλεια, ένας από τους εταίρους του Πλάτωνα, ο Μέναιχμος, ο οποίος ήταν μαθητής του Ευδόξου και συνδέθηκε με τον Πλάτωνα, και ο αδελφός αυτού Δεινόστρατος. Ο Θεύδιος από τη Μαγνησία φαίνεται, επίσης, ότι διακρίθηκε τόσο στα μαθηματικά όσο και στην υπόλοιπη φιλοσοφία· διότι και τα *στοιχεία* συνέταξε καλώς και γενίκευσε πολλά από τα επιμέρους[c] [θεωρήματα]. Και βεβαίως ο Αθήναιος από την Κύζικο, ο οποίος έζησε κατά την ίδια εποχή, έγινε επιφανής και στους άλλους κλάδους των μαθηματικών και, ιδιαιτέρως, στη γεωμετρία. Αυτοί ζούσαν όλοι μαζί στην Ακαδημία και διεξήγαγαν τις έρευνές τους από κοινού. Ο Ερμότιμος από την Κολοφώνα προήγαγε περισσότερο αυτά που είχαν επιτύχει ο Εύδοξος και ο Θεαίτητος, ανακάλυψε πολλά [από τα περιεχόμενα] στα *Στοιχεία* και συνέγραψε ορισμένα περί [γεωμετρικών] τόπων. Ο Φίλιππος από τη Μένδη, ο οποίος ήταν μαθητής του Πλάτωνα, και εκείνος τον προέτρεψε να ασχοληθεί με τα μαθηματικά, έκανε τις έρευνές του σύμφωνα με τις υποδείξεις του Πλάτωνα, ανέλαβε δε να κάνει όσα νόμιζε ότι συμβάλλουν στη φιλοσοφία του Πλάτωνα.

Μέχρι αυτού [του σημείου], λοιπόν, αφηγούνται την εξέλιξη αυτής της επιστήμης όσοι συνέγραψαν ιστορίες. Δεν είναι δε πολύ νεώτερος αυτών ο Ευκλείδης, ο οποίος συγκέντρωσε τα *στοιχεία*, έβαλε σε τάξη πολλά [θεωρήματα] του Ευδόξου, τελειοποίησε πολλά [θεωρήματα] του Θεαιτήτου, και προσέφερε αψεγάδιαστες αποδείξεις σε όσα οι προγενέστεροί του είχαν αποδείξει με τρόπο λιγότερο αυστηρό. Αυτός ο άνδρας έζησε την εποχή του Πτολεμαίου του πρώτου· διότι ο Αρχιμήδης, ο οποίος ακολουθεί αμέσως μετά τον πρώτο [Πτολεμαίο], μνημονεύει τον Ευκλείδη, και, ακόμη, λέγεται ότι ο Πτολεμαίος τον ρώτησε κάποτε αν υπάρχει τρόπος για [να μάθει κανείς] τη γεωμετρία πιο σύντομος από τη *Στοιχείωση* και εκείνος απάντησε ότι δεν υπάρχει «βασιλική οδός» προς τη γεωμετρία. Είναι, λοιπόν, νεώτερος από τους [μαθητές] του Πλάτωνα, αλλά πρεσβύτερος του Ερατοσθένη και του Αρχιμήδη. Διότι αυτοί ήταν σύγχρονοι, όπως αναφέρει κάπου ο Ερατοσθένης. Όσον αφορά τις προθέσεις του ήταν Πλατωνικός και φιλικά διακείμενος προς τη φιλοσοφία αυτή· για αυτόν τον λόγο άλλωστε έθεσε ως τελικό σκοπό της *Στοιχειώσεως* την κατασκευή των λεγόμενων πλατωνικών σχημάτων. Υπάρχουν και πολλά άλλα μαθηματικά συγγράμματα αυτού του άνδρα, θαυμαστά ως προς την ακρίβειά τους και μεστά επιστημονικών διερευνήσεων. Διότι τέτοια είναι τα *Οπτικά* και τα *Κατοπτρικά*, η *Μουσική στοιχείωσις*, και επίσης

Η «ευκλείδεια» παράδοση



~1600 π.Χ. ~600 π.Χ. ~300 π.Χ. 529-534 μ.Χ. 1629 μ.Χ.

Τα συμπεράσματά του ήταν
τόσο αλάνθαστα όσο τόσες
προτάσεις του **Ευκλείδη**.

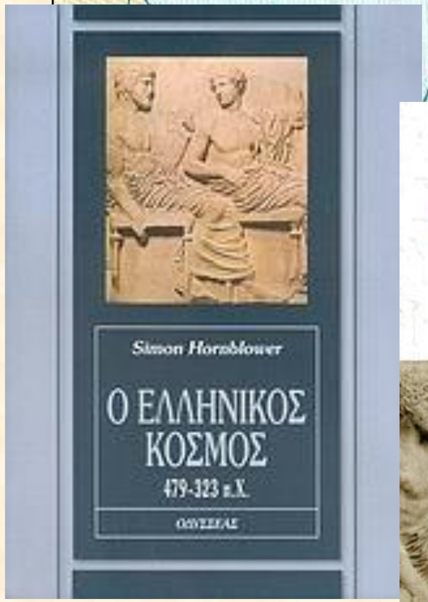
A. C. Doyle, *A Study in Scarlet*

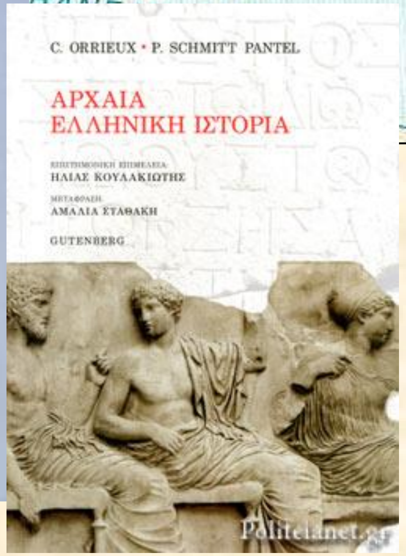
Τα μαθηματικά κατά την Ελληνιστική περίοδο

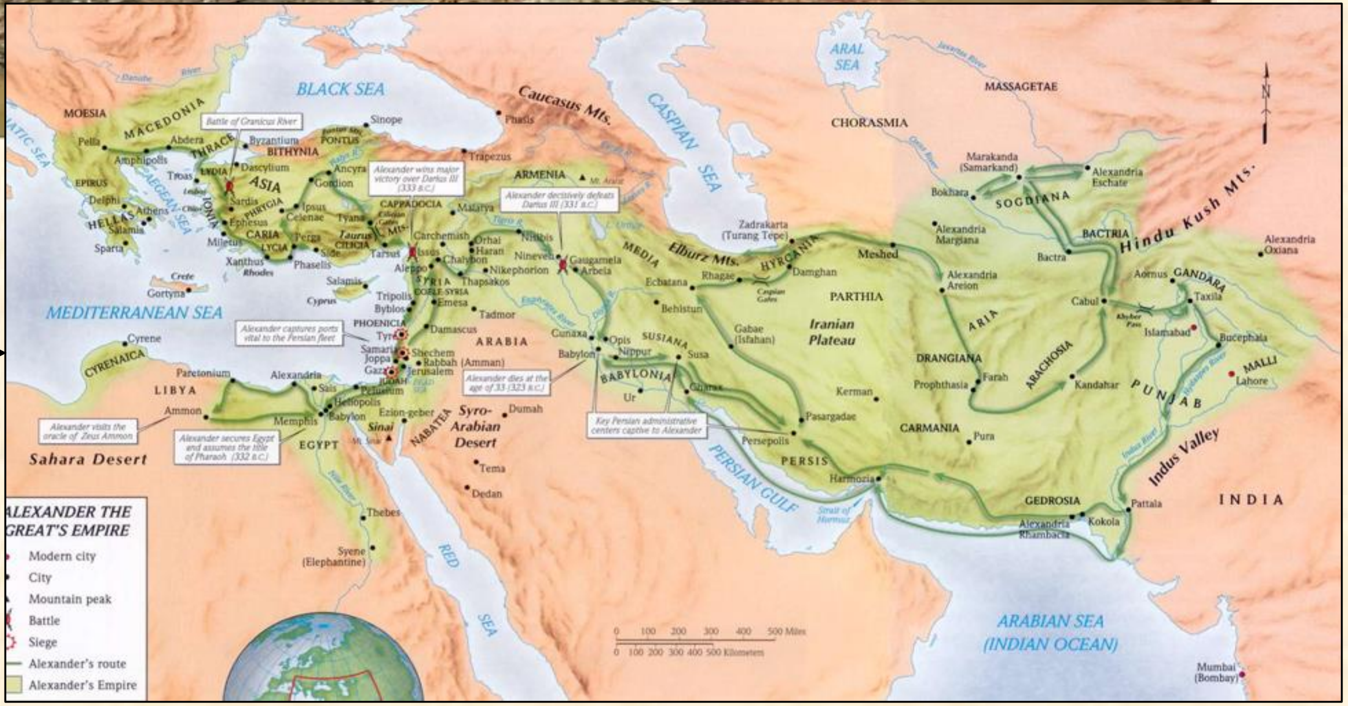
(3ος – 1ος αιώνας π.Χ.)

- Η Αλεξάνδρεια μετατρέπεται σταδιακά σε κέντρο της μαθηματικής δραστηριότητας.
- Για πρώτη φορά, εμφανίζονται μαθηματικές σχολές που δεν σχετίζονται άμεσα με τις φιλοσοφικές.
- Κατά την περίοδο αυτή, δραστηριοποιείται η «αγία τριάδα» των ελληνικών μαθηματικών: Ευκλείδης (ο στοιχειωτής), Αρχιμήδης (ο μηχανικός), Απολλώνιος (ο γεωμέτρης).
- Μπορούμε να εντοπίσουμε δύο σημαντικές κατευθύνσεις έρευνας: «στοιχείωση» και «εφαρμογές».
- Τυποποίηση μορφολογικών στοιχείων των μαθηματικών κειμένων.
- Δημιουργία συγκεκριμένων θεματικών («τόποι»).
- Από αυτή την περίοδο αρχίζουμε να έχουμε τις πρώτες σωζόμενες μαθηματικές πραγματείες (Αυτόλυκος, Ευκλείδης).

Από τον Κλασικό, στον Ελληνιστικό Κόσμο







Μακεδονική Αυτοκρατορία (4ος αιώνας π.Χ.)
Οι σημαντικότερες πόλεις που ίδρυσε ο Μ. Αλέξανδρος
el.wikipedia.org / podilato98.blogspot.gr
ΘΡΑΚΗ
Αλεξανδρούπολη η Θρακική
ΜΑΚΕΔΟΝΙΑ
Πέλλα
ΗΠΕΙΡΟΣ
Χαιρώνεια
Θήβα
Αθήνα
Σπάρτη
Εύξεινος Πόντος
Αλεξάνδρεια Μέλα Κόλπου
Βυζάντιο
Άβυδος
Γρανικός
Γόρδιος
Άγκυρα
ΜΙΣΙΑ
Σαρδείς
ΛΥΔΙΑ
Έφεσος
ΛΥΚΙΑ
Μίλητος
Αλεξάνδρεια της Λάτμου
Αλικαρνασσός
ΦΡΥΓΙΑ
ΠΑΜΦΥΛΙΑ
ΚΑΠΠΑΔΟΚΙΑ
ΚΙΛΙΚΙΑ
Ισσός
Ταρσός
Αλεξάνδρεια της Ισσού (Αλεξανδρέττα)
ΚΡΗΤΗ
ΚΥΠΡΟΣ
Σιδώνα
Τύρος
ΦΟΙΝΙΚΗ
Δαμασκός
ΣΥΡΙΑ
Θάψακος
Μεσόγειος Θάλασσα
Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου
Γάζα
Μέμφιδα
Σίβα
ΑΙΓΥΠΤΟΣ
Νείλος
Ερυθρά Θάλασσα
ΚΑΥΚΑΣΟΣ
ΑΡΜΕΝΙΑ
Τίγρης
Γαυγάμηλα
Νίσιβη
Άρβηλα
Αλεξάνδρεια Ασσυρίας
ΜΕΣΟΠΟΤΑΜΙΑ
Ευφράτης
Βαβυλώνα
Κασπία Θάλασσα
ΜΗΔΙΑ
Ράγες
Λιμάνια Κασπίας
Εκατόνπυλο
ΠΑΡΘΙΑ
Θάλασσα Αράλης
Ιαξάρτης
Ωξός
ΣΟΓΔΙΑΝΗ
Αλεξάνδρεια η Εσχάτη
Σαμαρκάνδη
Αλεξάνδρεια η Σκυθική (Μερβ)
Αλεξάνδρεια η Παρθυινή
ΠΑΡΟΠΑΜΙΣΑΔΕΣ
Αλεξάνδρεια του Ωξού
Βάκτρια
ΒΑΚΤΡΙΑΝΗ
Αλεξάνδρεια του Καυκάσου
Αλεξάνδρεια η Αρία (Χεράτ)
ΑΡΙΑ
Αλεξάνδρεια (Κανταχάρ)
Άορνος
Υδάσπης
Τάξιλα
Αλεξάνδρεια Βουκεφάλα
Αλεξάνδρεια Νίκαια
Ινδός
Ύφασις
Αλεξάνδρεια του Ύφαση
Αλεξάνδρεια
Οι Αλεξάν
του Αλέξ

Βιβλιοθήκη και Μουσείο

- Η βιβλιοθήκη ιδρύεται από τον Δημήτριο τον Φαληρέα, υπό την αιγίδα του Πτολεμαίου του Α΄.
- Δημόσια βιβλιοθήκη. Οικονομική στήριξη από το κράτος.
- ~500,000 πάπυροι. ~100 ερευνητές. Αναφορές ότι ο Πτολεμαίος ο Β΄ αγοράζει τη βιβλιοθήκη του Αριστοτέλη από τον Νηλέα, ένα μαθητή του Αριστοτέλη.
- Ανέκδοτα για τη συλλογή των βιβλίων.

Πρόγραμμα

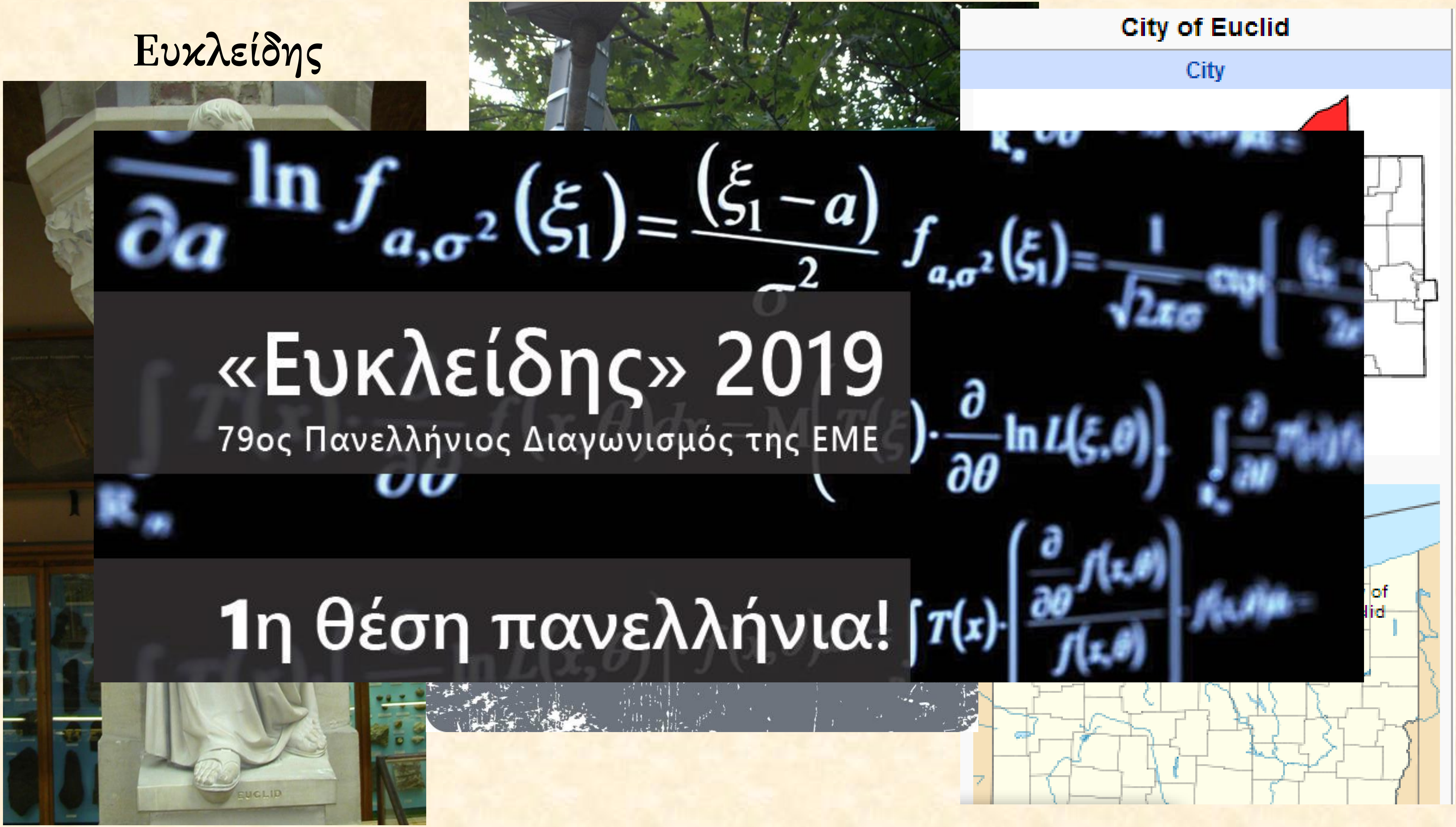
Συστηματική συλλογή, αποκατάσταση, αναθεώρηση και έκδοση των πιο σημαντικών έργων της κλασσικής αρχαιότητας.

- Δημήτριος (ιδρυτής) ετοιμάζει μια συλλογή με τους μύθους του Αισώπου και γράφει μια αναθεωρημένη *Ιστορία των Αθηνών*
- Ζηνόδοτος (1ος διευθυντής, βασιλικός παιδαγωγός) εκδίδει Όμηρο, Ησίοδο και Πίνδαρο.
- Αλέξανδρος ο Αιτωλός, εκδίδει τραγωδίες και κωμωδίες.
- Καλλίμαχος, συστηματοποιεί και καταγράφει την κλασσική γραμματεία. Οι *Πίνακες* καταγράφουν και τα περιεχόμενα της Βιβλιοθήκης.
- Ερατοσθένης εκδίδει αναθεωρημένη γεωγραφία.
- Αριστοφάνης ο Βυζάντιος εκδίδει Όμηρο, Ησίοδο, Αριστοφάνη και Ευριπίδη. Δημιουργεί τα σημεία στίξης.
- Αρίσταρχος εκδίδει Όμηρο, Ησίοδο, αστρονομικά έργα.
- Η μετάφραση των Εβδομήκοντα (της Παλαιάς Διαθήκης).

Υπό μια έννοια, οι Αλεξανδρινοί συνεχίζουν την κειμενική παράδοση του Λυκείου.

- Ο Αλέξανδρος (ιδρυτής της πόλης) και ο Πτολεμαίος (πρώτος κυβερνήτης) υπήρξαν μαθητές του Αριστοτέλη.
- Ο Δημήτριος (ιδρυτής της Βιβλιοθήκης) ήταν μαθητής του Θεόφραστου (διάδοχου του Αριστοτέλη στο Λύκειο).
- Ο Στράτων (δάσκαλος του Πτολεμαίου Β΄) ήταν ο διάδοχος του Θεόφραστου.

Ευκλείδης


City of Euclid
City
«Ευκλείδης» 2019
79ος Πανελλήνιος Διαγωνισμός της ΕΜΕ
1η θέση πανελλήνια!
EUCLID


0:30 / 2:33
Elements (The Euclid Song)
Los elementos de euclides
by mapacheplus


TEAM EUCLID


TEAM EUCLID
© WORDS & UNWORDS

Πληροφορίες για τη ζωή του Ευκλείδη

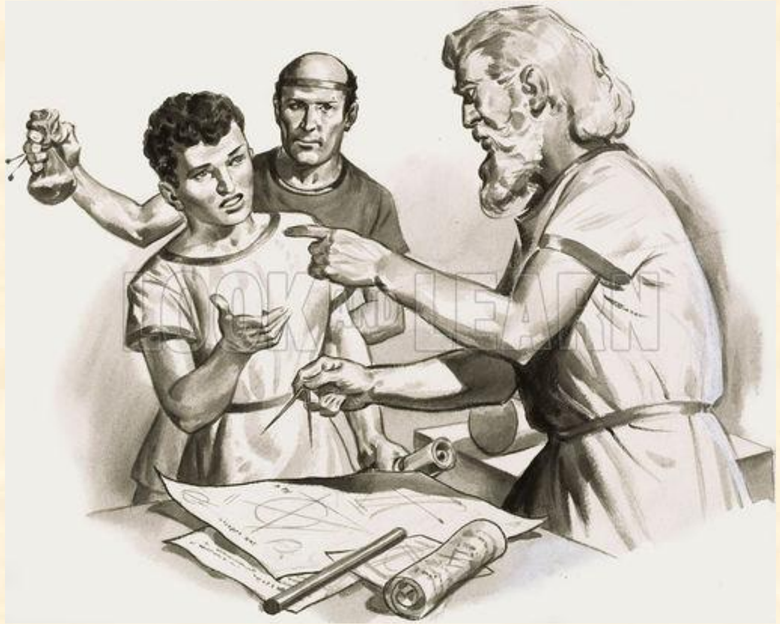
«Αυτός ο άνδρας έζησε την εποχή του Πρώτου Πτολεμαίου -- γιατί ο Αρχιμήδης, ο οποίος έζησε αμέσως μετά από τον Πτολεμαίο, αναφέρει τον Ευκλείδη. Επιπλέον, λένε ότι ο **Πτολεμαίος τον ρώτησε εάν υπάρχει κάποια οδός για τη γεωμετρία που να είναι πιο σύντομη από την οδό των *Στοιχείων*. Και ο Ευκλείδης, τότε, απάντησε ότι δεν υπάρχει βασιλική οδός στη γεωμετρία.** Έζησε πριν από τον Ερατοσθένη και τον Αρχιμήδη, αφού αυτοί ήταν σύγχρονοι, όπως αναφέρει κάπου ο Ερατοσθένης.»

Proclus, *In Eucl.* 68.10-7.

Συρακούσες, 212 π.Χ.

Παρ’ Εὐκλείδῃ τις ἀρξάμενος γεωμετρεῖν, ὡς τὸ πρῶτον θεώρημα ἔμαθεν, ἤρετο τὸν Εὐκλείδην· “τί δέ μοι πλέον ἔσται ταῦτα μαθόντι;”, καὶ ὁ Εὐκλείδης τὸν παῖδα καλέσας “δός”, ἔφη, “αὐτῷ τριώβολον, ἐπειδὴ δεῖ αὐτῷ ἐξ ὧν μανθάνει κερδαίνειν”.

Stobaeus, *Anth.* 2.31.114.



Ισλαμικές Μαρτυρίες

«Ήταν ο Ευκλείδης, ο γιος του Ναυκράτη και της Βερενίκης, ήταν αυτός που αποκάλυψε τα μυστικά της γεωμετρίας, πριν από τον Αρχιμήδη και τους άλλους. Ήταν ένας από τους μαθηματικούς φιλοσόφους…»

Al-Nadim, *Fihrist* 7.2

«Ο Ευκλείδης, γιος του Ναυκράτη, γιος του Ζήναρχου, ο καλούμενος και συγγραφέας της γεωμετρίας, ένας φιλόσοφος παλαιότερων χρόνων, Ρωμαίος κατά την εθνικότητα, γεννήθηκε στην Τύρο και έζησε στη Δαμασκό.»

Al-Qifti, *Ta' rikh al Ḥukama*

Πότε ἔζησε;

Terminus post quem

- Οι μαθηματικοί του 4[ου] αιώνα (π.χ. Εύδοξος) φαίνεται να τον αγνοούν. Ο Αριστοτέλης δεν τον αναφέρει. Σε μια περίπτωση (*APr.* 41b; cf. *Metaph.* 1051a) προσφέρει μια απόδειξη για την πρόταση I.5 η οποία είναι πολύ διαφορετική από αυτή των *Στοιχείων*.

Terminus ante quem

- Ο Αρχιμήδης (α) αναφέρει τρεις φορές τον Ευκλείδη (*Sph. Cyl.* I.2, I.6; *Euch.* 29r 1.3-5), (b) δεν γράφει *Στοιχεία,* (c) ερευνά 8 πολύεδρα πλέον των 5 κανονικών.
- Ο Απολλώνιος (α) δεν γράφει *Στοιχεία*, (β) αναφέρεται στον Ευκλείδη και προσπαθεί να τον βελτιώσει, (γ) σπούδασε με τους μαθητές του Ευκλείδη στην Αλεξάνδρεια (*Coll.* 7.678.10-2.).

Αναπαραστάσεις του Ευκλείδη

Ευκλείδης

Από τη Βικιπαίδεια, την ελεύθερη εγκυκλοπαίδεια

Το λήμμα δεν περιέχει **πηγές** ή αυτές που περιέχει δεν επαρκούν. Μπορείτε να βοηθήσετε προσθέτοντας την κατάλληλη τεκμηρίωση. Ατεκμηρίωτο υλικό μπορεί να αμφισβητηθεί και να αφαιρεθεί.
Η σήμανση τοποθετήθηκε στις 28/04/2014.

Για άλλες χρήσεις, δείτε: Ευκλείδης (αποσαφήνιση).

Ο **Ευκλείδης** από την Αλεξάνδρεια (~ 350 π.Χ. - 270 π.Χ.), ήταν Έλληνας μαθηματικός, που δίδαξε και πέθανε στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου, περίπου κατά την διάρκεια της βασιλείας του Πτολεμαίου Α' (323 π.Χ. - 283 π.Χ.). Στις μέρες μας είναι γνωστός ως ο «πατέρας» της Γεωμετρίας. Ο Ευκλείδης κατέχει μια κρίσιμη θέση στην ιστορία της Λογικής και των Μαθηματικών, καθώς είναι ο πρώτος που παράγει ένα αυστηρά δομημένο και συνεκτικό σύστημα προτάσεων (θεωρημάτων και πορισμάτων) με βάση ένα σύνολο ορισμών και 5 μόνο αρχικές αναπόδεικτες προτάσεις (αιτήματα). Κατ' αυτό το τρόπο περιέλαβε στο σύστημα αυτό και προτάσεις ήδη διατυπωμένες παλαιότερων σημαντικών μαθηματικών, όπως ο Θαλής, ο Πυθαγόρας, ο Θεαίτητος, ο Λεωδάμαντας και ο Εύδοξος.

Ευκλείδης

Γέννηση	323 π.Χ.
Τόπος γέννησης	άγνωστο
Θάνατος	286 π.Χ.
Τόπος θανάτου	Αλεξάνδρεια
Ερευνητικός τομέας	Γεωμετρία
Επάγγελμα/ιδιότητες	μαθηματικός και συγγραφέας

Wikimedia Commons

δεδομένα (π • σ • ε)


EUCLID
GEOMETRY
EUCLID

Ευκλείδης ο Μεγαρεύς

Ο Πλάτωνας αναφέρει (*Φαίδων*) ότι ο Ευκλείδης ήταν παρών την ώρα του θανάτου του Σωκράτη. Επίσης, ο Ευκλείδης είναι ο αφηγητής στον *Θεαίτητο*.

Euclid of Megara Dressing as a Woman to Hear Socrates Teach in Athens, by Domenico Marolì, c. 1650

EVCLIDE MEGARENSE
ACVTISSIMO PHILOSOPHO
SOLO INTRODVTTORE DELLE
SCIENTIE MATHEMATICE.

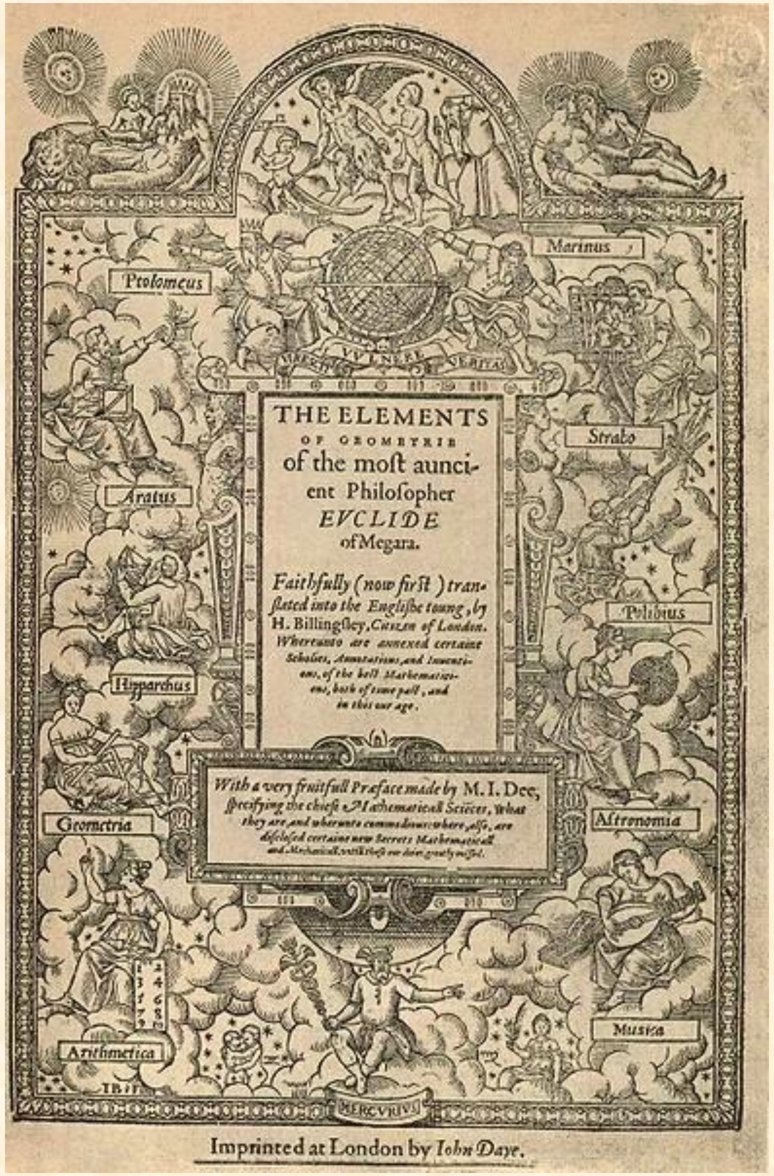
DILIGENTEMENTE RASSETTATO,
& alla integrità ridotto, per il degno professore di tal
Scientie Nicolò Tartalea Brisciano.

SECONDO LE DVE TRADOTTIONI.

CON VNA AMPLA ESPOSITIONE DELLO ISTESSO
tradottore di nuouo aggionta, talmente chiara, che ogni mediocre
ingegno, senza la notitia, ouer suffragio di alcun'altra scientia
con facilità serà capace a poterlo intendere.

Di nuouo con ogni diligenza ben corretto, e ristampato.

IN VENETIA,
Appresso gli Heredi di Troian Nauo, alla libraria dal Lione.
M D LXXXVI.

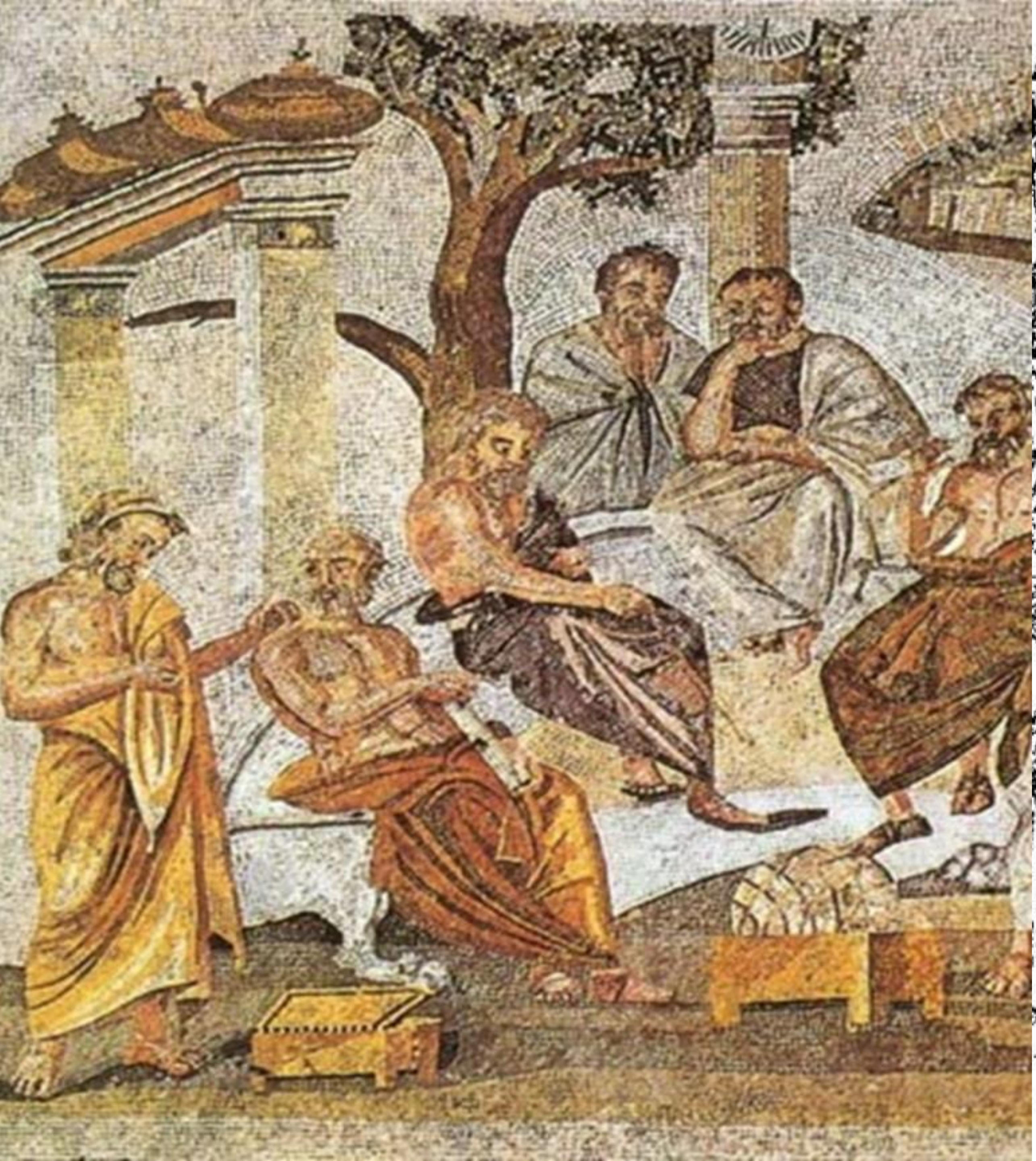


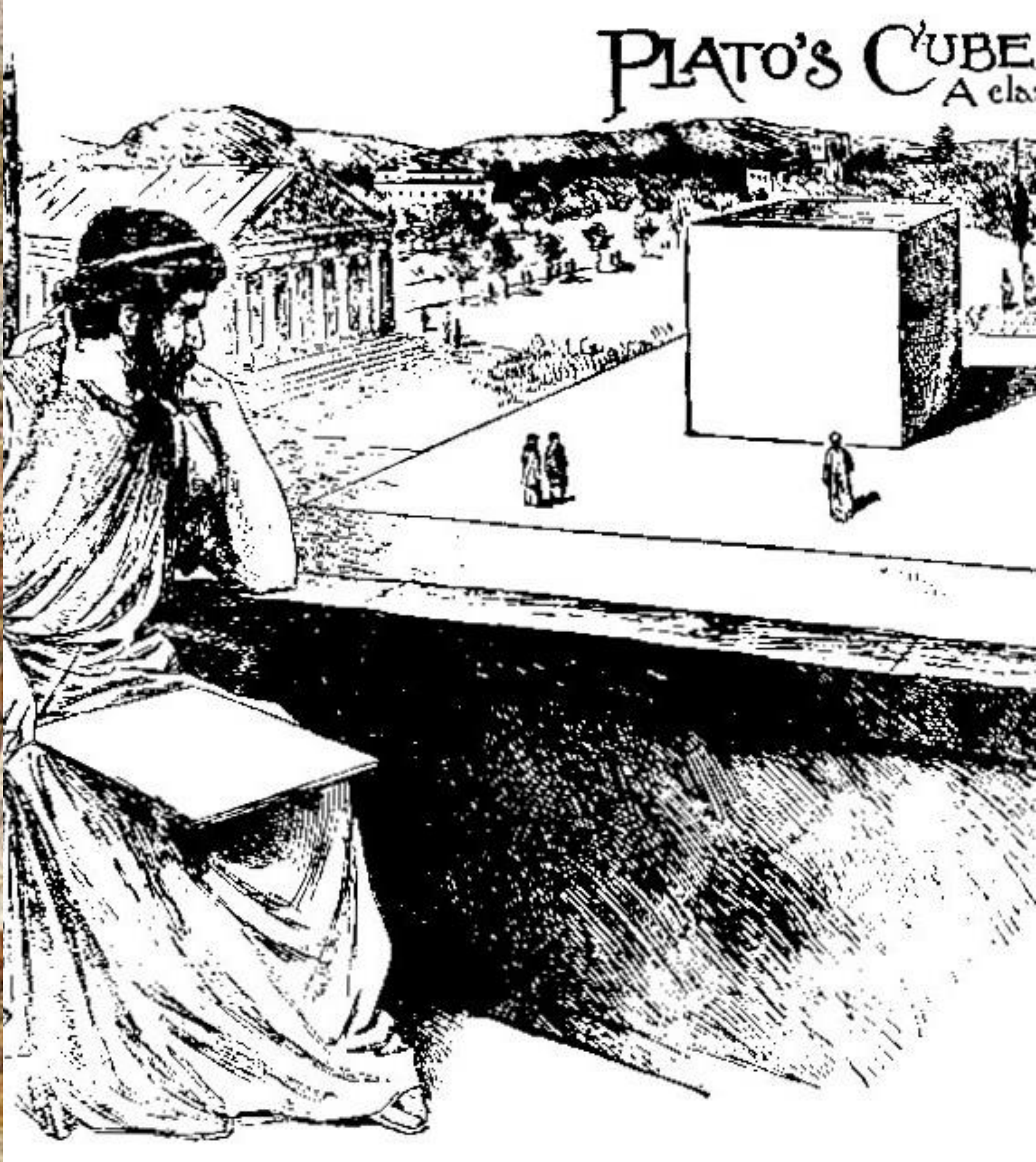
THE ELEMENTS
OF GEOMETRIE
of the most aunci-
ent Philosopher
EVCLIDE
of Megara.

Faithfully (now first) trans-
lated into the Englishe toung, by
H. Billingsley, Citizen of London.
Whereunto are annexed certaine
Scholies, Annotations, and Inuenti-
ons, of the best Mathematici-
ens, both of time past, and
in this our age.

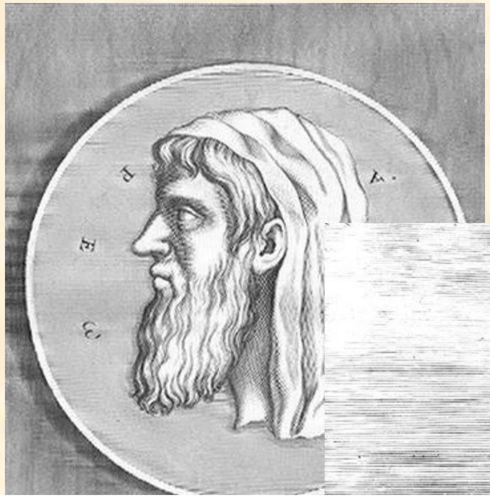
With a very fruitfull Præface made by M. I. Dee,
specifying the chiefe Mathematicall Sciēces, what
they are, and wherunto commodious: where, also, are
disclosed certaine new Secrets Mathematicall
and Mechanicall, vntill these our daies, greatly missed.

Imprinted at London by Iohn Daye.




PLATO'S CUBE

*Euclid of Megara Dressing as a Woman to Hear Socrates Teach in Athen*s, by Domenico Marolì, c. 1650



Ευκλείδης

Από τη Βικιπαίδεια, την ελεύθερη εγκυκλοπαίδεια

Το λήμμα δεν περιέχει **πηγές** ή αυτές που περιέχει δεν επαρκούν. Μπορείτε να βοηθήσετε προσθέτοντας την κατάλληλη τεκμηρίωση. Ατεκμηρίωτο υλικό μπορεί να αμφισβητηθεί και να αφαιρεθεί.
Η σήμανση τοποθετήθηκε στις 28/04/2014.

Για άλλες χρήσεις, δείτε: Ευκλείδης (αποσαφήνιση).

Ο **Ευκλείδης** από την Αλεξάνδρεια (~ 350 π.Χ. - 270 π.Χ.), ήταν Έλληνας μαθηματικός, που δίδαξε και πέθανε στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου, περίπου κατά την διάρκεια της βασιλείας του Πτολεμαίου Α΄ (323 π.Χ. - 283 π.Χ.). Στις μέρες μας είναι γνωστός ως ο «πατέρας» της Γεωμετρίας. Ο Ευκλείδης κατέχει μια κρίσιμη θέση στην ιστορία της Λογικής και των Μαθηματικών, καθώς είναι ο πρώτος που παράγει ένα αυστηρά δομημένο και συνεκτικό σύστημα προτάσεων (θεωρημάτων και πορισμάτων) με βάση ένα σύνολο ορισμών και 5 μόνο αρχικές αναπόδεικτες προτάσεις (αιτήματα). Κατ' αυτό το τρόπο περιέλαβε στο σύστημα αυτό και προτάσεις ήδη διατυπωμένες παλαιότερων σημαντικών μαθηματικών, όπως ο Θαλής, ο Πυθαγόρας, ο Θεαίτητος, ο Λεωδάμαντας και ο Εύδοξος.

Ευκλείδης

Γέννηση	323 π.Χ.
Τόπος γέννησης	άγνωστο
Θάνατος	286 π.Χ.
Τόπος θανάτου	Αλεξάνδρεια
Ερευνητικός τομέας	Γεωμετρία
Επάγγελμα/ ιδιότητες	μαθηματικός και συγγραφέας

Wikimedia Commons

δεδομένα (π • σ • ε)

Τα Στοιχεία του Ευκλείδη [Επεξεργασία | επεξεργασία κώδικα]

Το πιο γνωστό έργο του είναι τα *Στοιχεία*, που αποτελείται από 13 βιβλία. Εκεί, οι ιδιότητες των γεωμετρικών αντικειμένων και των ακεραίων αριθμών προκύπτουν από ένα σύνολο αξιωμάτων, εμπνέοντας την αξιωματική μέθοδο των μοντέρνων μαθηματικών. Παρ' ότι πολλά από τα θεωρήματα που περιέχονταν στα *Στοιχεία* ήταν ήδη γνωστά, ένα από τα επιτεύγματα του Ευκλείδη ήταν ότι τα παρουσίασε σε ένα ενιαίο, λογικά συμπαγές πλαίσιο. Το έργο του Ευκλείδη ήταν τόσο σημαντικό ώστε η γεωμετρία που περιέγραψε στα *Στοιχεία* του (η βάση της οποίας είναι: έστω μία ευθεία ε και ένα σημείο Α όχι πάνω σε αυτήν την ευθεία, τότε υπάρχει μόνο μία ευθεία, παράλληλη της ε, που διέρχεται από το Α) ονομάστηκε Ευκλείδεια, ενώ τα *Στοιχεία* σήμερα θεωρούνται ένα από τα σημαντικότερα μαθηματικά έργα όλων των εποχών. Όταν ο Πτολεμαίος Α΄ του ζήτησε έναν πιο εύκολο τρόπο από τα *Στοιχεία* του για να μάθει Γεωμετρία η απάντηση του μεγάλου μαθηματικού ήταν: *«Δεν υπάρχει βασιλική οδός για τη Γεωμετρία»*. Αναφορά, επίσης, στον Ευκλείδη γίνεται και στο Ανθολόγιο του Στοβαίου όπου γράφονται τα ακόλουθα: *"Παρ' Εὐκλείδῃ τις ἀρξάμενος γεωμετρεῖν, ὡς τὸ πρῶτον θεώρημα ἔμαθεν, ἤρετο τὸν Εὐκλείδην: "Τί δέ μοι πλέον ἔσται ταῦτα μαθόντι;" καὶ ὁ Εὐκλείδης τὸν παῖδα καλέσας "Δός", ἔφη, "αὐτῷ τριώβολον, ἐπειδὴ δεῖ αὐτῷ ἐξ ὧν μανθάνει κερδαίνειν"*. Σε ελεύθερη απόδοση: «Κάποιος που είχε αρχίσει να διδάσκεται γεωμετρία δίπλα στον Ευκλείδη, μόλις έμαθε το πρώτο θεώρημα τον ρώτησε: "Τί περισσότερο θα κερδίσω αν τα μάθω όλα αυτά;" Τότε ο Ευκλείδης φώναξε το δούλο του και του είπε: "Δώσε σε αυτόν τρεις οβολούς, διότι έχει ανάγκη να κερδίζει κάτι από ό,τι μαθαίνει».

Σχετικά με τη ζωή του [Επεξεργασία | επεξεργασία κώδικα]

Σχεδόν τίποτα δεν είναι γνωστό σχετικά με την ζωή του Ευκλείδη εκτός από αυτά που αναφέρονται στα βιβλία του και ελάχιστες βιογραφικές πληροφορίες που προέρχονται από αναφορές τρίτων. Ήταν ενεργό μέλος της βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας και πιθανόν να είχε σπουδάσει στην Ακαδημία του Πλάτωνα στην Αθήνα. Έγινε γνωστός στην πόλη της Αθήνας για τις μαθηματικές του εργασίες και γι' αυτό προσκλήθηκε από τον Πτολεμαίο Α΄ στην Αλεξάνδρεια. Η διάρκεια της ζωής του, όπως και ο τόπος γέννησής του μας παραμένουν άγνωστα. Κατά τον Μεσαίωνα, πολλοί δυτικοί συγγραφείς τον ταύτισαν λανθασμένα με έναν κατά ένα αιώνα προγενέστερο Σωκρατικό φιλόσοφο, αποκαλώντας τον *Ευκλείδη από τα Μέγαρα*.

Δείτε επίσης [Επεξεργασία | επεξεργασία κώδικα]

- Ευκλείδεια Γεωμετρία

Τα έργα του Ευκλείδη

Σωζόμενα έργα	Απολεσθέντα έργα
Στοιχεία	*Ψευδάρια* Περί εσφαλμένων συλλογισμών στα μαθηματικά
Δεδομένα	*Κωνικά στοιχεία*
Περί διαιρέσεων Σώζεται στα Αραβικά	*Τόποι επί επιφανειών*
Οπτικά	*Πορίσματα*
Κατοπτρικά	
Κατατομή κανόνος	
Φαινόμενα	

Επίσης διασώζονται δύο έργα στα αραβικά που αποδίδονται στον Ευκλείδη αλλά η αυθεντικότητα τους αμφισβητείται.

Ποιο είναι το πρόγραμμα του Ευκλείδη;

Στοιχείωση

Σχεδόν για κάθε μαθηματική επιστήμη, ετοίμασε *Στοιχεία* ως εισαγωγές, όπως για τη γεωμετρία με τα 13 βιβλία, και την αστρονομία στα *Φαινόμενα*, και για τη μουσική και την οπτική παρομοίως…

Μαρίνος, *Εις Ευκλ.* 254.16-20.

Ο Ευκλείδης συνέθεσε τα *Στοιχεία*, συγκέντρωσε πολλά από τα αποτελέσματα του Ευδόξου, τελειοποίησε αρκετά του Θεαίτητου, και επίσης απόδειξε με αναντίλεκτο τρόπο αυτά τα οποία οι προηγούμενοι είχαν δείξει κάπως πιο χαλαρά.

Πρόκλος, *Εις Ευκλ.* 68.7-10.

Εκπαίδευση

- Ανέκδοτο με τον μαθητή.
- Ο Πάππος μαρτυρεί ότι ο Απολλώνιος σπούδασε με τους μαθητές του Ευκλείδη στην Αλεξάνδρεια.
- Τα έργα του έχουν παιδαγωγικό χαρακτήρα (ειδικά τα *Ψευδάρια*).

Τα *Στοιχεία* ως «κειμενικό είδος»

- Η πρακτική της συγγραφής *Στοιχείων* δεν ήταν αποκλειστικά μαθηματική

(π.χ. Ο Αριστόξενος γράφει *Στοιχεία* αρμονίας, ο Εύδρομος ηθικής, ο Ποσειδώνιος μετεωρολογίας, ο Πρόκλος θεολογίας κτλ.)

- Ο Ευκλείδης δεν ήταν ο πρώτος που έγραφε *Στοιχεία* με μαθηματικό περιεχόμενο (Ιπποκράτης ο Χίος, Λέοντας, Θεύδιος).

Ο Πλάτωνας χρησιμοποιεί τον όρο για να περιγράψει τα μέρη του λόγου, π.χ. τα γράμματα, τα οποία συνδυαζόμενα δημιουργούν συλλαβές, λέξεις κτλ. *cf. Tht.* 201d-202c; *Cra.* 424d; *R.* 402a-b.
Επίσης, με τον όρο «στοιχεία» περιγράφεται η πρώτη αρχή της ύλης (*In Ph.* 9.7.10-3; cf. Plato, *Ti.* 54d-56b, *Sph.* 252b.).
Ο Αριστοτέλης ονομάζει «στοιχεία αποδείξεων» τα βασικά επιχειρήματα από τα οποία προκύπτουν τα πιο σύνθετα (Aristotle, *Metaph.* 998a, 1014a-b.)

Στη γεωμετρία ο όρος χρησιμοποιείται για να περιγράψει
(1) Τα απλούστερα γεωμετρικά όντα, π.χ. σημεία, γραμμές, από τα οποία προκύπτουν τα πιο σύνθετα σχήματα.
(2) Προτάσεις οι οποίες χρησιμοποιούνται στην απόδειξη άλλων προτάσεων.
(3) Ένα βιβλίο το οποίο περιέχει αρχές γεωμετρίας και είναι δομημένο με αυτό τον τρόπο. Η συγγραφή ενός τέτοιου έργου λέγεται «στοιχείωσις» και ο συγγραφέας «στοιχειωτής».

Το περιεχόμενο των *Στοιχείων*

Τι σημαίνει Στοιχεία Γεωμετρίας;

Το έργο αποτελείται από 13 βιβλία:

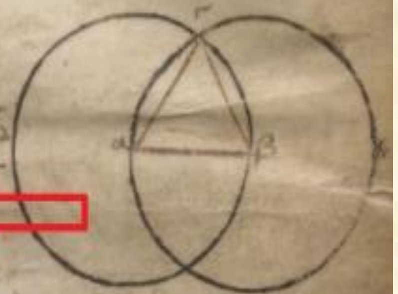
- Τα δύο πρώτα πραγματεύονται την κατασκευή και τις ιδιότητες βασικών ευθυγράμμων σχημάτων και τα κύρια αποτελέσματα που περιέχουν είναι το πυθαγόρειο θεώρημα (I.47-8) και ο τετραγωνισμός τυχόντος πολυγώνου (II.14).
- Τα βιβλία III και IV πραγματεύονται τις ιδιότητες του κύκλου και των εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων πολυγώνων.
- Το βιβλίο V είναι αφιερωμένο στη θεωρία αναλογιών επί γεωμετρικών μεγεθών, η οποία στο επόμενο βιβλίο εφαρμόζεται στην ομοιότητα των επιπέδων σχημάτων.
- Τα τρία βιβλία που ακολουθούν περιέχουν τη θεωρία των αριθμών.
- Το βιβλίο X, που είναι το ογκωδέστερο όλων, πραγματεύεται την ασυμμετρία και την ταξινόμηση των ασύμμετρων μεγεθών.
- Τέλος, τα βιβλία XI-XIII περιλαμβάνουν τη γεωμετρία του χώρου και περιέχουν μεταξύ άλλων τις αποδείξεις των τύπων των όγκων του κυλίνδρου και του κώνου και τις κατασκευές των κανονικών πολυέδρων.

διὰ παντὸς κύκλον γράφεσθαι. δ΄ Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι. ε΄ Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

Κοιναὶ ἔννοιαι. Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα. Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν ἐστι. Καὶ δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσιν.

α΄ Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι. Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ αβ. δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς αβ εὐθείας τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι. κέντρῳ μὲν τῷ α διαστήματι δὲ τῷ αβ κύκλος γεγράφθω ὁ βγδ, καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ β διαστήματι δὲ τῷ βα κύκλος γεγράφθω ὁ αγε, καὶ ἀπὸ τοῦ γ σημείου καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι ἐπὶ τὰ α, β σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ γα, γβ. καὶ ἐπεὶ τὸ α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ γδβ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ αγ τῇ αβ. πάλιν ἐπεὶ τὸ β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ γαε κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ βγ τῇ βα. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ γα τῇ αβ ἴση. ἑκατέρα ἄρα τῶν γα, γβ τῇ αβ ἐστὶν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα. καὶ ἡ γα ἄρα τῇ γβ ἐστὶν ἴση. αἱ τρεῖς ἄρα αἱ γα, αβ, βγ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον. καὶ συνέσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς αβ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι. Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ βγ. δεῖ δὴ πρὸς τῷ α σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ βγ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι. ἐπεζεύχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ α σημείου ἐπὶ τὸ β σημεῖον εὐθεῖα ἡ αβ, καὶ συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ δαβ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς δα, δβ εὐθεῖαι αἱ αε, βζ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ β διαστήματι δὲ τῷ βγ ...

1
α ́
Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.
Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ.
Δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθείας τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Κέντρῳ μὲν τῷ Α διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΓΔ, καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ Β διαστήματι δὲ τῷ ΒΑ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΓΕ,

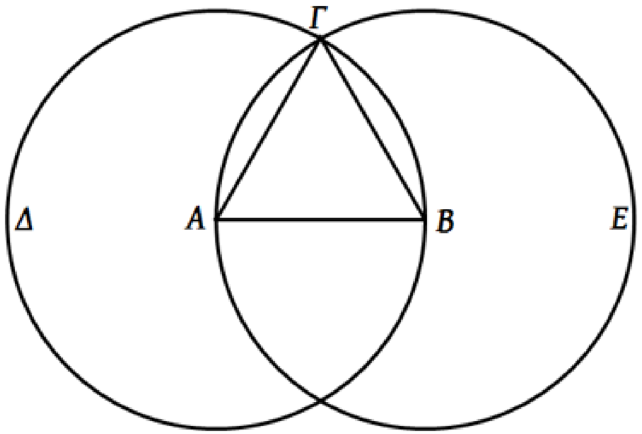
καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ Α, Β σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΑ, ΓΒ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΒ κύκλου,ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· πάλιν, ἐπεὶ τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΑΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΑ.

ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ ἴση·

ἑκατέρα ἄρα τῶν ΓΑ, ΓΒ τῇ ΑΒ ἐστιν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡΓΑ ἄρα τῇ ΓΒ ἐστιν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

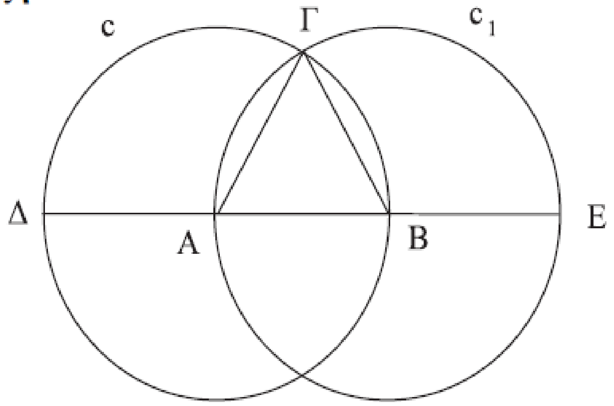
Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, καὶ συνέσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς ΑΒ.
[Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συνέσταται]· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι



Πρόταση 1 (Ι. 1)

Με πλευρά δεδομένο ευθύγραμμο τμήμα να κατασκευασθεί ισόπλευρο τρίγωνο.

Απόδειξη



Σχήμα 5

Έστω ΑΒ το δεδομένο ευθύγραμμο τμήμα (Σχ. 5). Μας ζητείται να κατασκευάσουμε ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά το ΑΒ.

Με κέντρο το σημείο Α και ακτίνα ΑΒ γράφουμε κύκλο c και με κέντρο το Β και ακτίνα ΒΑ γράφουμε κύκλο c_1. Από το σημείο Γ που τέμνονται οι κύκλοι φέρνουμε τα ΓΑ, ΓΒ. Επειδή το Α είναι το κέντρο του κύκλου και τα Β, Γ σημεία του, τότε ΑΓ = ΑΒ και ομοίως ΒΓ = ΒΑ, ώστε ΓΑ = ΑΒ = ΒΓ. Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο και έχει πλευρά το τμήμα ΑΒ.

ὅ.ἔ.π.

Τα μέρη της Ευκλείδειας πρότασης

- **Πρόταση**
- **Έκθεση**
- **Διορισμός**
- **Κατασκευή**
- **Απόδειξη**
- **Συμπέρασμα**

Περὶ μὲν οὖν τῶν ζητουμένων τοσαῦτα· πᾶν δὲ πρόβλημα καὶ πᾶν θεώρημα τὸ ἐκ τελείων τῶν ἑαυτοῦ μερῶν συμπεπληρωμένον βούλεται πάντα ταῦτα ἔχειν ἐν ἑαυτῷ· πρότασιν, ἔκθεσιν, διορισμόν, κατασκευήν, ἀπόδειξιν, συμπέρασμα. τούτων δὲ ἡ μὲν πρότασις

1
α ´
Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.
Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ.
Δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθείας τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Κέντρῳ μὲν τῷ Α διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΓΔ, καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ Β διαστήματι δὲ τῷ ΒΑ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΓΕ,

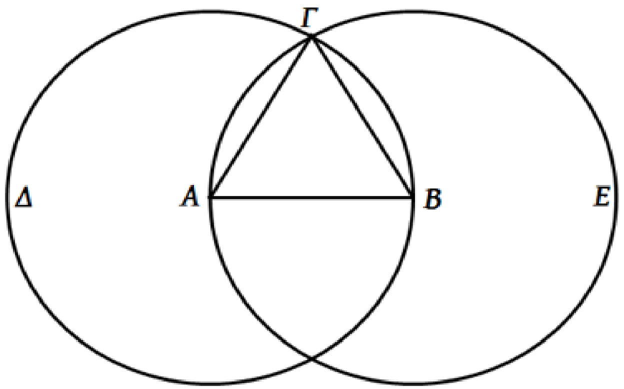
καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ Α, Β σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΑ, ΓΒ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΒ κύκλου,ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· πάλιν, ἐπεὶ τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΑΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΑ.

ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ ἴση·

ἑκατέρα ἄρα τῶν ΓΑ, ΓΒ τῇ ΑΒ ἐστὶν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡΓΑ ἄρα τῇ ΓΒ ἐστὶν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, καὶ συνέσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς ΑΒ.
[Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συνέσταται]· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι



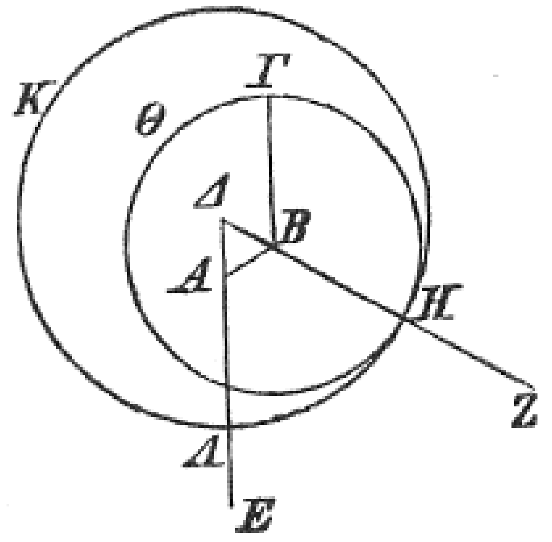
Ἐπὶ δοθέντος σημείου νὰ τοποθετηθῇ εὐθεῖα ἴση πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

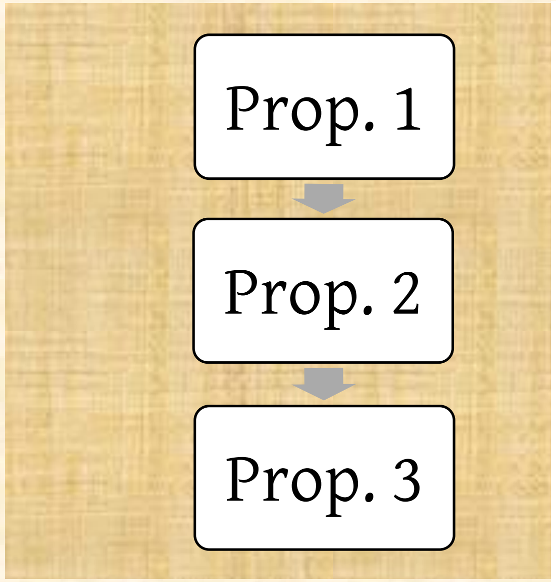
Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΒΓ· ζητεῖται νὰ τοποθετήσωμεν ἐπὶ τοῦ σημείου Α εὐθεῖαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΒΓ.

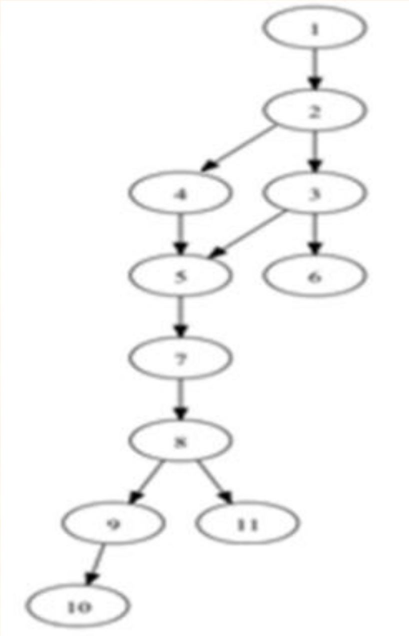
Διότι ἂς ἑνωθῇ τὸ σημεῖον Α μὲ τὸ σημεῖον Β διὰ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ ἂς κατασκευασθῇ ἐπ' αὐτῆς ἰσόπλευρον τρίγωνον τὸ ΔΑΒ, καὶ ἂς ληφθοῦν ἐπὶ τῶν προεκτάσεων τῶν εὐθειῶν ΔΑ, ΔΒ αἱ εὐθεῖαι ΑΕ, ΒΖ καὶ ἂς γραφῇ κύκλος μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα τὴν ΒΓ ὁ ΓΗΘ, καὶ πάλιν μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΔΗ ἂς γραφῇ ὁ κύκλος ΗΚΛ.

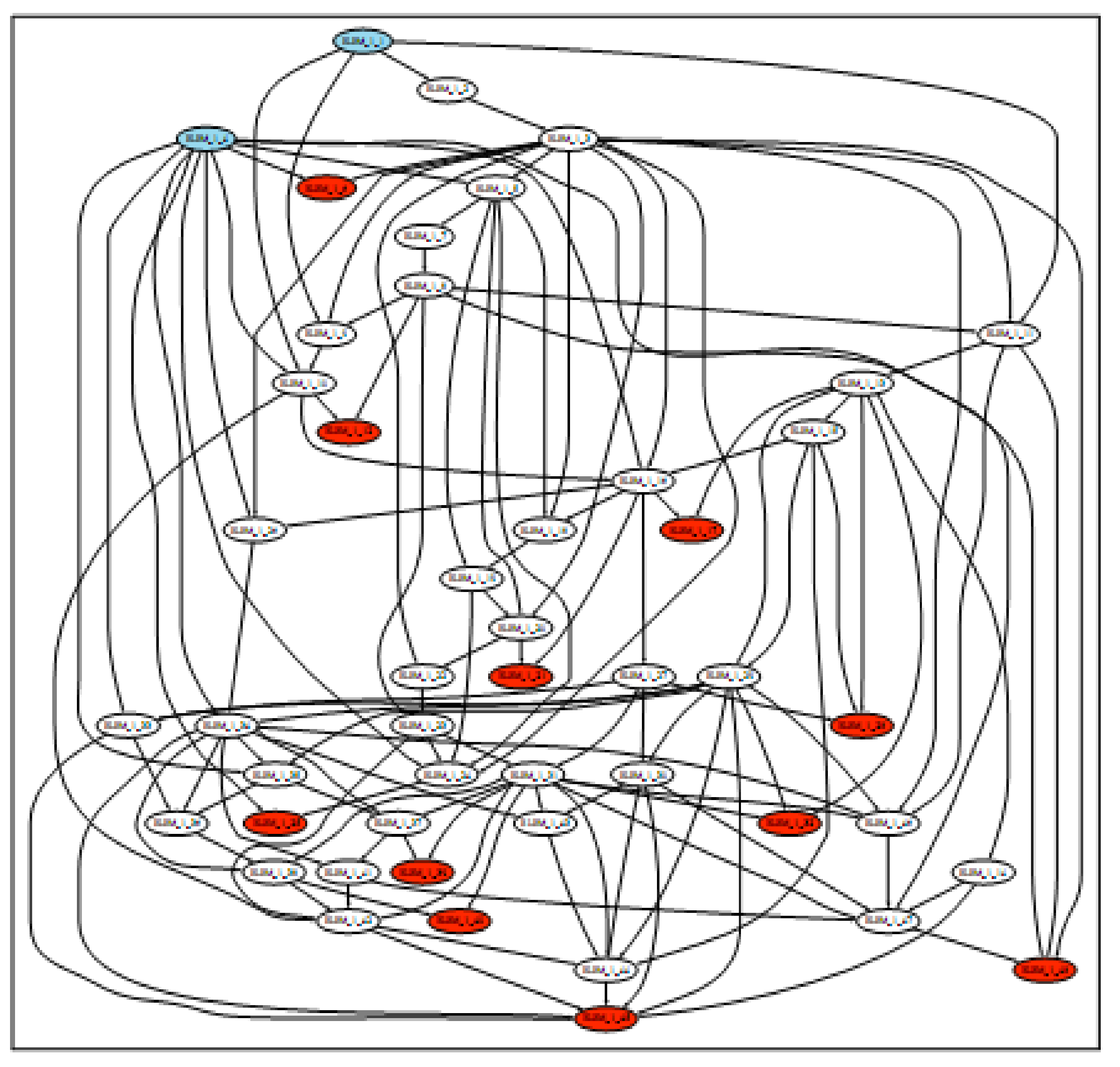
Επειδὴ λοιπὸν τὸ σημεῖον Β εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΓΗΘ, ἡ ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΗ. Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Δ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΗΚΛ, ἡ ΔΛ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΗ, τὰ μέρη δὲ τούτων ΔΑ, ΔΒ εἶναι ἴσα μεταξύ των. Καὶ αἱ ὑπόλοιποι ἄρα εὐθεῖαι ΑΛ, ΒΗ θὰ εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Ἐδείχθη δέ, ὅτι καὶ ἡ ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΗ· ἄρα ἑκάστη τῶν εὐθειῶν ΑΛ, ΒΓ, εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΗ. Τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα εἶναι καὶ μεταξύ των ἴσα· ἄρα καὶ ἡ ΑΛ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΓ.

Ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου Α κεῖται ἡ εὐθεῖα ΑΛ ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΒΓ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.




Prop. 1
Prop. 2
Prop. 3


1
2
4
3
5
6
7
8
9
11
10



Η αξιωματική-παραγωγική δομή

Οι πρώτες αρχές που χρησιμοποιούνται στα *Στοιχεία* είναι τριών ειδών: (1) οι ***ορισμοί***, (2) τα ***αιτήματα*** και (3) οι ***κοινές έννοιες***.

1. *Σημείο είναι κάθε τι που δεν έχει μέρη (διαστάσεις).*
2. *Γραμμή είναι αυτό που έχει μήκος χωρίς πλάτος*
3. *Τα άκρα κάθε γραμμής είναι σημεία.*
4. *Ευθεία γραμμή είναι εκείνη η γραμμή, η οποία κείται εξ ίσου προς τα σημεία της.*
5. *Επιφάνεια είναι κάθε τι που έχει μόνο μήκος και πλάτος.*
6. *Τα πέρατα μιας επιφάνειας είναι γραμμές.*
7. *Επίπεδη επιφάνεια είναι εκείνη η επιφάνεια, η οποία κείται εξ ίσου προς τις ευθείες της.*
8. *Επίπεδη γωνία είναι η κλίση μεταξύ δύο ευθειών γραμμών του επιπέδου που τέμνονται χωρίς να αποτελούν ευθεία.*

Αίτημα 1

Από κάθε σημείο μπορούμε να φέρουμε ευθεία που να το συνδέει με οποιοδήποτε σημείο.

Αίτημα 2

Το ευθύγραμμο τμήμα προεκτείνεται συνεχώς και ευθυγράμμως.

Αίτημα 3

Με κέντρο ένα τυχαίο σημείο και ακτίνα κάθε τμήμα, είναι δυνατό να γράψουμε κύκλο.

Αίτημα 4

Και όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.

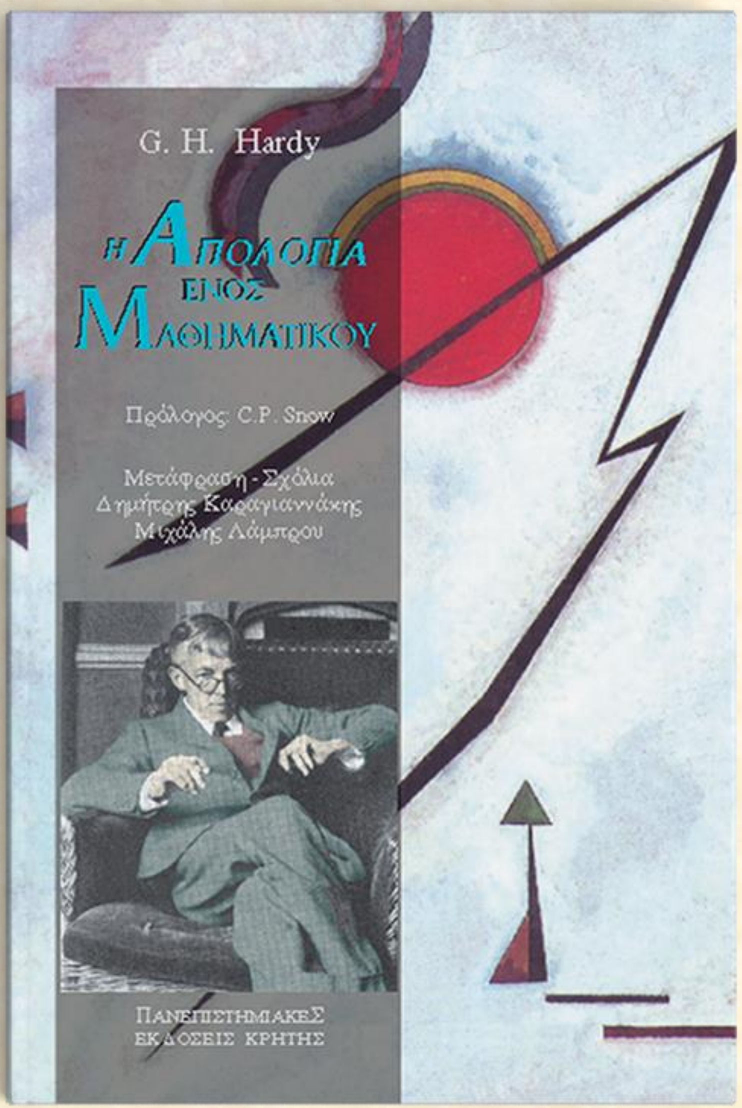
Αίτημα 5

Αν μια ευθεία τέμνει δύο άλλες και σχηματίζει με αυτές ένα ζεύγος "εντός και επί τα αυτά" γωνιών με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές, τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος που βρίσκονται οι γωνίες αυτές.

1. *Τα μεγέθη που είναι ίσα προς τρίτο μέγεθος είναι και ταξύ τους ίσα.*
2. *Και αν σε ίσα προστεθούν ίσα προκύπτουν ίσα.*
3. *Και αν από ίσα αφαιρεθούν ίσα, μένουν ίσα.*
4. *Και αν σε άνισα προσθέσουμε ίσα, προκύπτουν άνισα.*
5. *Και τα διπλάσια του ίδιου μεγέθους είναι ίσα.*

Ανακεφαλαίωση Σημαντικών Όρων

- Αξιωματικο-παραγωγική δομή
- Πρώτες Αρχές
- Ορισμοί
- Αιτήματα
- Κοινές Έννοιες
- Διάκριση «θεωρήματος»/«προβλήματος»
- Εσωτερικά μέρη μιας πλήρους πρότασης: «πρόταση», «έκθεση», «διορισμός», «κατασκευή», «απόδειξη», «συμπέρασμα»



I can hardly do better than go back to the Greeks. I will state and prove two of the famous theorems of Greek mathematics. They are ‘simple’ theorems, simple both in idea and in execution, but there is no doubt at all about their being theorems of the highest class. Each is as fresh and significant as when it has discovered—two thousand years have not written a wrinkle on either of them. Finally, both the statements and the proofs can be mastered in an hour by any intelligent reader, however slender his mathematical equipment.

Το «Πυθαγόρειο» θεώρημα

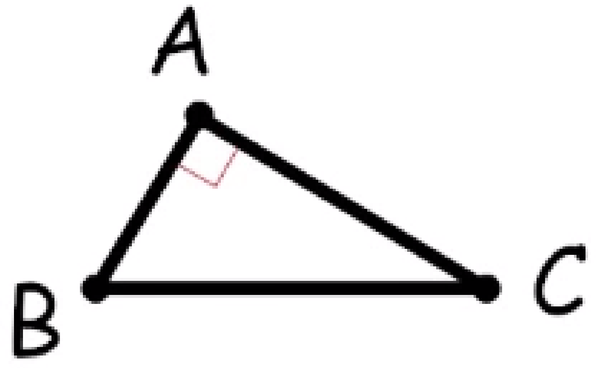
Στα ορθογώνια τρίγωνα το τετράγωνο της πλευράς που βρίσκεται απέναντι απότην ορθή γωνία [= της υποτείνουσας] *είναι ίσο προς τα τετράγωνα*[1] *των πλευρών που περιέχουν την ορθή γωνία.*

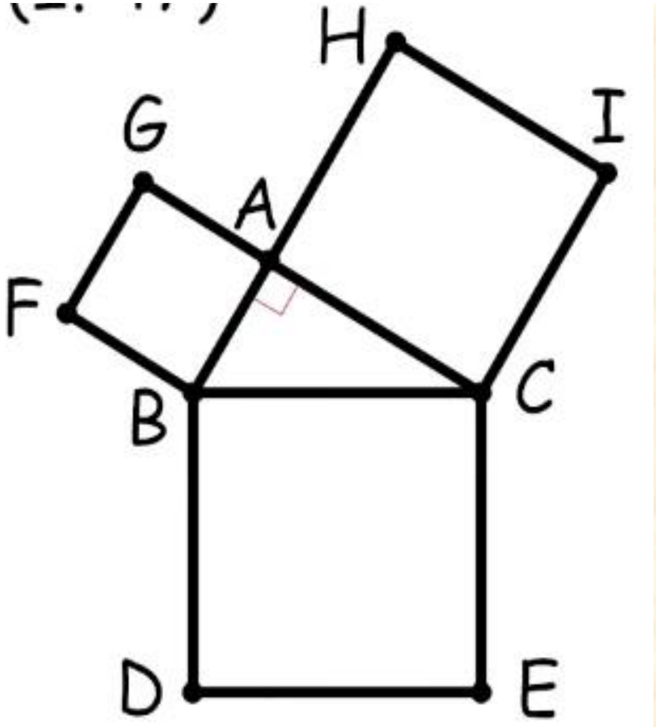
Έστω το ΑΒΓ ορθογώνιο τρίγωνο που έχει ορθή γωνία την ΒΑΓ · λέγω ότι το τετράγωνο της ΒΓ είναι ίσο με τα τετράγωνα των ΒΑ, ΑΓ.

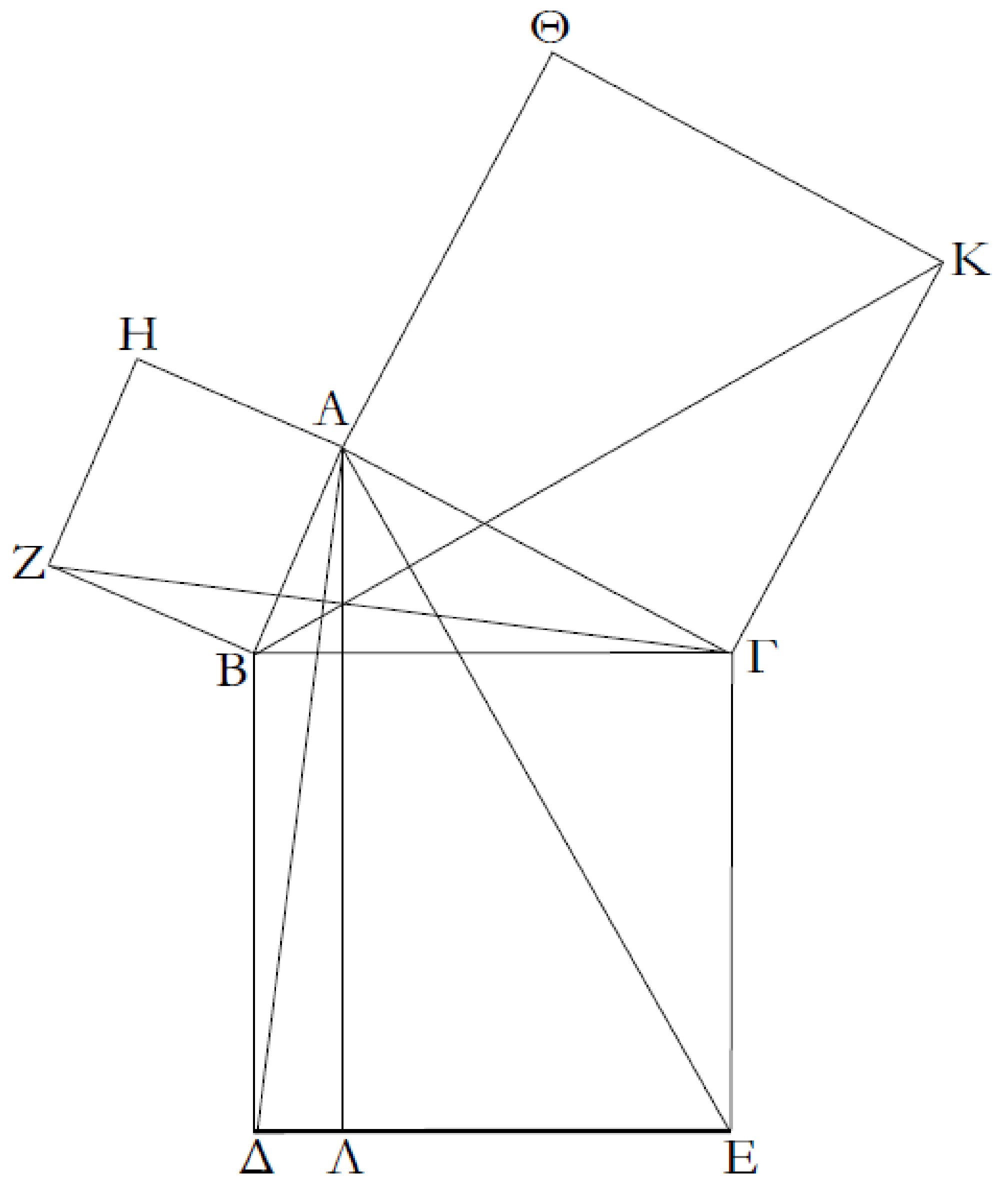
Ας αναγραφεί από την ΒΓ το τετράγωνο ΒΔΕΓ, και από τα ΒΑ, ΑΓ τα ΗΒ, ΘΓ, και από το Α ας αχθεί η ΑΛ παράλληλη είτε προς την ΒΔ ή την ΓΕ · ας ενωθούν οι ΑΔ, ΖΓ.[2] Τότε, αφού καθεμιά από τις γωνίες ΒΑΓ, ΒΑΗ είναι ορθή, έπεται ότι με την ευθεία ΒΑ και στο σημείο Α που βρίσκεται πάνω σ' αυτήν, δύο ευθείες, οι ΑΓ, ΑΗ, οι οποίες δεν βρίσκονται προς το ίδιο μέρος, κάνουν τις παρακείμενες γωνίες ίσες με δύο ορθές· συνεπώς η ΓΑ κείται σε μία ευθεία με την ΑΗ. Για τον ίδιο λόγο η ΒΑ βρίσκεται σε μία ευθεία με την ΑΘ. Και επειδή η γωνία ΔΒΓ είναι ίση με τη γωνία ΖΒΑ, αφού είναι και οι δύο ορθές, ας προστεθεί σε καθεμιά η γωνία ΑΒΓ · ολόκληρη η γωνία ΔΒΑ είναι συνεπώς ίση προς την γωνία ΖΒΓ. Και επειδή η ΔΒ είναι ίση προς την ΒΓ και η ΖΒ προς την ΒΑ, οι δύο πλευρές ΔΒ, ΒΑ είναι ίσες προς τις πλευρές ΖΒ, ΒΓ αντιστοίχως· και η γωνία ΔΒΑ είναι ίση προς ολόκληρη τη γωνία ΖΒΓ. Η βάση συνεπώς ΑΔ είναι ίση προς τη βάση ΖΓ, και το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ίσο προς το τρίγωνο ΖΒΓ. Και το παραλληλόγραμμο ΒΛ είναι διπλάσιο του τριγώνου ΑΒΔ, αφού έχουν την ίδια βάση ΒΔ και βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων ΒΔ, ΑΛ. Και το τετράγωνο ΗΒ είναι διπλάσιο του τριγώνου ΖΒΓ, αφού έχουν την ίδια βάση ΖΒ και βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων ΖΒ, ΗΓ. Άρα το παραλληλόγραμμο ΒΛ είναι ίσο προς το τετράγωνο ΗΒ. Παρομοίως μπορεί να αποδειχθεί, εάν ενωθούν οι ΑΕ, ΒΚ, ότι το παραλληλόγραμμο ΓΛ είναι ίσο προς το τετράγωνο ΘΓ. Άρα ολόκληρο το τετράγωνο ΒΔΕΓ είναι επίσης ίσο προς τα δύο τετράγωνα ΗΒ, ΘΓ.[3] Και το τετράγωνο ΒΔΕΓ έχει αναγραφεί από την ΒΓ, ενώ τα τετράγωνα ΗΒ, ΘΓ από τις ΒΑ, ΑΓ. Άρα το τετράγωνο της πλευράς ΒΓ είναι ίσο με τα τετράγωνα των πλευρών ΒΑ, ΑΓ.

Άρα στα ορθογώνια τρίγωνα το τετράγωνο της πλευράς απέναντι από την ορθή γωνία [= της υποτείνουσας] είναι ίσο προς τα τετράγωνα των πλευρών που περιέχουν την ορθή γωνία· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

(μετάφραση Σταύρος Τσιτσιρίδης)

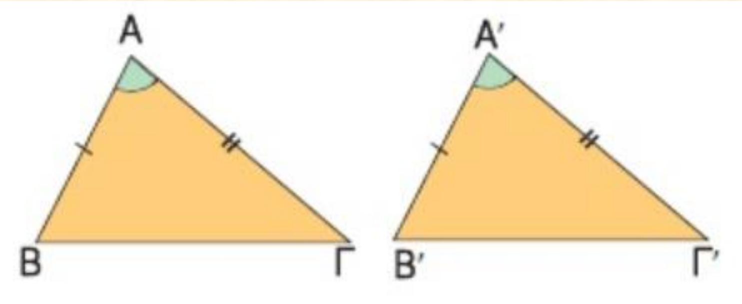




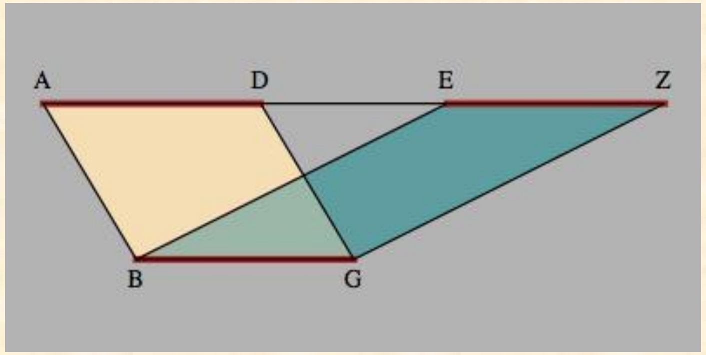


Προκαταρτικά Θεωρήματα

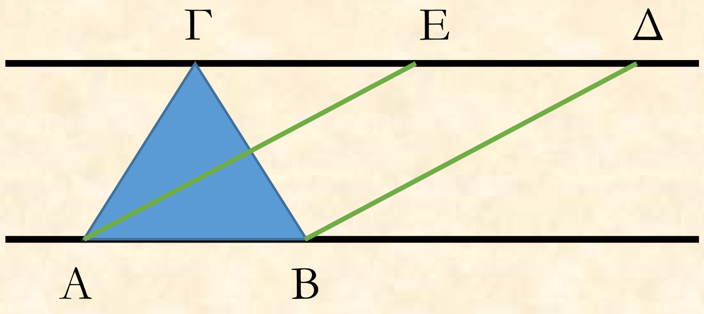
- Ισότητα Τριγώνων: Π-Γ-Π



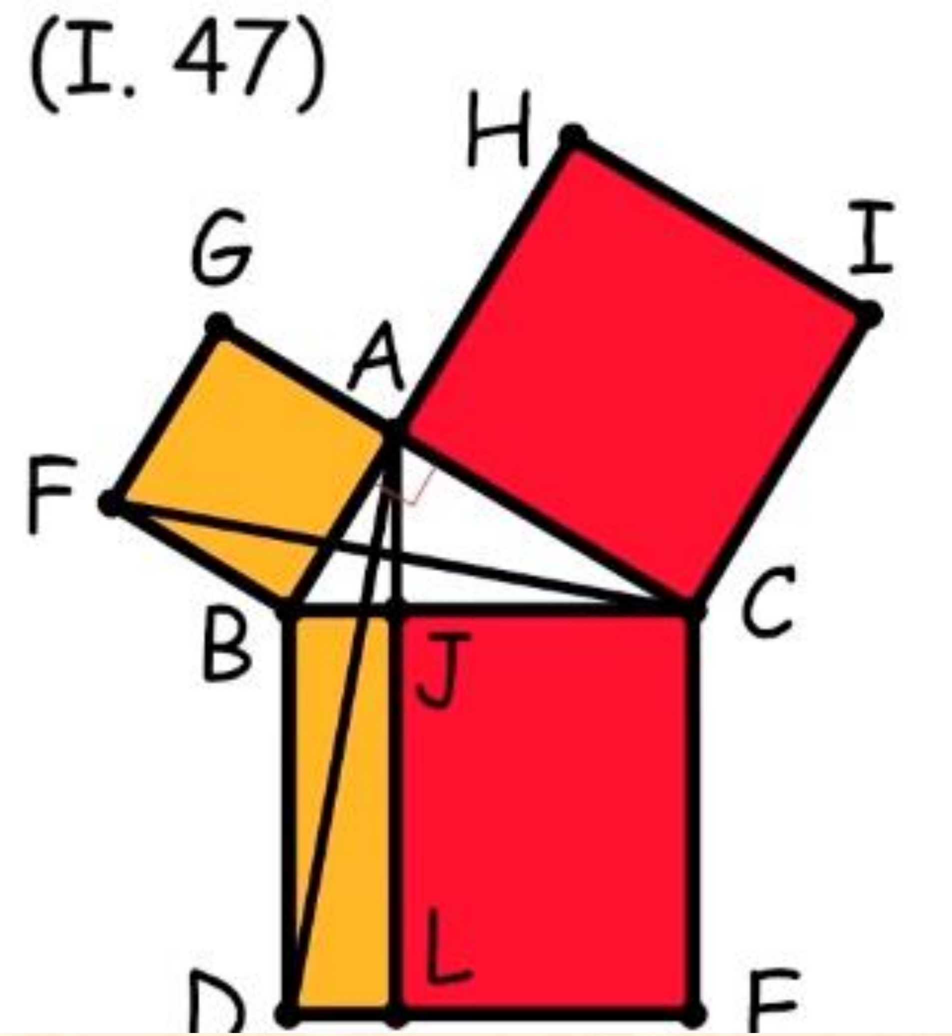
- Τα παραλληλόγραμμα που βρίσκονται εντός δύο παραλλήλων και έχουν ίση βάση είναι ίσα μεταξύ τους.

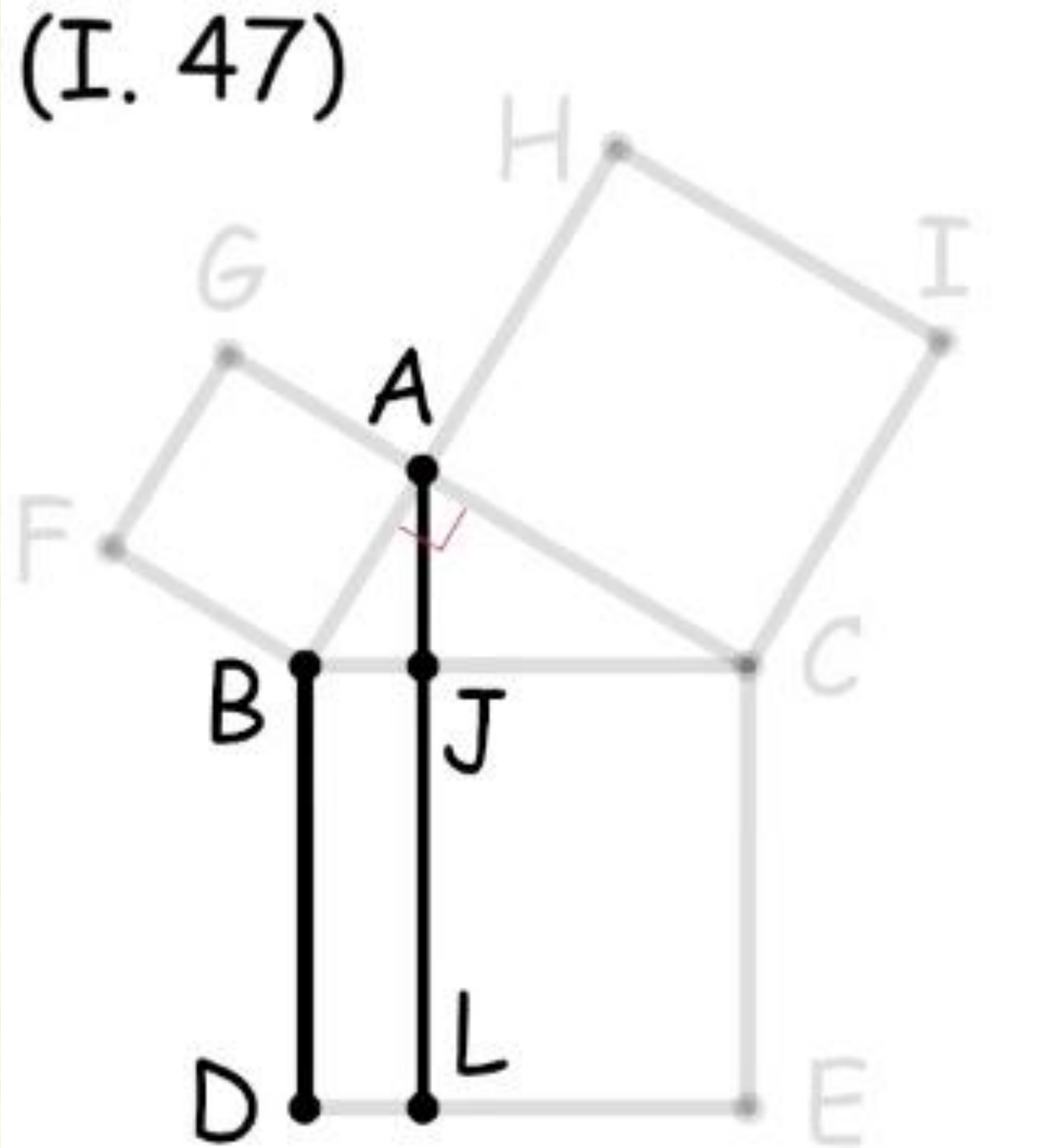


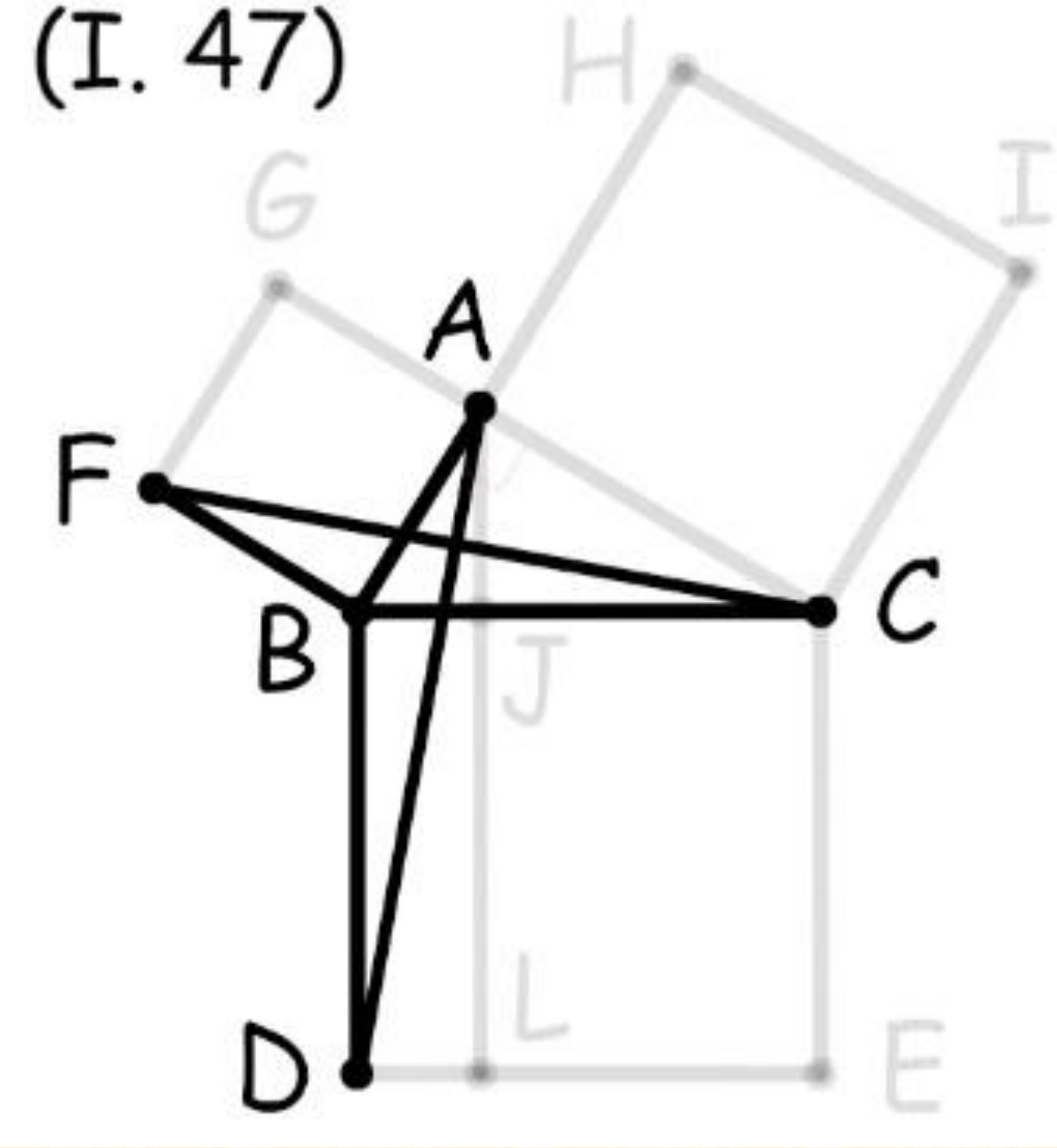
- Εάν ένα τετράγωνο και ένα τρίγωνο βρίσκονται εντός δύο παραλλήλων και έχουν κοινή βάση, το τρίγωνο είναι ίσο με το μισό του τετραγώνου.

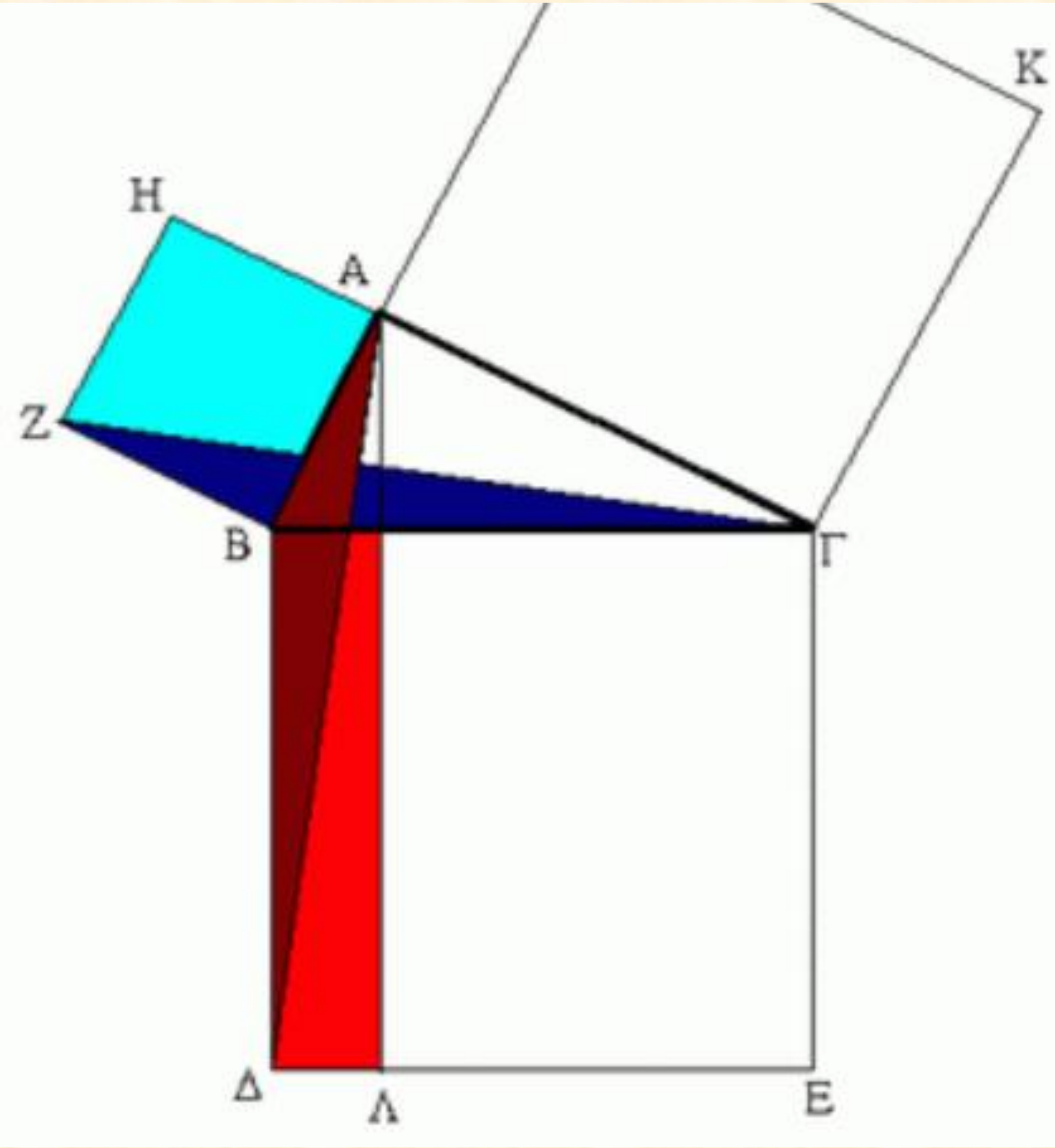


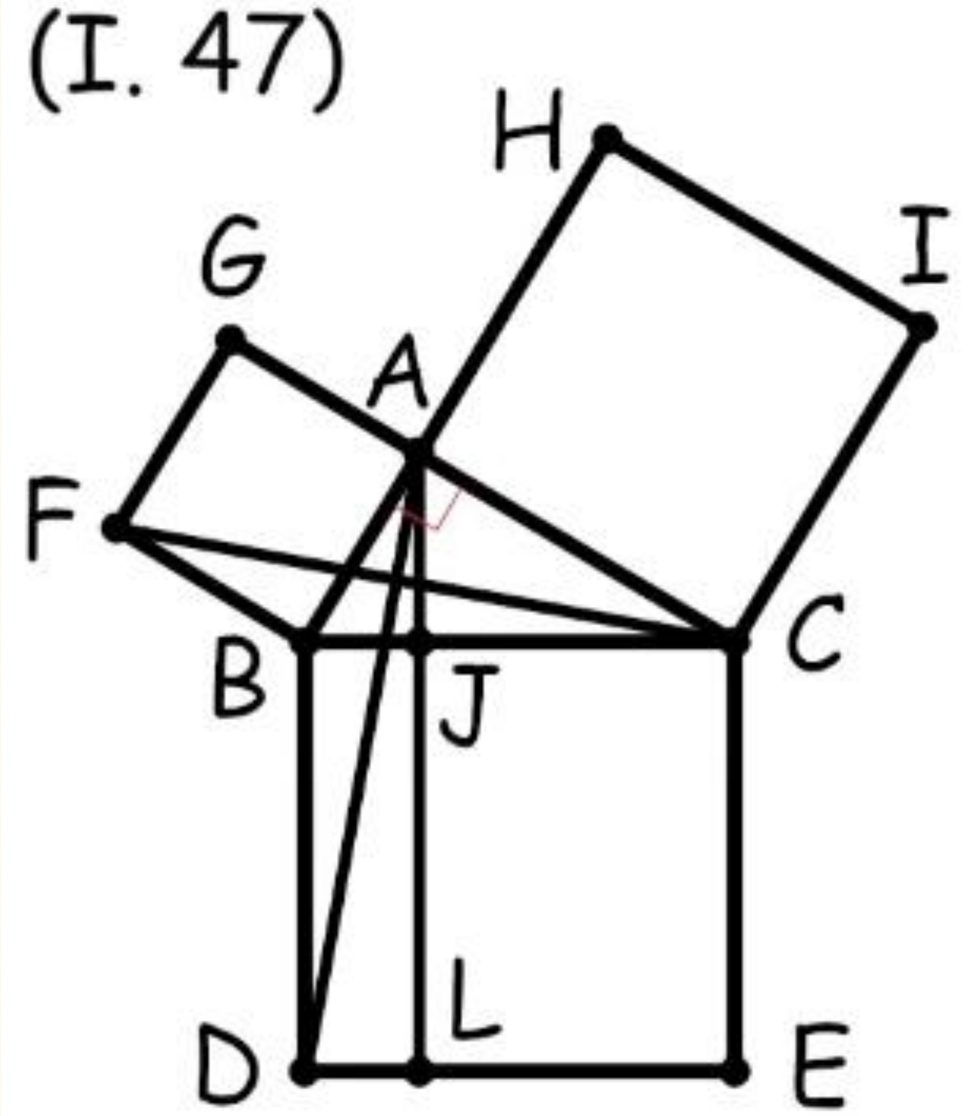
Η απόδειξη

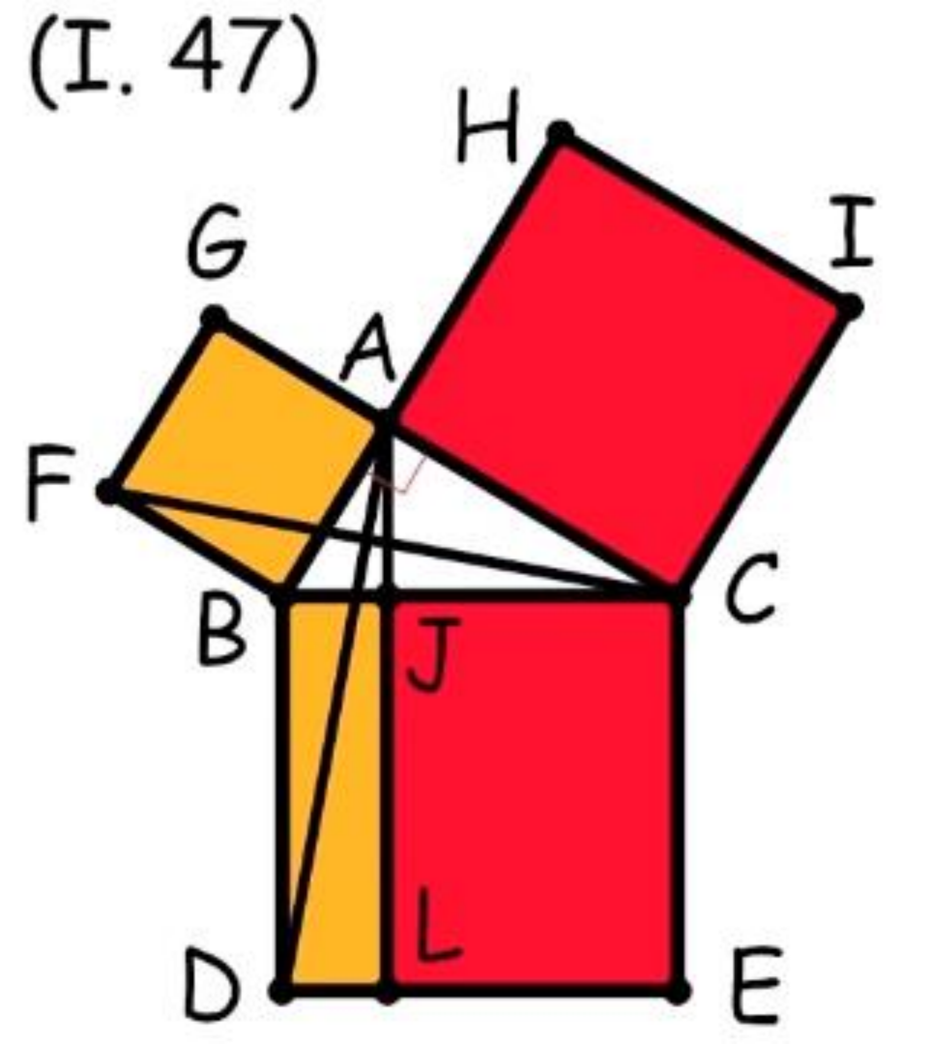





(I. 47)
H
G
I
A
F
B
C
J
L
D
E

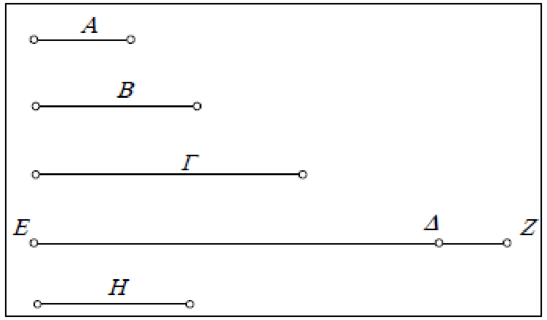

K
H
A
Z
B
Γ
Δ
Λ
E


(I. 47)
H
I
G
A
F
B
J
C
L
D
E


(I. 47)
H
G
I
A
F
C
B
J
L
D
E

Η πρόταση IX.20

Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους εἰσὶ παντὸς τοῦ προτεθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν.
Ἔστωσαν οἱ προτεθέντες πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ· λέγω, ὅτι τῶν Α, Β, Γ πλείους εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοί.
Εἰλήφθω γὰρ ὁ ὑπὸ τῶν Α, Β, Γ ἐλάχιστος μετρούμενος καὶ ἔστω ὁ ΔΕ, καὶ προσκείσθω τῷ ΔΕ μονὰς ἡ ΔΖ. ὁ δὴ ΕΖ ἤτοι πρῶτός ἐστιν ἢ οὔ. ἔστω πρότερον πρῶτος· εὑρημένοι ἄρα εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, ΕΖ πλείους τῶν Α, Β, Γ.
Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω ὁ ΕΖ πρῶτος· ὑπὸ πρώτου ἄρα τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. μετρείσθω ὑπὸ πρώτου τοῦ Η· λέγω, ὅτι ὁ Η οὐδενὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστιν ὁ αὐτός. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω. οἱ δὲ Α, Β, Γ τὸν ΔΕ μετροῦσιν· καὶ ὁ Η ἄρα τὸν ΔΕ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΕΖ· καὶ λοιπὴν τὴν ΔΖ μονάδα μετρήσει ὁ Η ἀριθμὸς ὤν· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ Η ἑνὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστιν ὁ αὐτός. καὶ ὑπόκειται πρῶτος. εὑρημένοι ἄρα εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους τοῦ προτεθέντος πλήθους τῶν Α, Β, Γ οἱ Α, Β, Γ, Η· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Σκιαγράφηση της απόδειξης

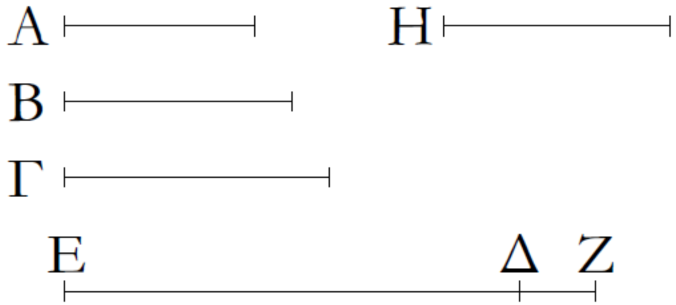
Πρόταση.
Έκθεση.
Κατασκευή: Κατασκευάζω τον αριθμό ΔΕ, ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των Α, Β, Γ.
Προσθέτω στον ΔΕ τη μονάδα ΔΖ, και κατασκευάζω έτσι τον αριθμό ΕΖ = ΔΕ + ΔΖ.
Απόδειξη: Για τον ΕΖ υπάρχουν δύο ενδεχόμενα: ή είναι πρώτος ή δεν είναι πρώτος.
Έστω ότι ο ΕΖ είναι πρώτος. Τότε οι πρώτοι αριθμοί είναι οι Α, Β, Γ, ΕΖ και είναι περισσότεροι από τους Α, Β, Γ.
Έστω ότι ο ΕΖ δεν είναι πρώτος. Τότε ο ΕΖ διαιρείται από κάποιον πρώτο, έστω τον Η. (Πρόταση VIII.31)
Ο Η δεν ταυτίζεται με κανέναν από τους Α, Β, Γ. Έστω ότι ταυτίζεται με κάποιον από αυτούς. Τότε, επειδή οι Α, Β, Γ διαιρούν τον ΔΕ, ο Η (που ταυτίζεται με έναν από αυτούς) θα διαιρεί τον ΔΕ. Αλλά ο Η διαιρεί επίσης τον ΕΖ.
Άρα ο Η θα διαιρεί και τον ΕΖ – ΔΕ = 1. Αυτό είναι άτοπο, διότι ο Η είναι αριθμός.
Άρα ο Η δεν ταυτίζεται με κανέναν εκ των Α, Β, Γ. Άρα ο Η είναι ένας νέος πρώτος
Συμπέρασμα: Άρα οι πρώτοι αριθμοί είναι οι Α, Β, Γ, Η και είναι περισσότεροι από τους Α, Β, Γ.

Απόδειξη απειρίας των πρώτων αριθμών

Προσοχή στη διατύπωση!

κʹ.

Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους εἰσὶ παντὸς τοῦ προτεθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν.

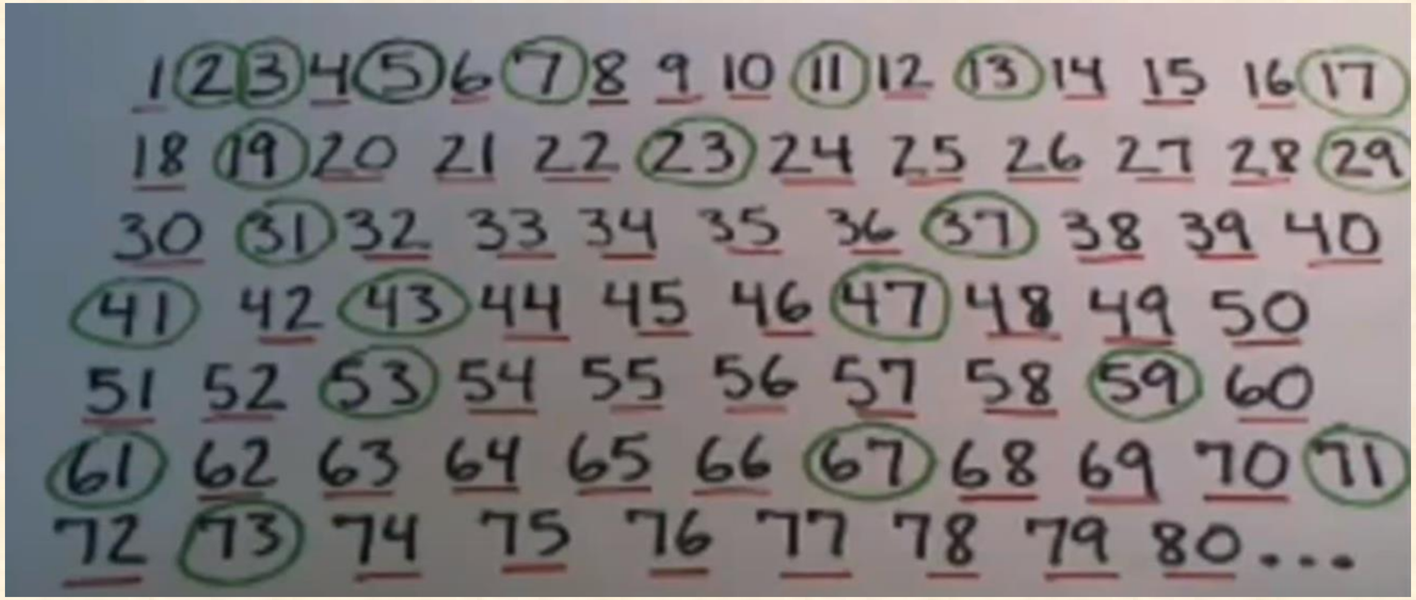


Ἔστωσαν οἱ προτεθέντες πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ· λέγω, ὅτι τῶν Α, Β, Γ πλείους εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοί.

Εἰλήφθω γὰρ ὁ ὑπὸ τῶν Α, Β, Γ ἐλάχιστος μετρούμενος καὶ ἔστω ΔΕ, καὶ προσκείσθω τῷ ΔΕ μονὰς ἡ ΔΖ. ὁ δὴ ΕΖ ἤτοι πρῶτός ἐστιν ἢ οὔ. ἔστω πρότερον πρῶτος· εὑρημένοι ἄρα εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, ΕΖ πλείους τῶν Α, Β, Γ.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω ὁ ΕΖ πρῶτος· ὑπὸ πρώτου ἄρα τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. μετρείσθω ὑπὸ πρώτου τοῦ Η· λέγω, ὅτι ὁ Η οὐδενὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστιν ὁ αὐτός. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω. οἱ δὲ Α, Β, Γ τὸν ΔΕ μετροῦσιν· καὶ ὁ Η ἄρα τὸν ΔΕ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΕΖ· καὶ λοιπὴν τὴν ΔΖ μονάδα μετρήσει ὁ Η ἀριθμὸς ὤν· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ Η ἑνὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστιν ὁ αὐτός. καὶ ὑπόκειται πρῶτος. εὑρημένοι ἄρα εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους τοῦ προτεθέντος πλήθους τῶν Α, Β, Γ οἱ Α, Β, Γ, Η· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

- Τι είναι πρώτος αριθμός και τι σύνθετος;



- Μια εύλογη ερώτηση; Πόσοι τέτοιοι υπάρχουν;

<u>Περίγραμμα απόδειξης:</u>

Είτε υπάρχει πεπερασμένο πλήθος, είτε άπειρο.

- Έστω ότι υπάρχει άπειρο πλήθος, τότε ο.ε.δ.
- Έστω ότι είναι πεπερασμένο το πλήθος (απαγωγή εις άτοπον).

Άρα υπάρχει το γινόμενο: 2*3*5*7*…*p.

Τι να είναι άραγε ο αριθμός: A = (2*3*5*7*…*p) + 1 ;

Το 1 διαιρεί τον A.

Το 2 δεν μπορεί να τον διαιρέσει ακριβώς γιατί περισσεύει το 1.

Το 3 δεν μπορεί να τον διαιρέσει ακριβώς γιατί περισσεύει το 1.

Το 4 δεν μπορεί να τον διαιρέσει ακριβώς. (όπως το 2) κτλ.

Ο A διαιρεί τον A. Επομένως ο A είναι ένας πρώτος αριθμός ο οποίος, όμως, δεν περιλήφθηκε στην αρχική λίστα.

Η διαδικασία επαναλαμβάνεται χωρίς τέλος, άρα η αρχική υπόθεση είναι λανθασμένη.

Σύγκριση ελληνικών και προελληνικών διαδικασιών επιβεβαίωσης αποτελεσμάτων

Πρόβλημα 27

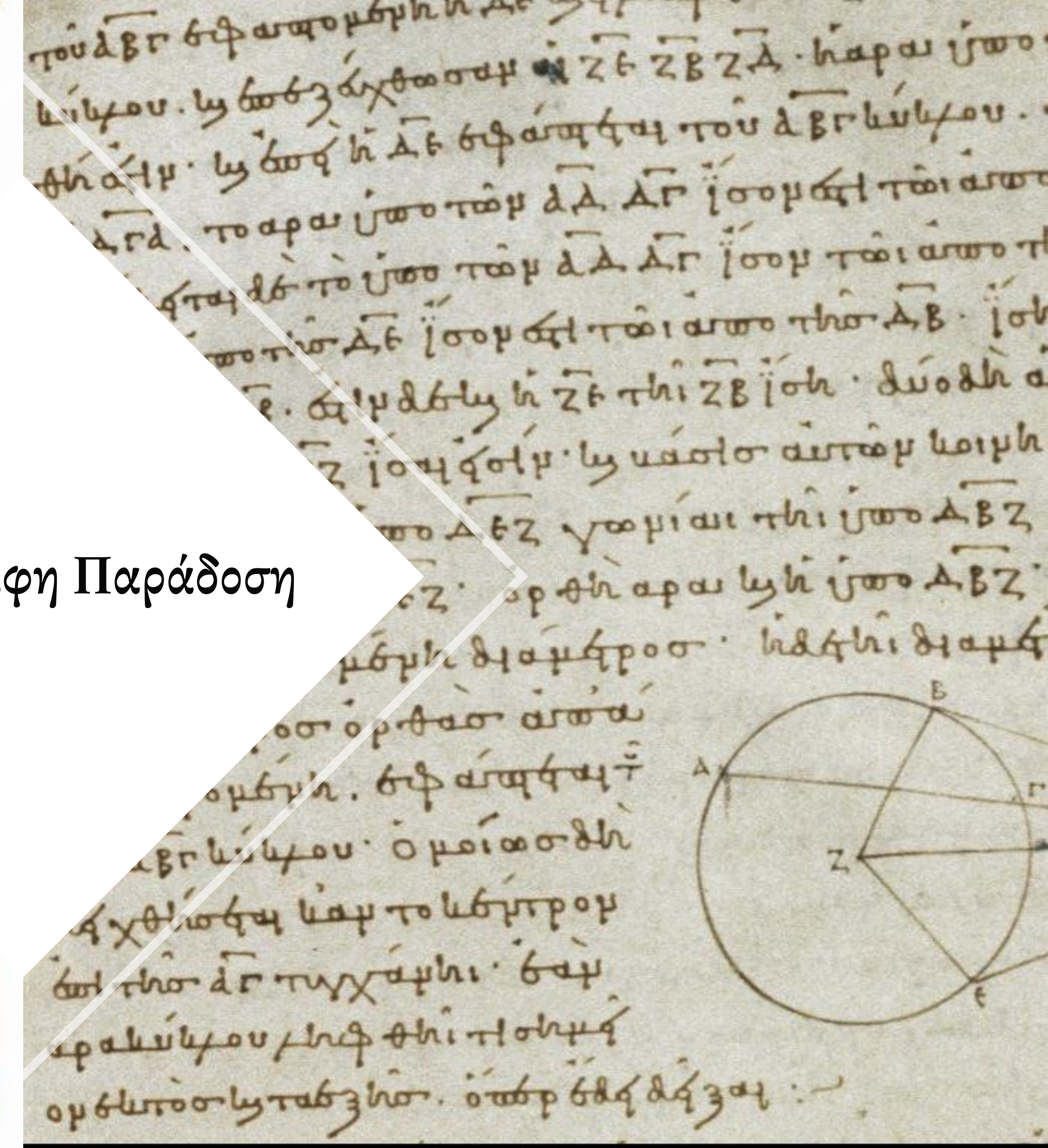
Μια ποσότητα, το $\frac{1}{5}$ αυτής (προστίθεται) σε αυτήν και προκύπτει 21

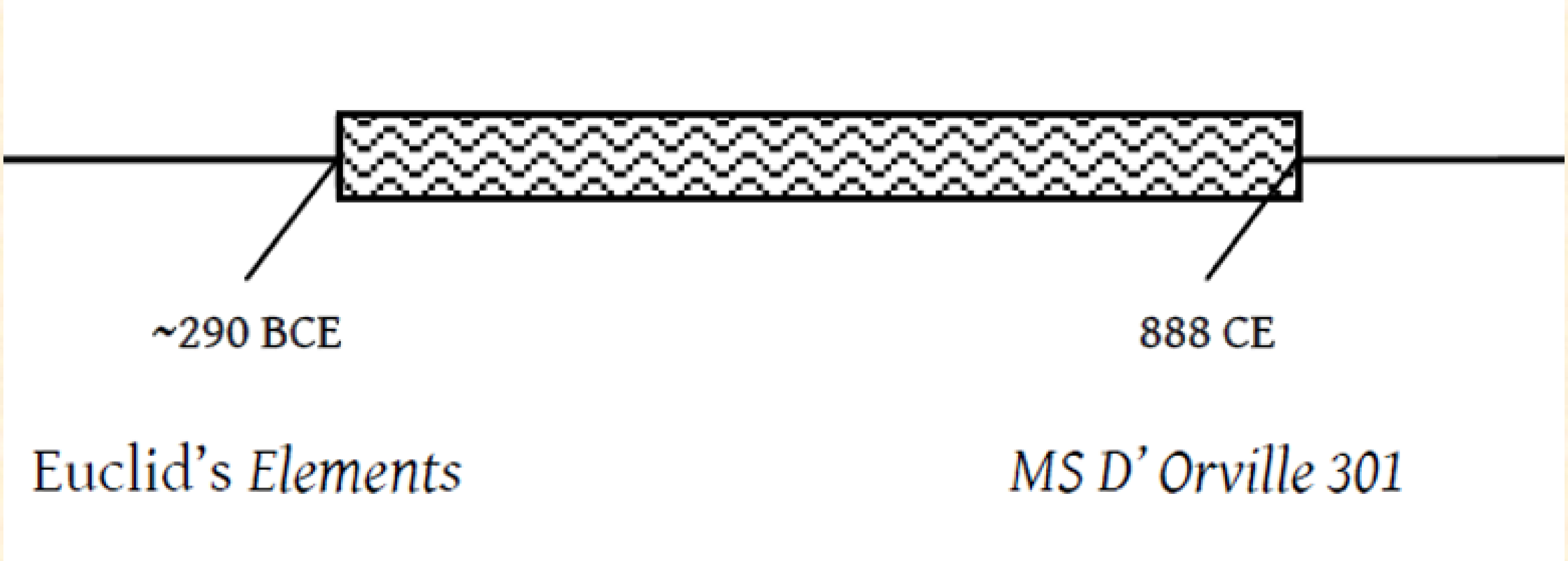
	1	5	
	$\frac{1}{5}$	1	Άθροισμα 6.
\	1	6	
\	2	12	
\	½	3	Άθροισμα 21.
\	1	3 ½	
	2	7	
\	4	14	Άθροισμα 15.

Η ποσότητα 17 ½,
το $\frac{1}{5}$ αυτής 3 ½ Άθροισμα 21.

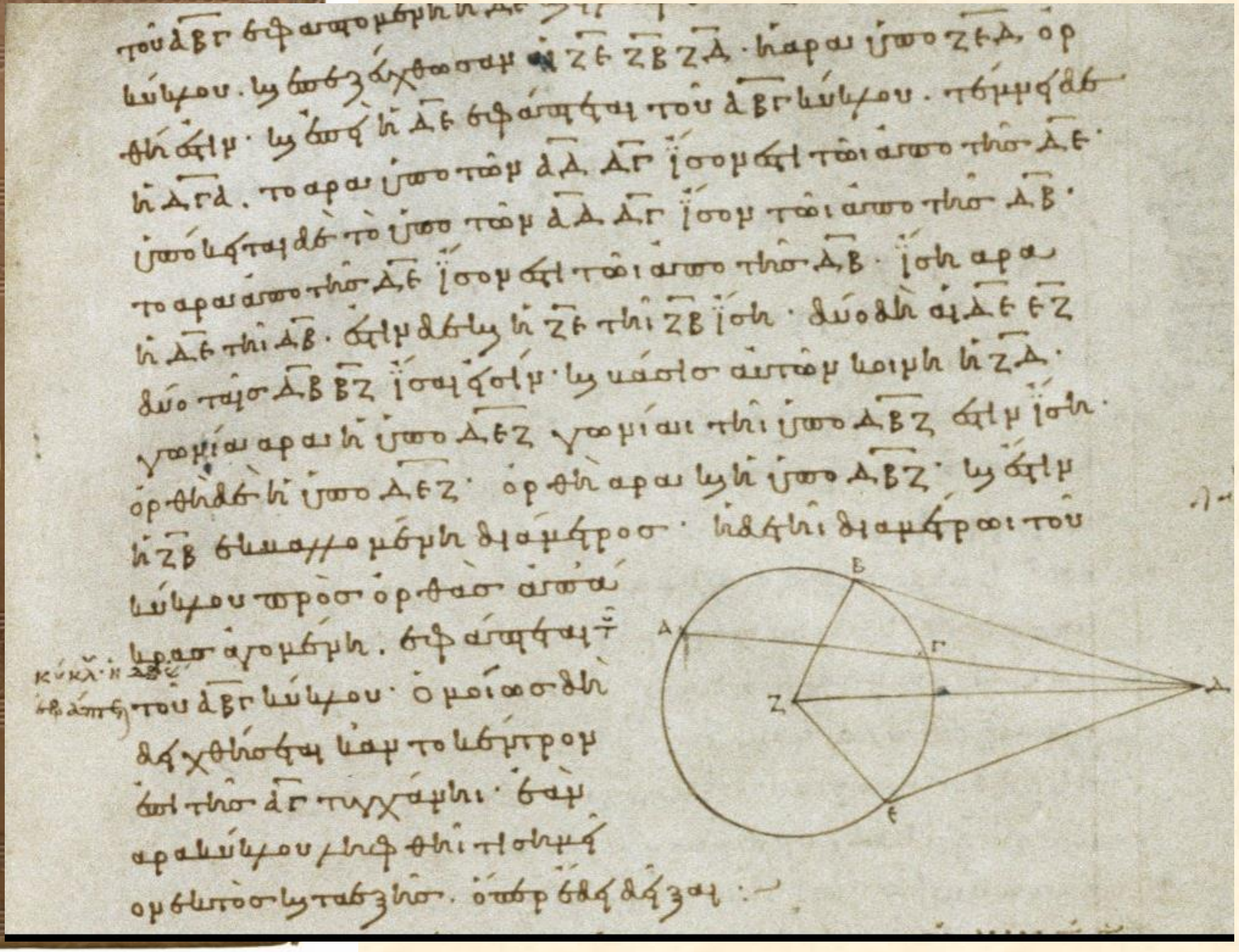
«Βρήκα μια πέτρα αλλά δεν τη ζύγισα. Πρόσθεσα το ένα έβδομό της και σε αυτό το ένα ενδέκατό του. Ζύγισα: 1 mana. Ποιο ήταν το αρχικό βάρος;»

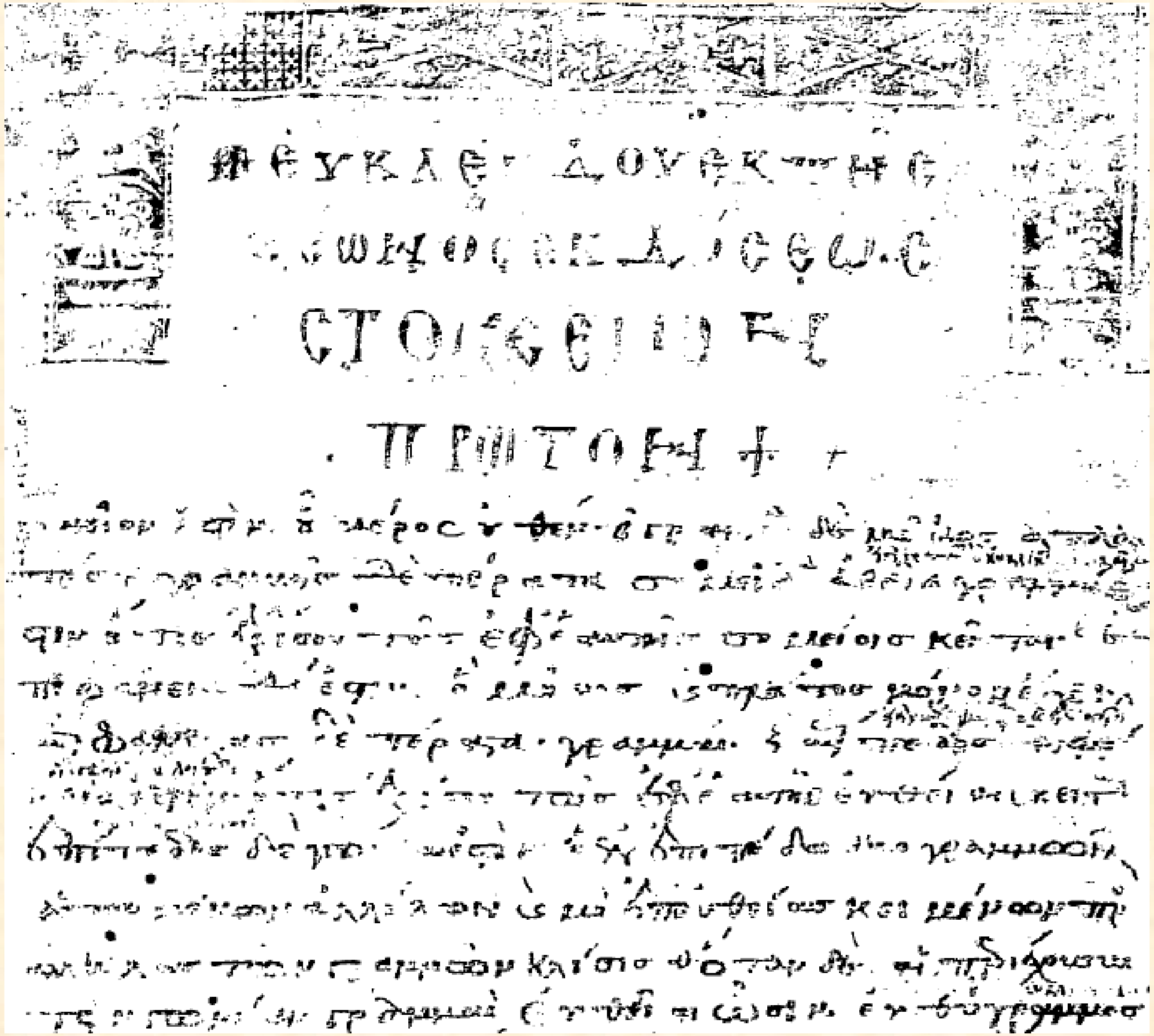
Η Χειρόγραφη Παράδοση

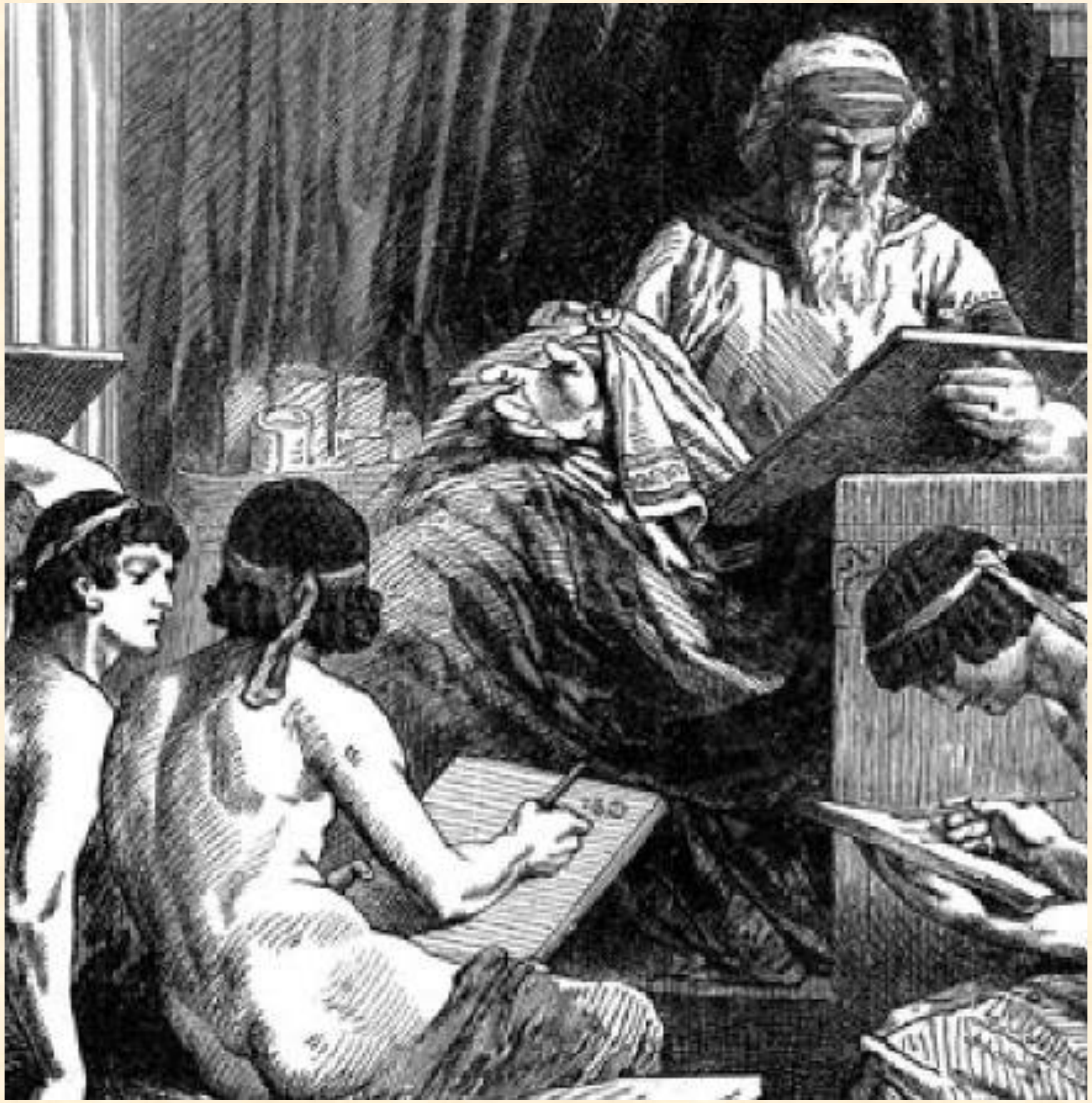


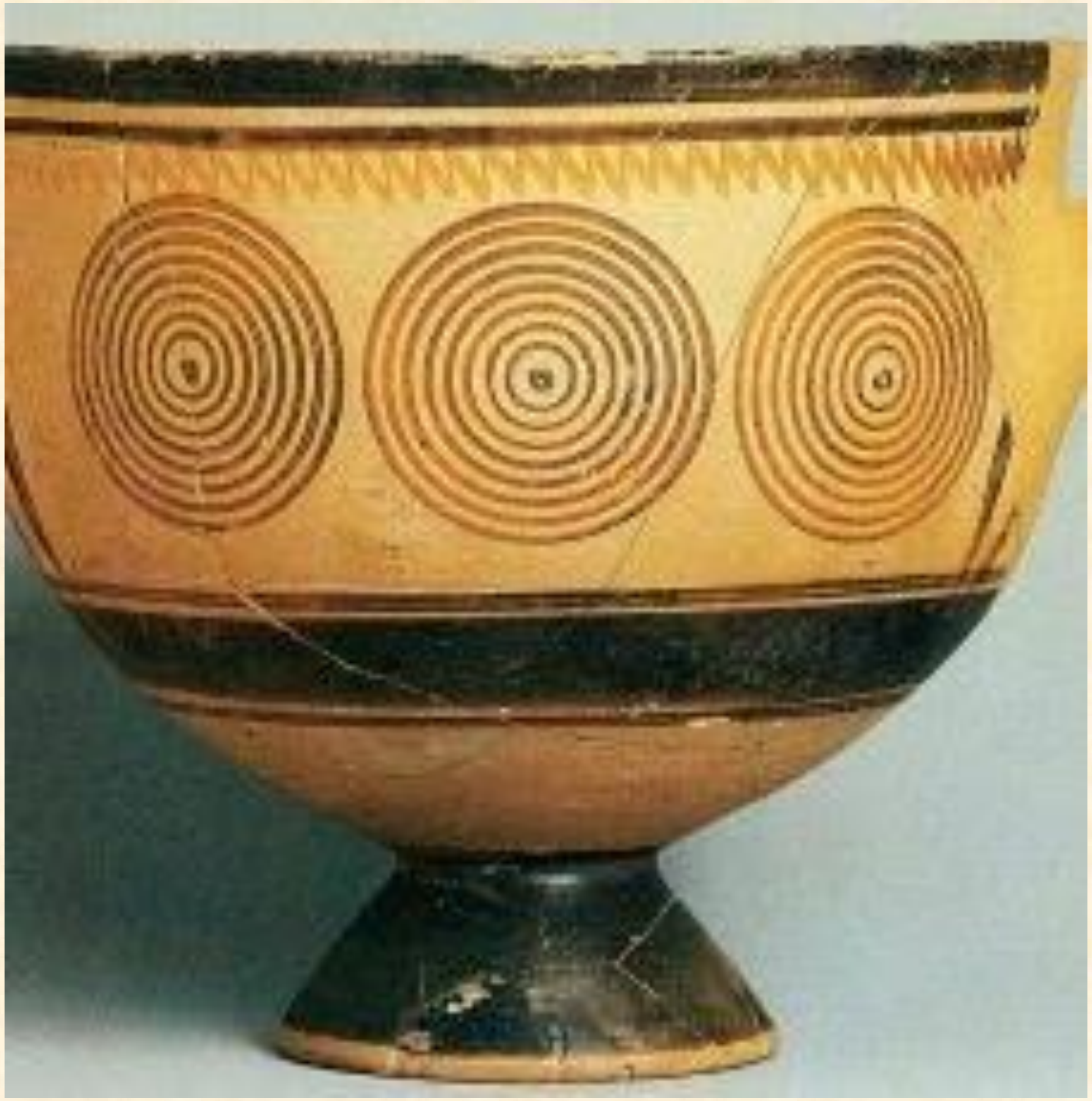

~290 BCE
888 CE
Euclid's *Elements*
MS D' Orville 301

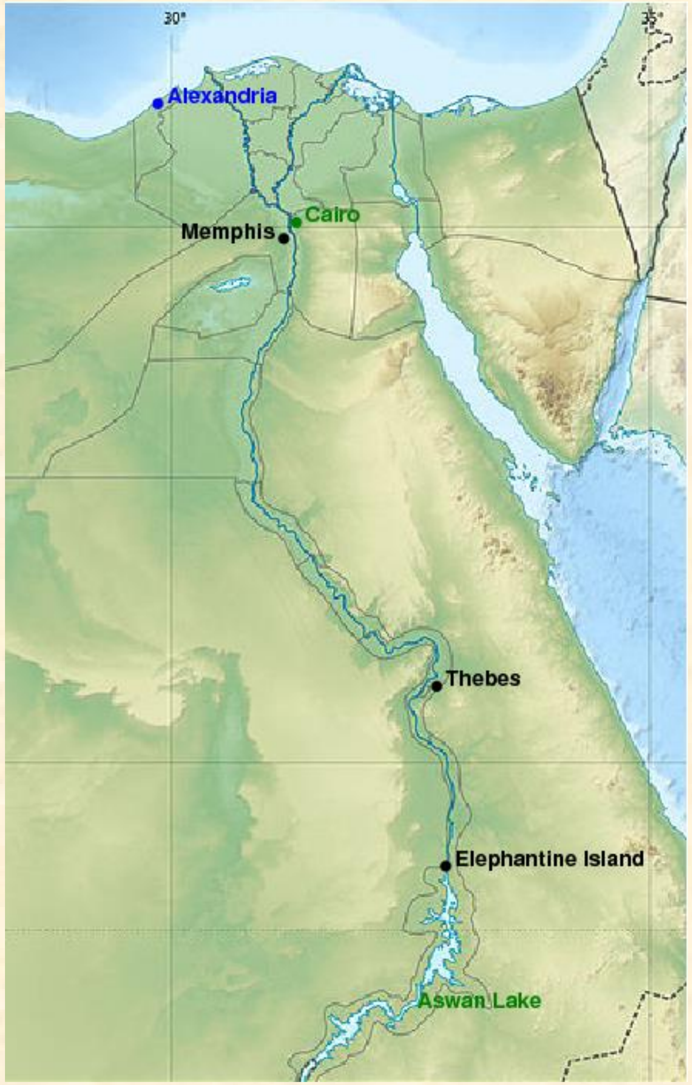
Κώδικας *D' Orville* 301

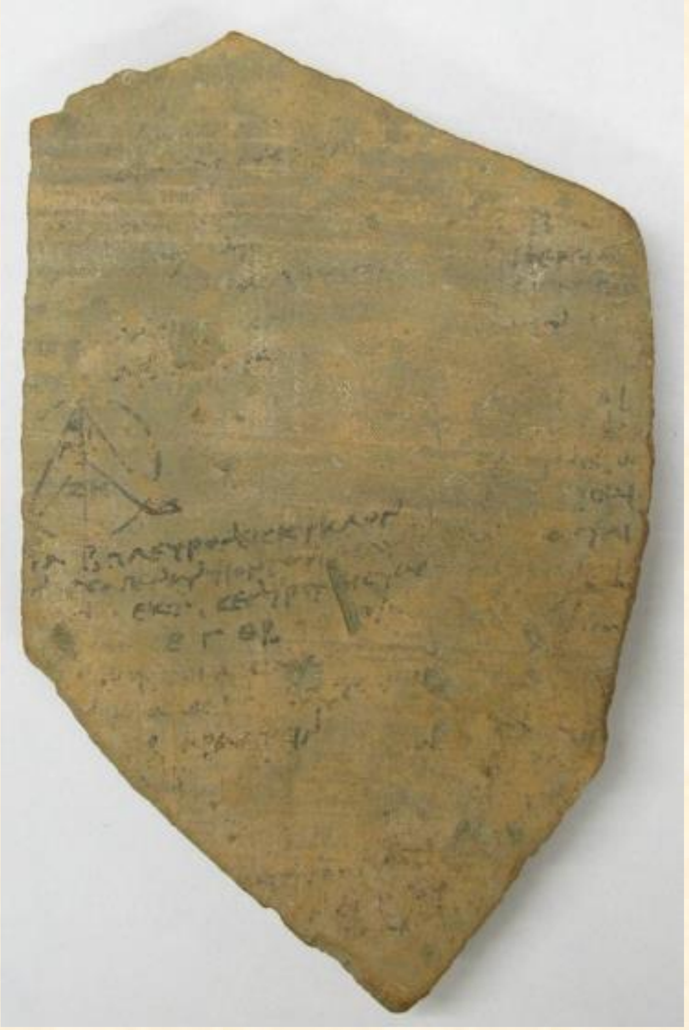


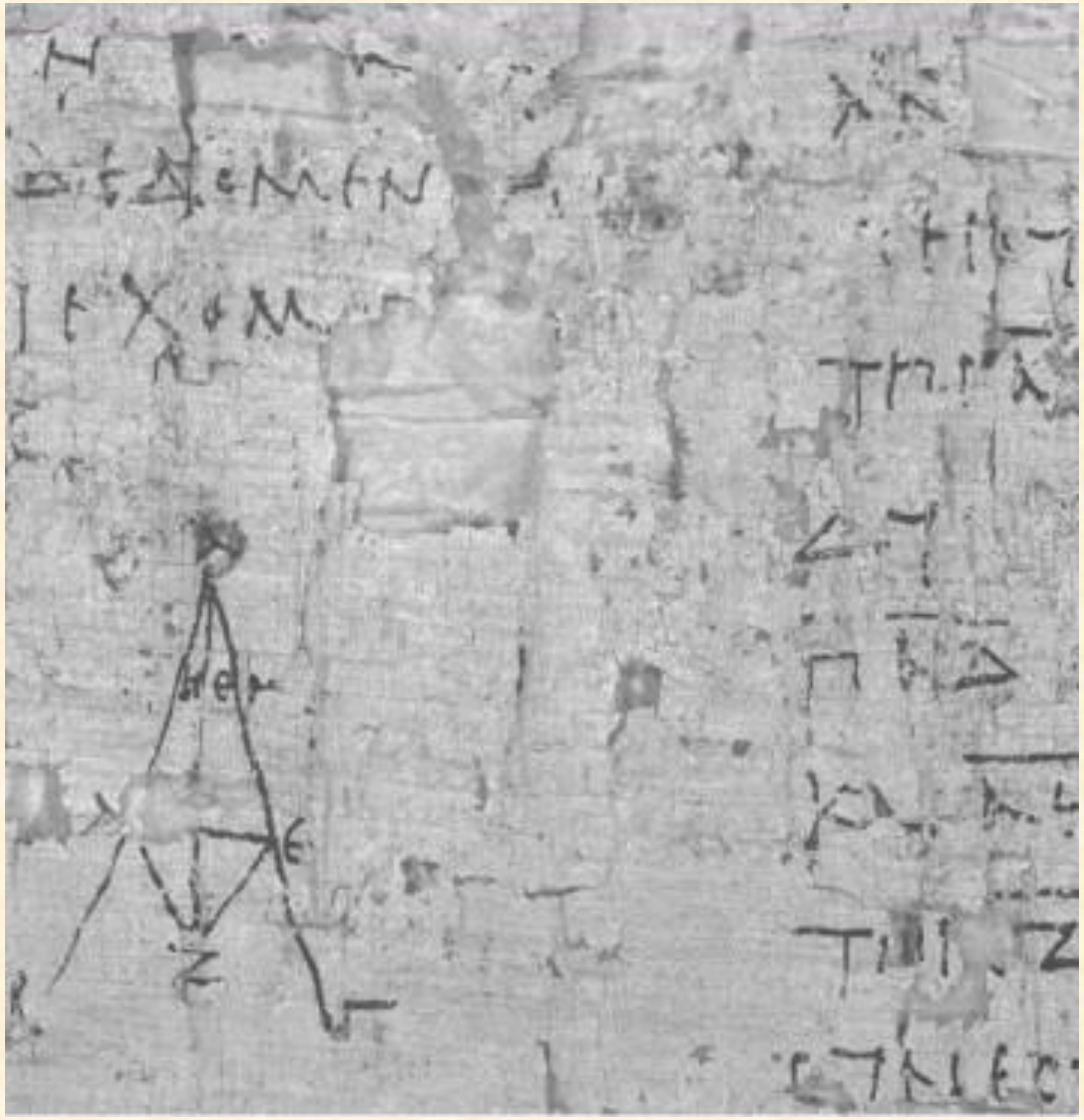

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΤΗΣ ΘΕΩΝΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΠΡΩΤΟΝ

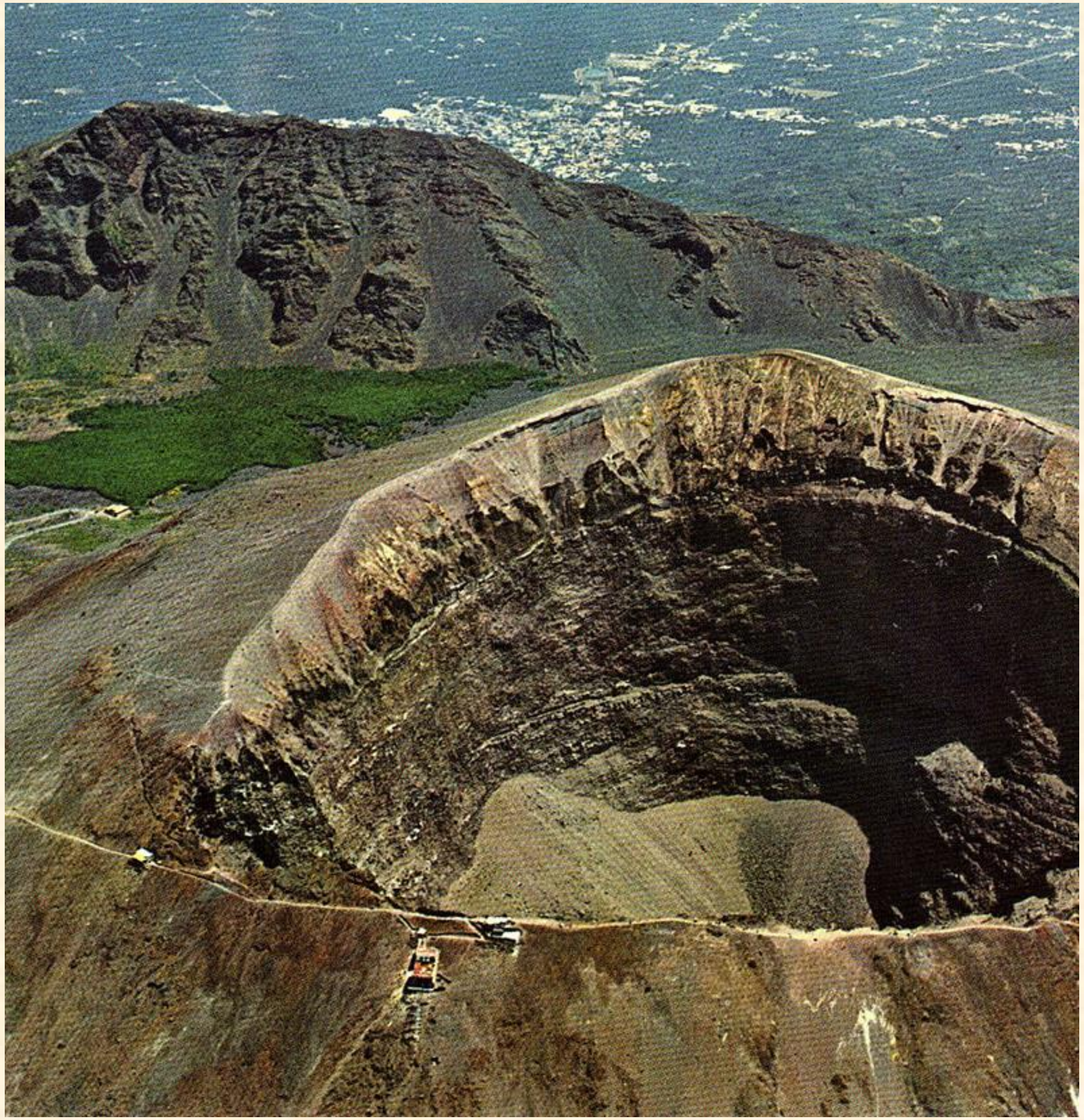





30°
35°
Alexandria
Cairo
Memphis
Thebes
Elephantine Island
Aswan Lake







ΠΙ…

ΕΑΝΕΥΘΕΙΑΓΡΑΜΜ…

ΤΜΗΘΗΕΙΣΙΣΑΚΑΙ…

ΙΣΑΤΟΥΠΟΤΩΝΑ… ΙΟΝ

ΤΩΝΤΗΣΟΛΗΣΤΜΗ… …ΩΝΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΝ

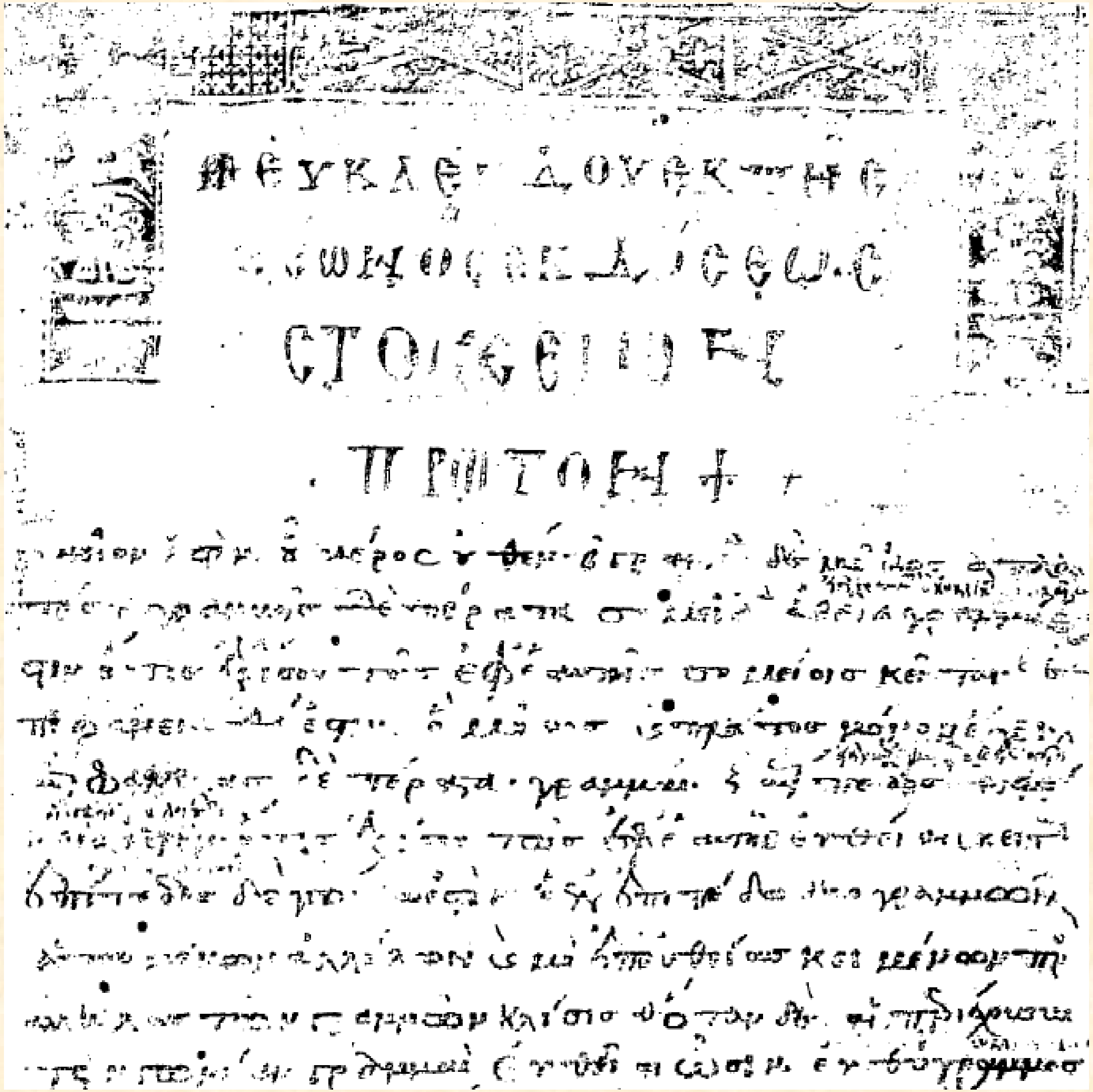
ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΝΜΕΤΑΤ… …ΑΠΟΤΗΣΜΕΤΑΞΥ

ΤΩΝΤΟΜΩΝΤΕΤ… …ΩΝΟΥΙΣΟΝΕΣΤΙΤ…

ΤΩΑΠΟΤΗΣΗΜΙΣ…

ΑΣΤΕΤΡΑΓΩΝΩΙ

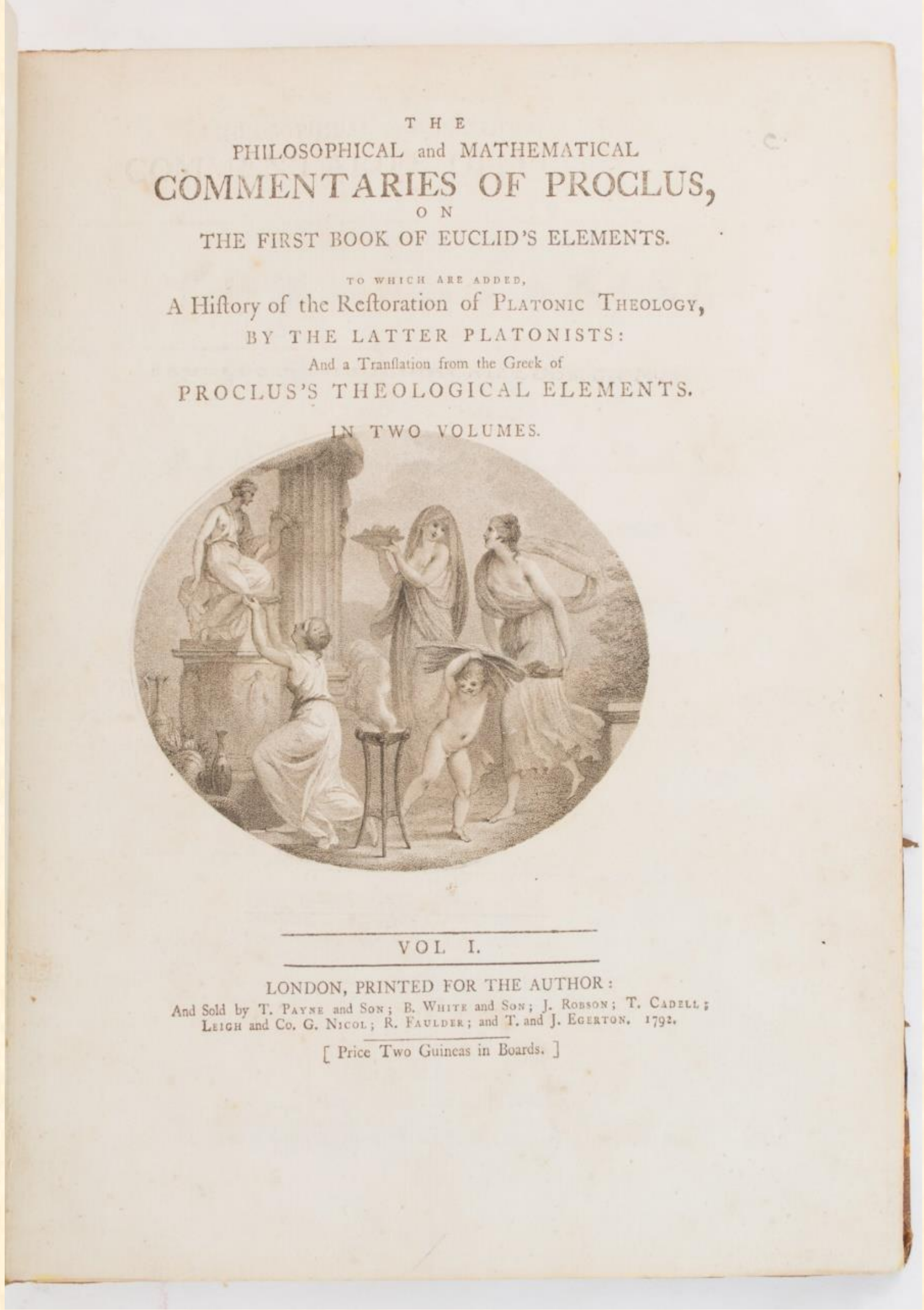

PORPHIRE SOPHISTE



ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

ΠΡΩΤΟΝ


THE
PHILOSOPHICAL and MATHEMATICAL
COMMENTARIES OF PROCLUS,
ON
THE FIRST BOOK OF EUCLID'S ELEMENTS.
TO WHICH ARE ADDED,
A Hiſtory of the Reſtoration of PLATONIC THEOLOGY,
BY THE LATTER PLATONISTS:
And a Tranſlation from the Greek of
PROCLUS'S THEOLOGICAL ELEMENTS.
IN TWO VOLUMES.

VOL. I.

LONDON, PRINTED FOR THE AUTHOR:
And Sold by T. PAYNE and SON; B. WHITE and SON; J. ROBSON; T. CADELL; LEIGH and Co. G. NICOL; R. FAULDER; and T. and J. EGERTON. 1792.
[Price Two Guineas in Boards.]

Ἀρχὴν δὲ ποιούμενοι τῆς τῶν καθ' ἕκαστα ζητήσεως προαγορεύομεν τοῖς ἐντευξομένοις, μὴ ταῦτα παρ' ἡμῶν ἀπαιτεῖν ὅσα διατεθρύληται τοῖς πρὸ ἡμῶν λημμάτια καὶ πτώσεις καὶ εἴ τι τοιοῦτο. τούτων μὲν γὰρ διακορεῖς ἐσμὲν καὶ σπανίως αὐτῶν ἐφαψόμεθα. ὅσα δὲ πραγματειωδεστέραν ἔχει θεωρίαν καὶ συντελεῖ πρὸς τὴν ὅλην φιλοσοφίαν, τούτων προηγουμένην ποιησόμεθα τὴν ὑπόμνησιν.

Proclus, *In Eucl.* 84.8-23.


IVSTINIAN.

Άγνωστη Ελ[illegible]κή Έκδοση

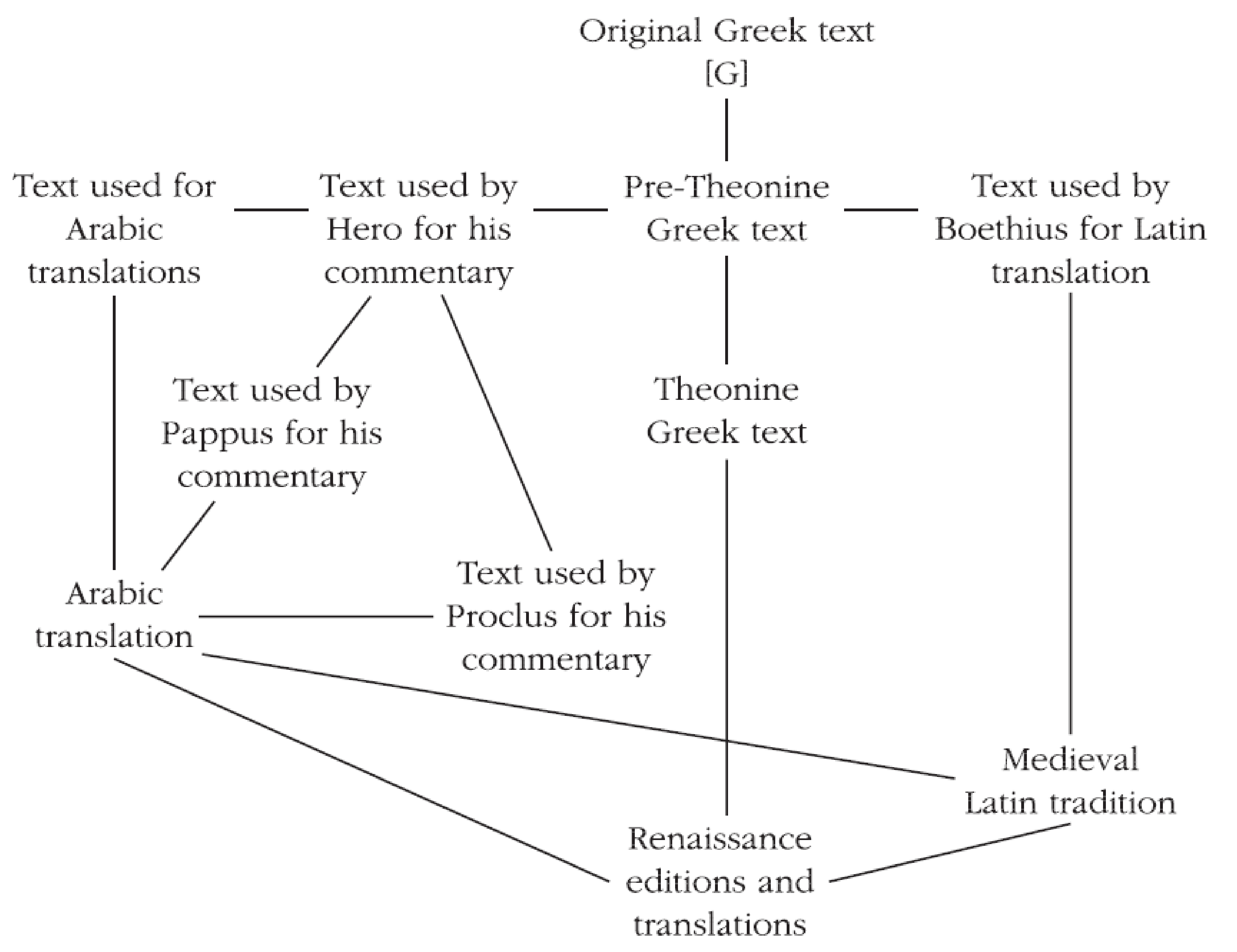
Al-[illegible]aj I

Al-[illegible]aj II

Is[illegible] I

Ishaq-Thabit

'There was left nothing superfluous in it that he did not make succinct, nor any flaw that he did not fix, nor any defect that he did not set aright and rectify, until he had corrected it, made it certain, summed it up, and abbreviated it to what is in this edition for people of understanding, discrimination, and learning, without his having changed any of its meaning at all. And he left the earlier edition as it stood for the public.'[22]


Original Greek text
[G]
Text used for Arabic translations
Text used by Hero for his commentary
Pre-Theonine Greek text
Text used by Boethius for Latin translation
Text used by Pappus for his commentary
Theonine Greek text
Arabic translation
Text used by Proclus for his commentary
Medieval Latin tradition
Renaissance editions and translations

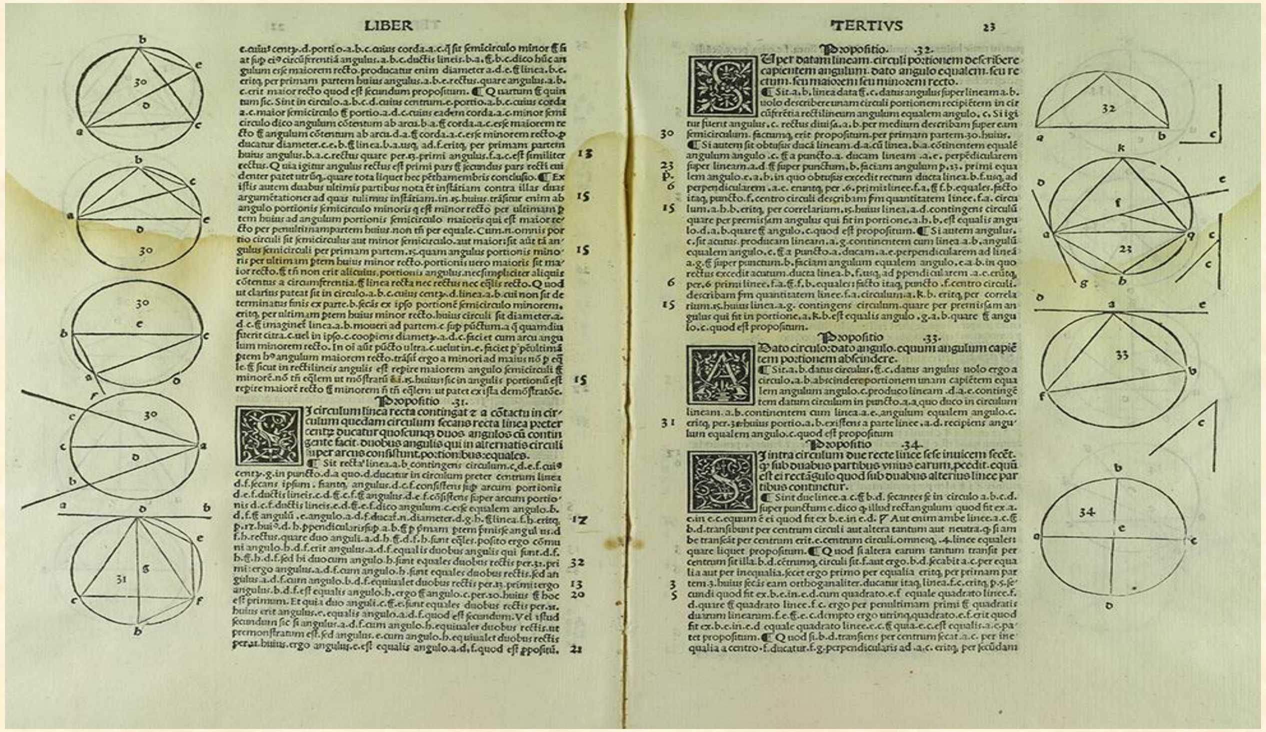
(α) Gerard από την Κρεμόνα

(β) Adelard από το Μπαθ

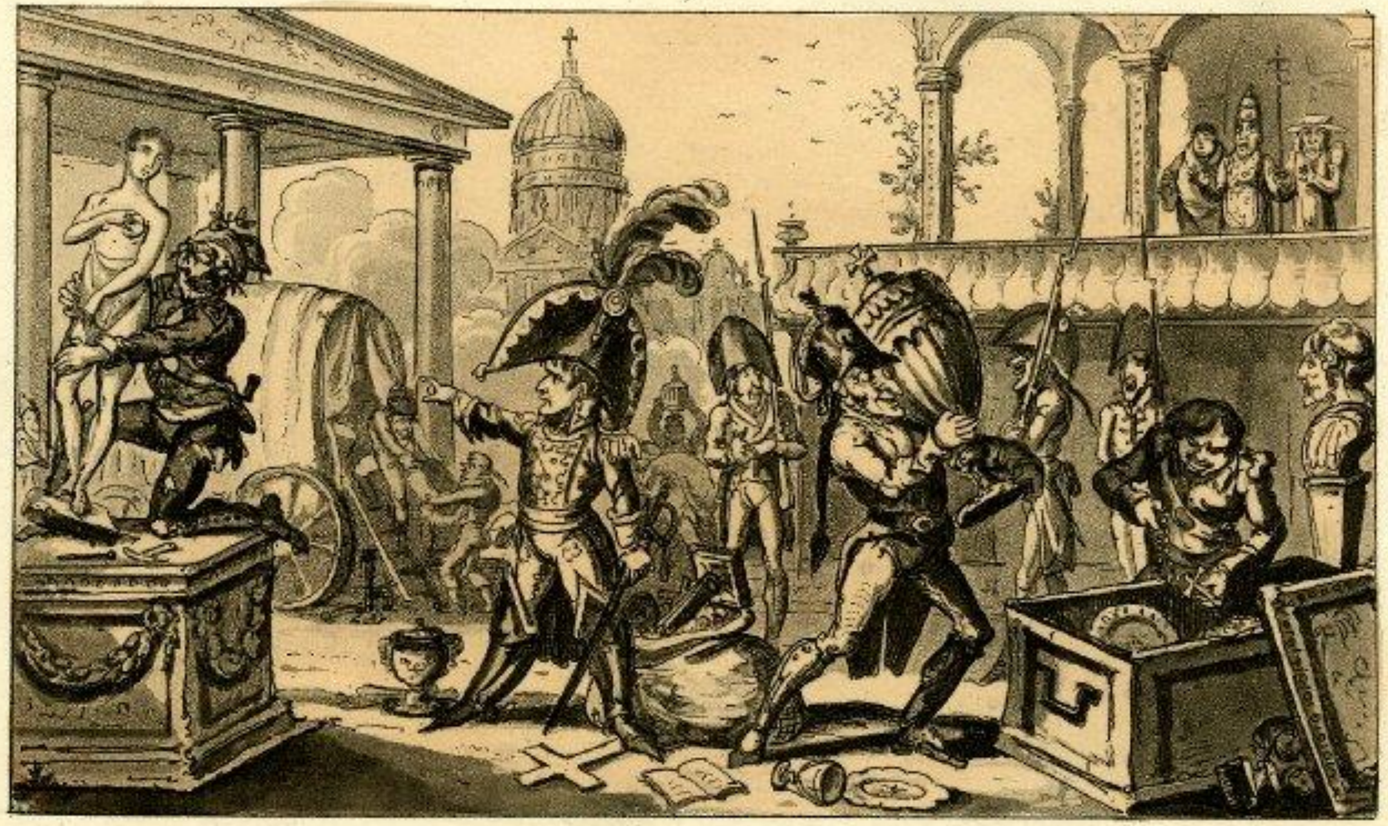
- Adelard I
- Adelard II
- Adelard III

(γ) Hermann από την Καρινθία

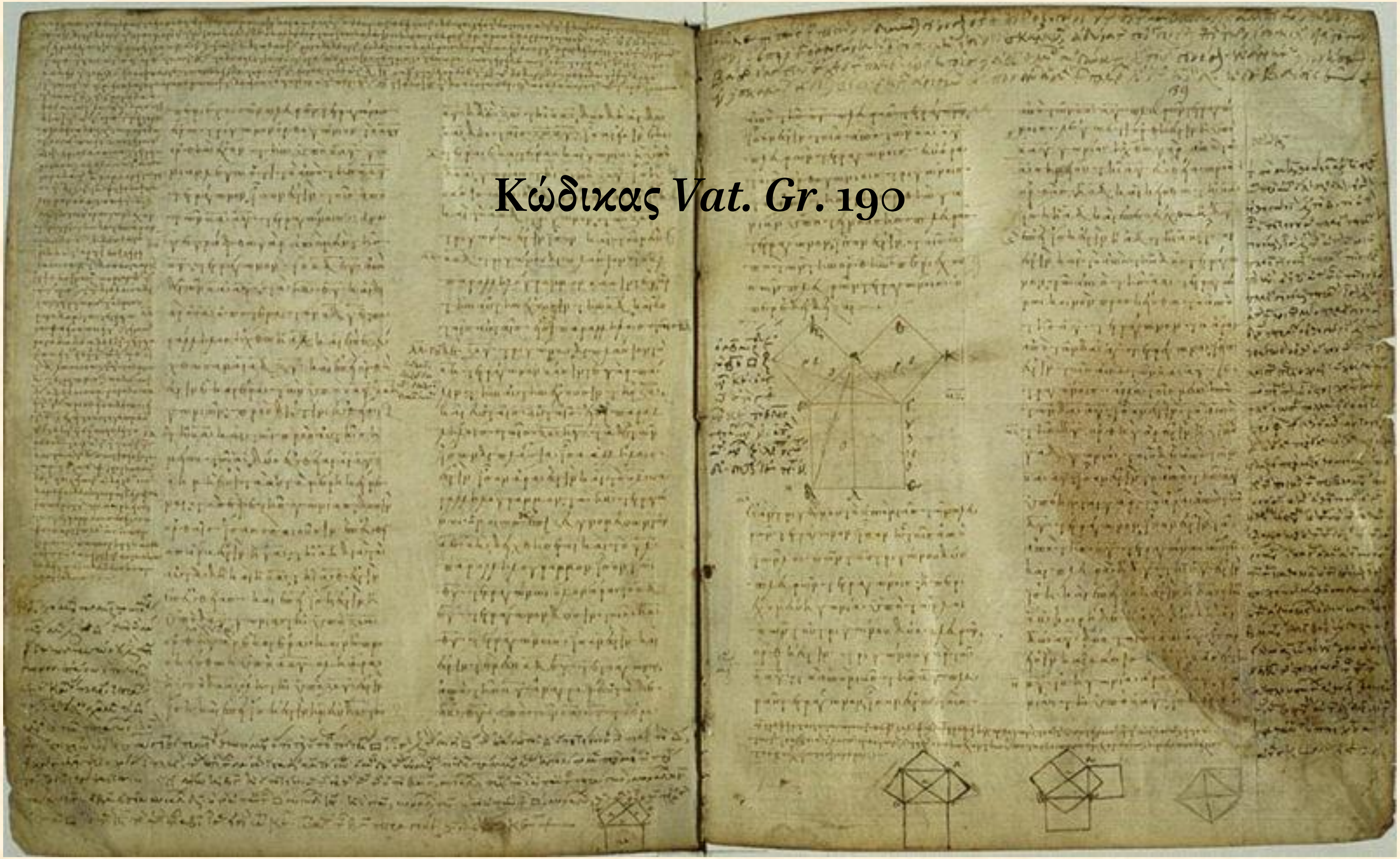
CAMPANUS



7



SEIZING THE ITALIAN RELICS.



Κώδικας *Vat. Gr.* 190

B = Oxford, Bodleian Library, MS D'Orville

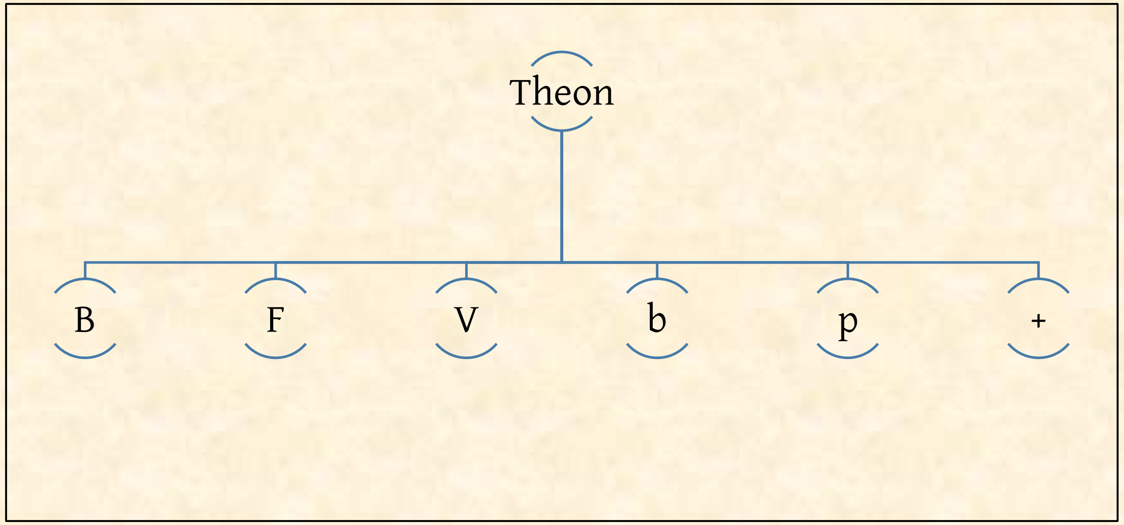
F= Florence, Biblioteca Laurenziana MS Plut. XXVIII, 3

V=Vienna, Osterreichische Nationalbibliothek, MS gr.103

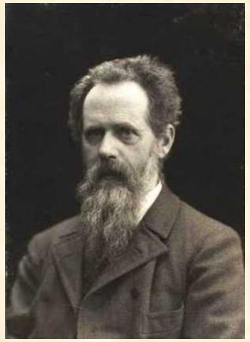
b=Bologna, Biblioteca Communale, MS A 18-19

p=Paris, Bibliotheque Nationale, MS gr. 2466

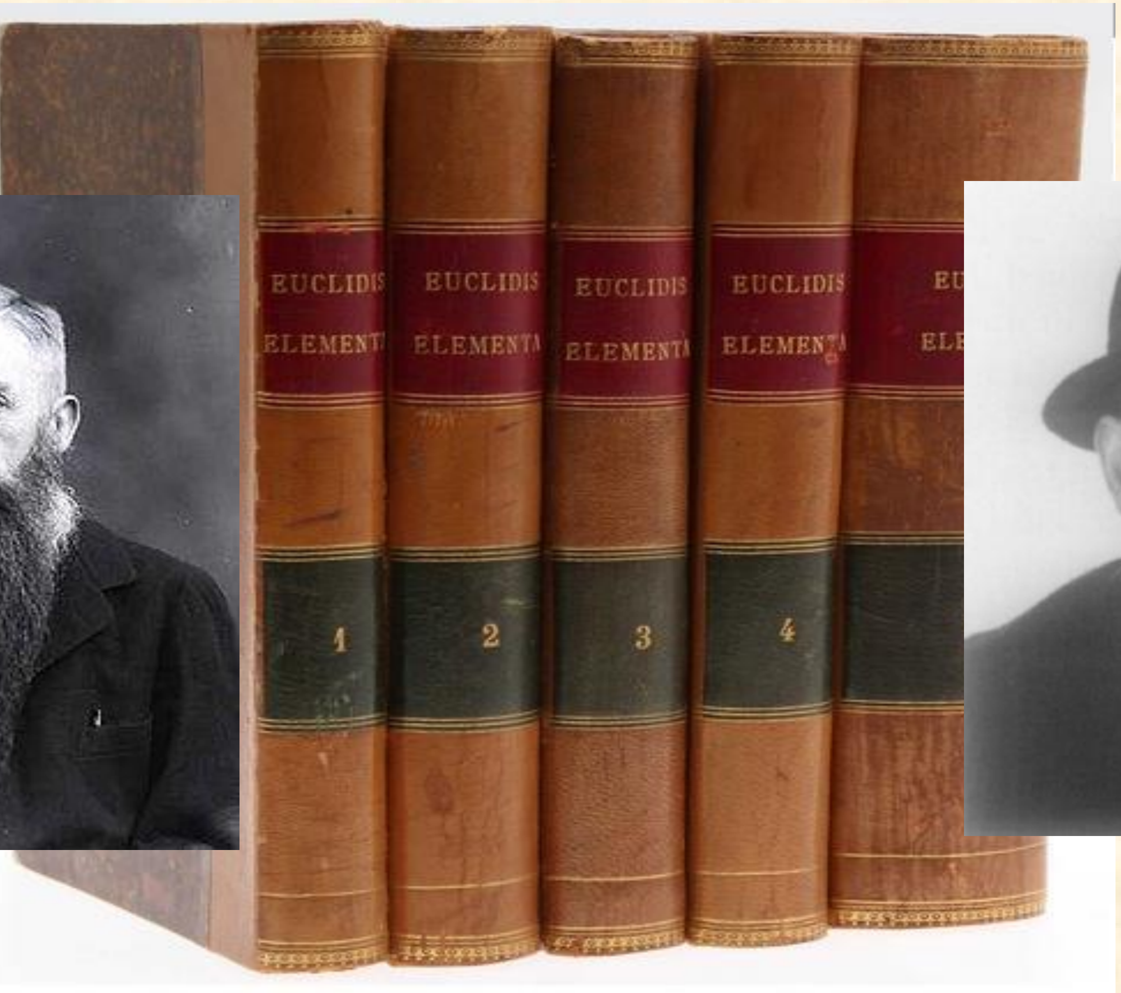
?



P



P=Vatican MS gr. 190


EUCLIDIS
ELEMENTA
1
EUCLIDIS
ELEMENTA
2
EUCLIDIS
ELEMENTA
3
EUCLIDIS
ELEMENTA
4

Ένα από τα σημαντικά προβλήματα των εκδόσεων Heiberg-Stamatis είναι ότι δεν περιέχουν κριτική έκδοση των διαγραμμάτων

ΜΑΘΗΜΑΤΑ
GreekMath.Org

HOME	Diagrams	DRaFT	Toolbox	About
	Diagrams in manuscripts	A tool for reproducing diagrams	Indices of propositions used in principal works	This site and its author

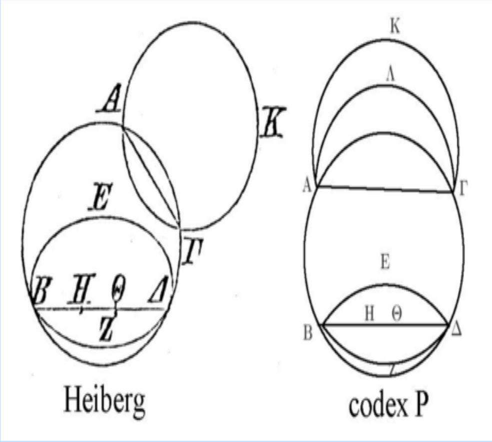
MENU

- HOME
- Diagrams
- DRaFT
- Toolbox
- About

Diagrams

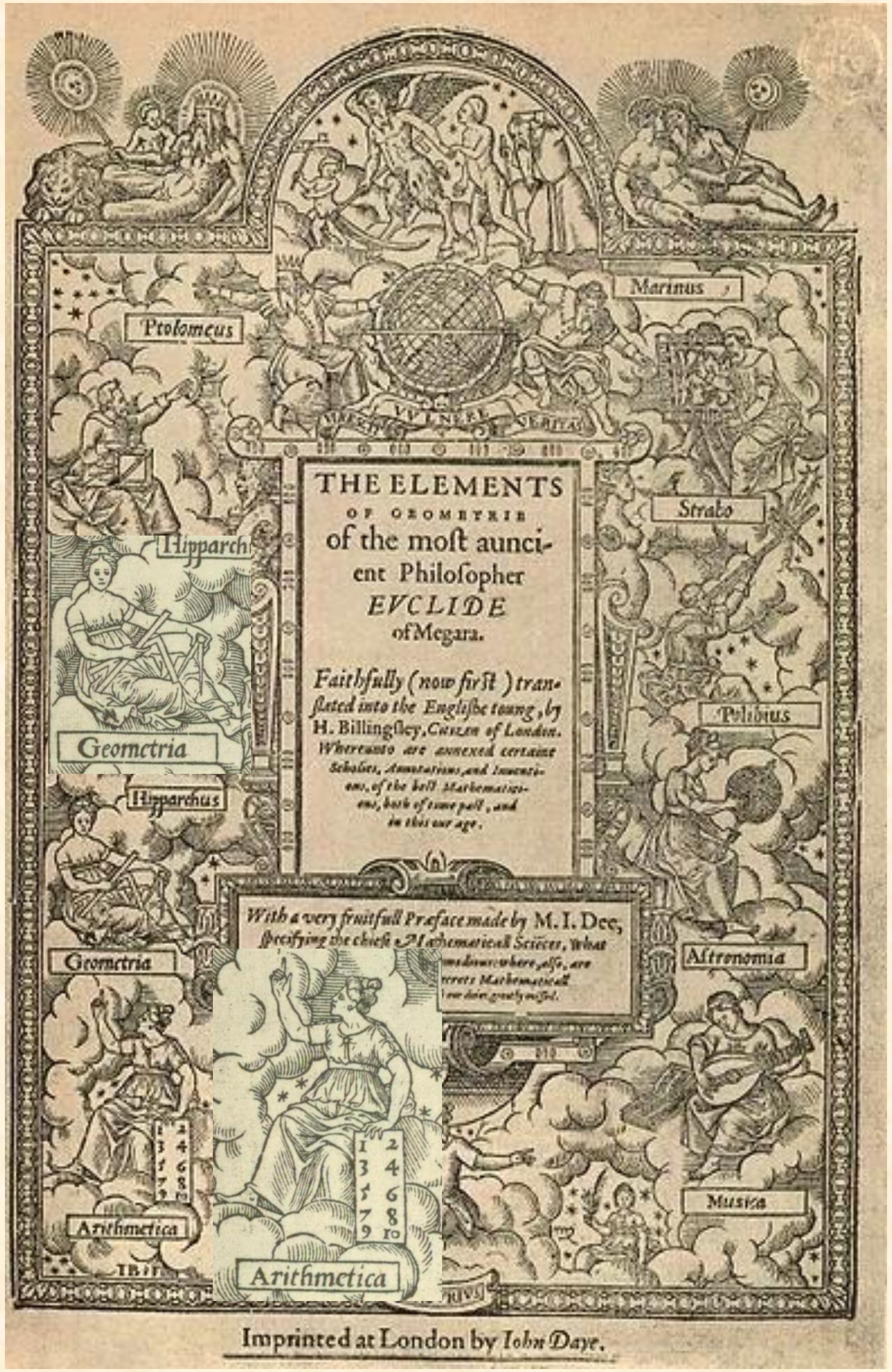
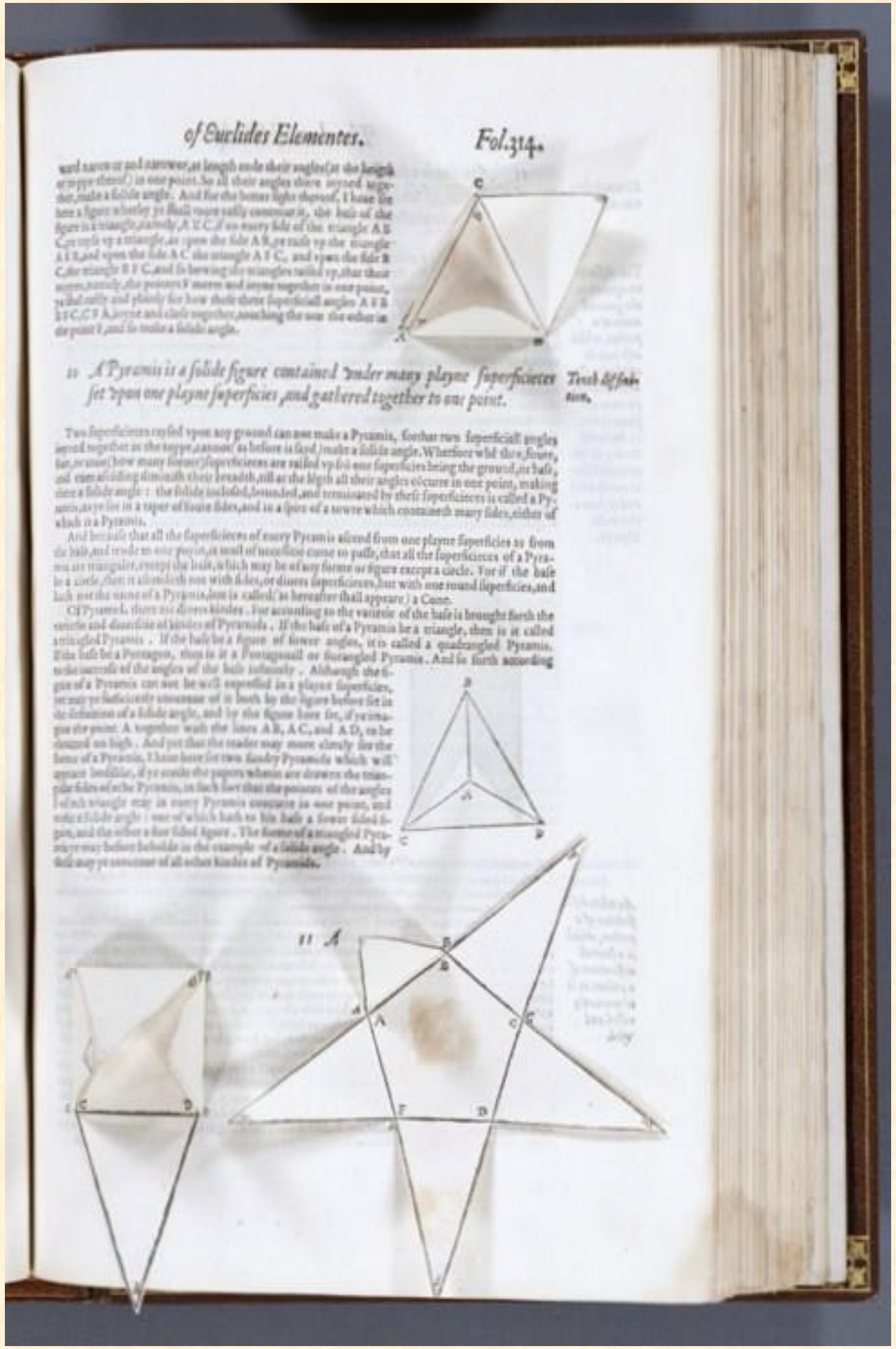
Last update December 14, 2014

From this page you can download diagrams of several Greek mathematical works reproduced from the manuscripts: Euclid's *Elements*, Books 2-4, 6, 11-13, *Phaenomena*, *Optics*, as well Arabic translation of Menelaus' *Spherics*.



Example

In proposition III.13 of the *Elements*, Euclid proves (by contradiction) that two circles cannot touch at two points either internally or externally. All the modern editions have a diagram similar to the one in the left, which appears in Heiberg's edition. However, the diagram found in the manuscripts is like the one in the right, which is a faithful reproduction from Vatican manuscript of the ninth century. Here, the second circle ΑΚΓ touching externally at two points to the first circle ΑΒΓΔ is represented by a lunule, which Heiberg (more precisely August, whose diagrams were copied by Heiberg) has changed into a circle.


Ptolomeus
Marinus
Strabo
Hipparchus
Geometria
Polibius
Astronomia
Arithmetica
Musica
THE ELEMENTS
OF GEOMETRIE
of the most aunci-
ent Philosopher
EVCLIDE
of Megara.
Faithfully (now first) trans-
slated into the Englishe toung, by
H. Billingsley, Citizen of London.
Whereunto are annexed certaine
Scholies, Annotations, and Inventi-
ons, of the best Mathematici-
ons, both of time past, and
in this our age.
With a very fruitfull Præface made by M. I. Dee,
Imprinted at London by John Daye.

of Euclides Elementes.
Fol.314.
A Pyramis is a solide figure contained under many playne superficieces set upon one playne superficies, and gathered together to one point.

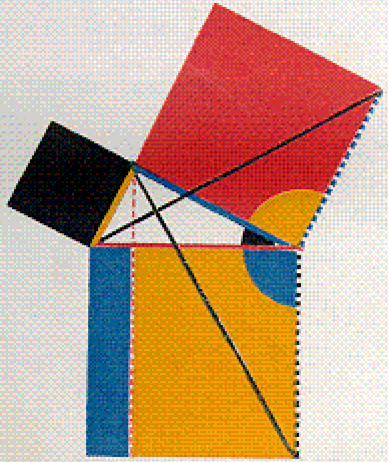
THE FIRST SIX BOOKS OF

THE ELEMENTS OF EUCLI

IN WHICH COLOURED DIAGRAMS AND SYMBO
ARE USED INSTEAD OF LETTERS FOR THE
GREATER EASE OF LEARNERS

BY OLIVER BYRNE

SURVEYOR OF HER MAJESTY'S SETTLEMENTS IN THE FALKLAND ISLANDS
AND AUTHOR OF NUMEROUS MATHEMATICAL WORKS

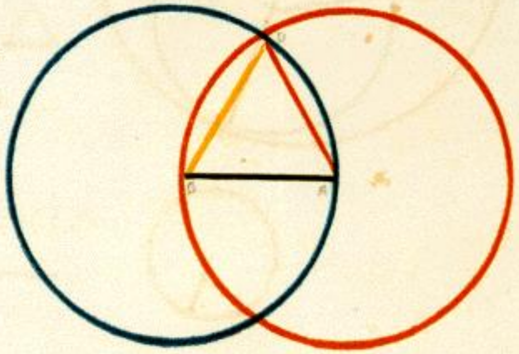


LONDON
WILLIAM PICKERING
1847

Euclid.

BOOK I.

PROPOSITION I. PROBLEM.



ON *a given finite ſtraight line* ( ) *to deſcribe an equilateral triangle.*

Deſcribe and (poſtulate 3.); draw and (poſt. 1.).

then will be equilateral.

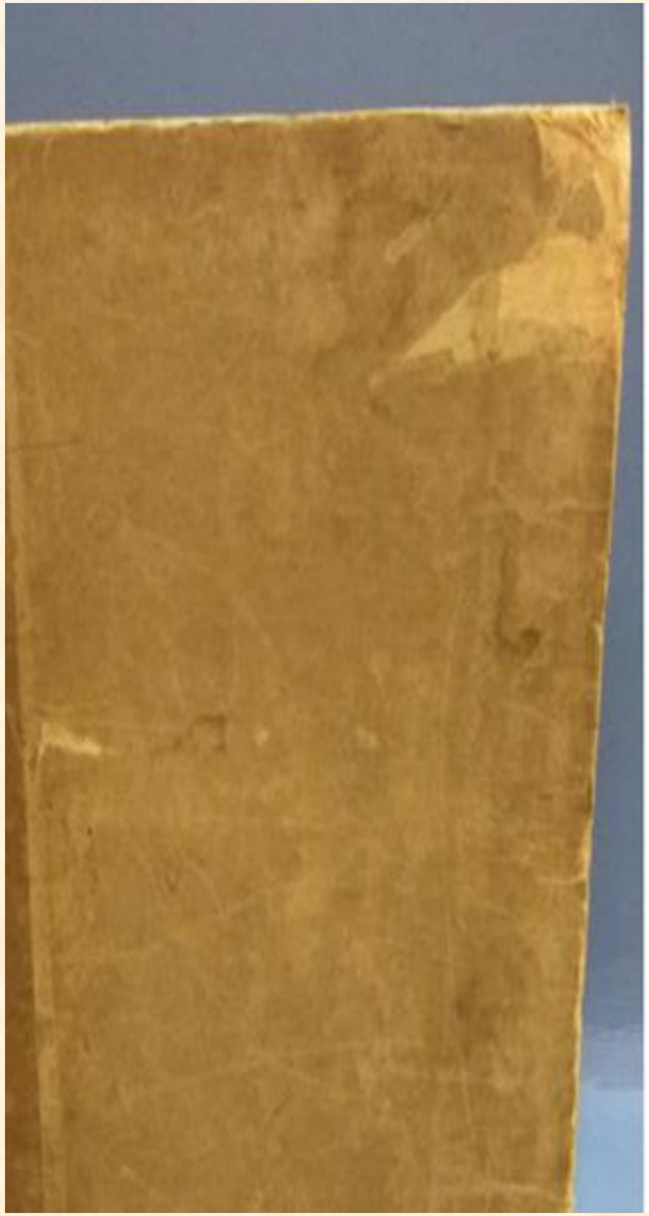
For = (def. 15.);

and = (def. 15.),

∴ = (axiom. 1.);

and therefore is the equilateral triangle required.

Q. E. D.



FREE P&P

APPENDIX TO THE ELEMENTS OF EUCLID BY J. L.COWLEY 1765

Item condition: --

Price: **£8,000.00**

Buy it now

Add to basket

Best Offer:

Make offer

Add to Watch list

Collect **5,000** Nectar points | Conditions

Postage: **Free** Express Delivery | See details

Item location: **Bedworth, Warwickshire, United Kingdom**

Post to: **Worldwide**

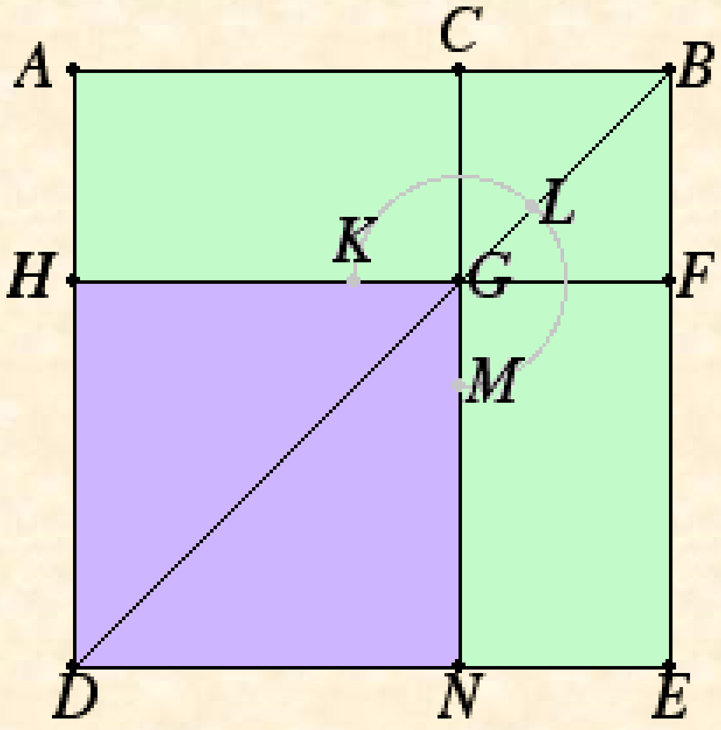
Ιστοριογραφικές διαμάχες για το βιβλίο ΙΙ των *Στοιχείων*

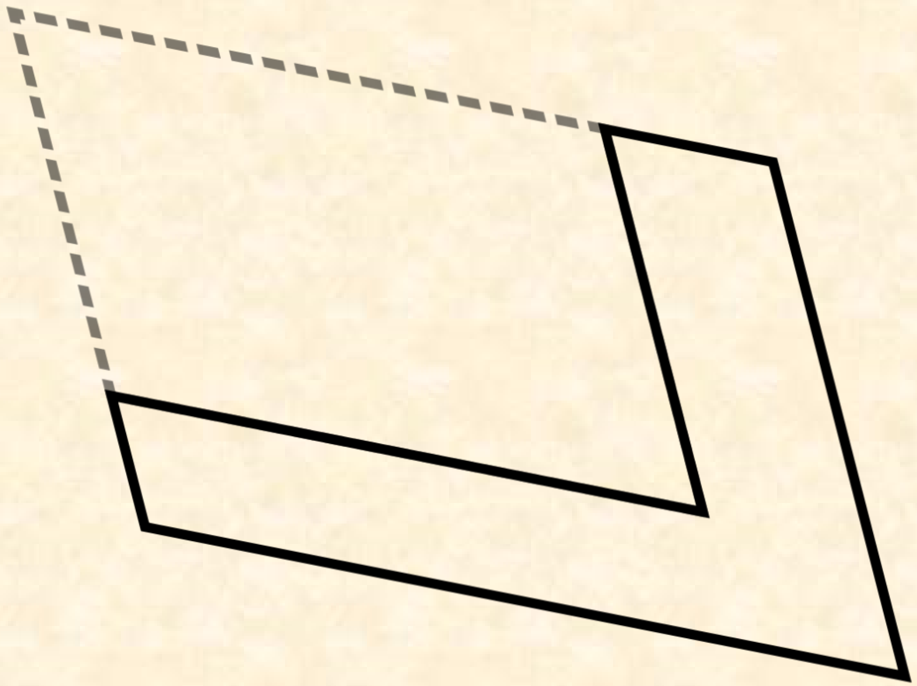
ΒΙΒΛΙΟΝ ΙΙ.

Ὁρισμοί.

1. Πᾶν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον λέγεται ὅτι περιέχεται ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν ὀρθὴν γωνίαν.

2. Παντὸς δὲ παραλληλογράμμου, ἓν οἱονδήποτε ἐκ τῶν περὶ τὴν διαγώνιον παραλληλογράμμων, μαζὶ μὲ τὰ δύο παραπληρώματα, ἃς ὀνομάζεται γνώμων.





1.

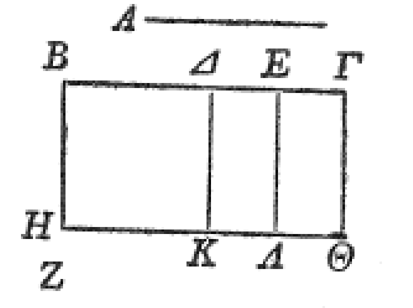
Ἐὰν ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ μία ἐξ αὐτῶν εἰς ὁσαδήποτε τμήματα, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν εἶναι ἴσον πρὸς τὰ ὀρθογώνια τὰ ὁποῖα περιέχονται ὑπὸ τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων.

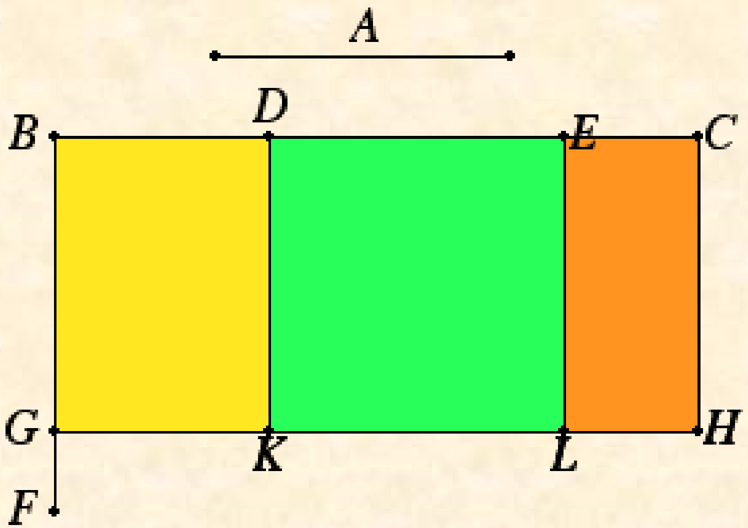
Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ Α, ΒΓ, καὶ ἂς τμηθῇ ἡ ΒΓ, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὰ σημεῖα Δ, Ε· λέγω, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν Α, ΒΔ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΔΕ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΕΓ.

Διότι, ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΒΖ (I.11) καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΒΗ ἴση πρὸς τὴν Α, καὶ διὰ μὲν τοῦ Η ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ ἡ ΗΘ (I.31), διὰ δὲ τῶν Δ, Ε, Γ ἂς ἀχθοῦν παράλληλοι πρὸς τὴν ΒΗ, αἱ ΔΚ, ΕΛ, ΓΘ.

Τὸ ὀρθογώνιον ΒΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ ΒΚ, ΔΛ, ΕΘ. Καὶ τὸ μὲν ΒΘ σχηματίζεται ὑπὸ τῶν εὐθειῶν Α, ΒΓ· διότι τοῦτο περιέχεται μὲν ὑπὸ τῶν ΗΒ, ΒΓ, ἡ δὲ ΒΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Α· τὸ δὲ ΒΚ σχηματίζεται ὑπὸ τῶν εὐθειῶν Α, ΒΔ· διότι τοῦτο περιέχεται μὲν ὑπὸ τῶν ΗΒ, ΒΔ, ἡ δὲ ΒΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Α. Τὸ δὲ ΔΛ σχηματίζεται ὑπὸ τῶν εὐθειῶν Α, ΔΕ· διότι ἡ ΔΚ, τουτέστιν ἡ ΒΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Α (I.34). Καὶ καθ' ὅμοιον τρόπον τὸ ΕΘ τὸ σχηματιζόμενον ὑπὸ τῶν Α, ΕΓ· ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ ὀρθογώνιον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΒΔ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΔΕ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ.

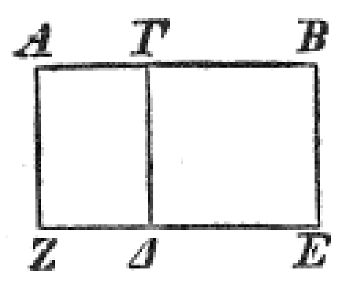
Ἐὰν ἄρα ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ μία ἐξ αὐτῶν εἰς ὁσαδήποτε τμήματα, τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν εἶναι ἴσον πρὸς τὰ ὀρθογώνια τὰ ὁποῖα περιέχονται ὑπὸ τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.





3.

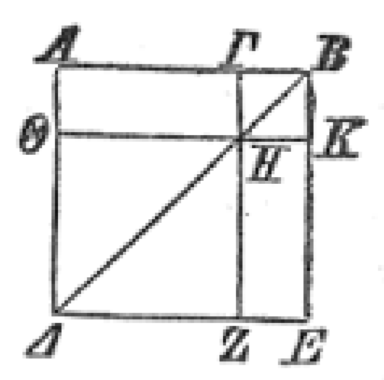
Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ὅλης τῆς εὐθείας καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν δύο τμημάτων καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ ληφθέντος ἑνὸς τμήματος.



4.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ τετράγωνον τῆς ὅλης εὐθείας εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν τμημάτων καὶ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων.

Διότι, ἂς τμηθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΒ, κατὰ τὸ τυχὸν σημεῖον Γ. Λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνα τῶν ΑΓ, ΓΒ καὶ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ.



Artmann, Benno (1990), 'Mathematical motifs on Greek Coins', The Mathematical Intelligencer, 12 (4), 43-50.

Γεωμετρική ερμηνεία

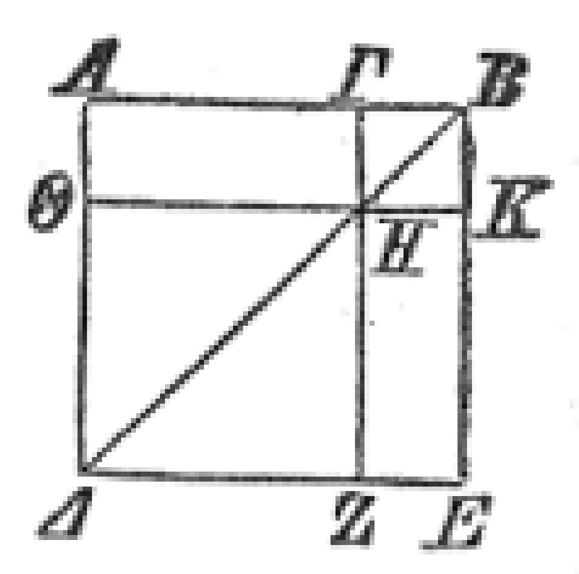
Πρόταση

Έκθεση

Κατασκευή: Κατασκευάζουμε το τετράγωνο ΑΔΕΒ, φέρουμε την ΓΖ παράλληλη προς τις ΑΔ, ΒΕ, φέρουμε τη διαγώνιο ΒΔ, και από το σημείο Η φέρουμε την ΘΚ παράλληλη προς τις ΑΒ, ΔΕ.

Απόδειξη:

- ∡ ΓΗΒ =∡ ΑΔΒ.
- Αλλά ∡ ΑΔΒ =∡ ΑΒΔ (διότι τρ. ΑΔΒ ισοσκελές).
- Άρα ∡ ΓΗΒ =∡ ΗΒΓ.
- Άρα ΒΓ =ΓΗ.
- Αλλά ΓΒ =ΗΚ και ΓΗ =ΚΒ. Άρα παραλληλόγραμμο ΓΗΚΒ είναι ισόπλευρο.
- ∡ ΚΒΓ +∡ ΗΓΒ =2 ορθές (παραπληρωματικές γωνίες).
- Η ∡ ΚΒΓ είναι ορθή.
- Άρα και ∡ ΗΓΒ είναι ορθή.
- Άρα και οι απέναντι γωνίες του ΓΗΚΒ είναι ορθές.
- Άρα το παραλληλόγραμμο ΓΗΚΒ είναι ισόπλευρο και ισογώνιο.
- Άρα το ΓΗΚΒ είναι τετράγωνο. Δηλαδή ΓΗΚΒ =**Τ** (ΓΒ).
- Ομοίως το ΘΗΖΔ είναι τετράγωνο. Δηλαδή ΘΗΖΔ =**Τ** (ΘΗ) =**Τ** (ΑΓ).
- Τα ορθογώνια ΑΓΗΘ και ΗΚΕΖ είναι ίσα και το καθένα ισούται με **Ο** (ΑΓ, ΓΒ).
- Άρα τα δύο ορθογώνια μαζί ισούνται με το διπλάσιο του **Ο** (ΑΓ, ΓΒ).
- Άρα (ΘΖ) +(ΓΚ) +(ΑΗ) +(ΗΕ) =**Τ** (ΑΓ) +**Τ** (ΓΒ) +2 **Ο** (ΑΓ, ΓΒ).
- Αλλά (ΘΖ) +(ΓΚ) +(ΑΗ) +(ΗΕ) =ΑΔΕΒ =**Τ** (ΑΒ).
- Άρα **Τ** (ΑΒ) =**Τ** (ΑΓ) +**Τ** (ΓΒ) +2 **Ο** (ΑΓ, ΓΒ).



Συμπέρασμα

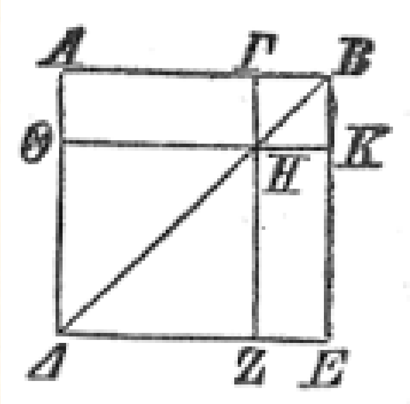
Αλγεβρική Ερμηνεία

Αν ονομάσουμε ΑΓ = a, ΓΒ = b,
τότε ΑΒ = $a + b$, **Τ** (ΑΒ) = $(a + b)^2$, **Τ** (ΑΓ) = a^2, **Τ** (ΓΒ) = b^2, **Ο** (ΑΓ, ΓΒ) = ab.
Επομένως, η σχέση

$$\mathbf{T}\,(\mathrm{AB}) = \mathbf{T}\,(\mathrm{A\Gamma}) + \mathbf{T}\,(\Gamma\mathrm{B}) + \mathbf{2}\ \mathbf{O}\,(\mathrm{A\Gamma}, \Gamma\mathrm{B})$$

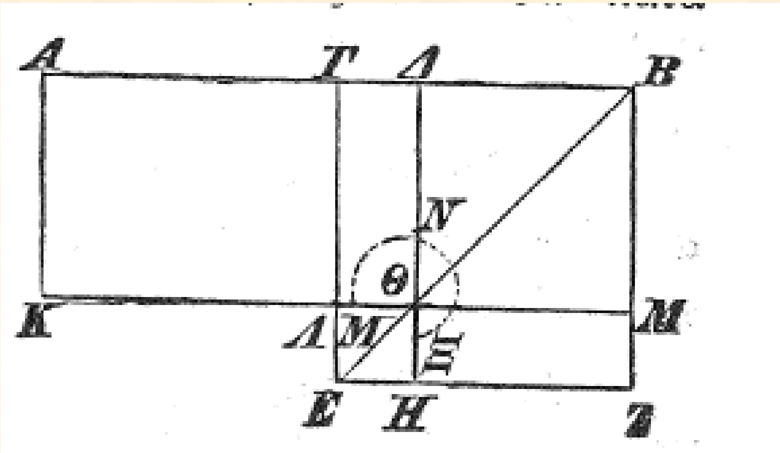
γράφεται

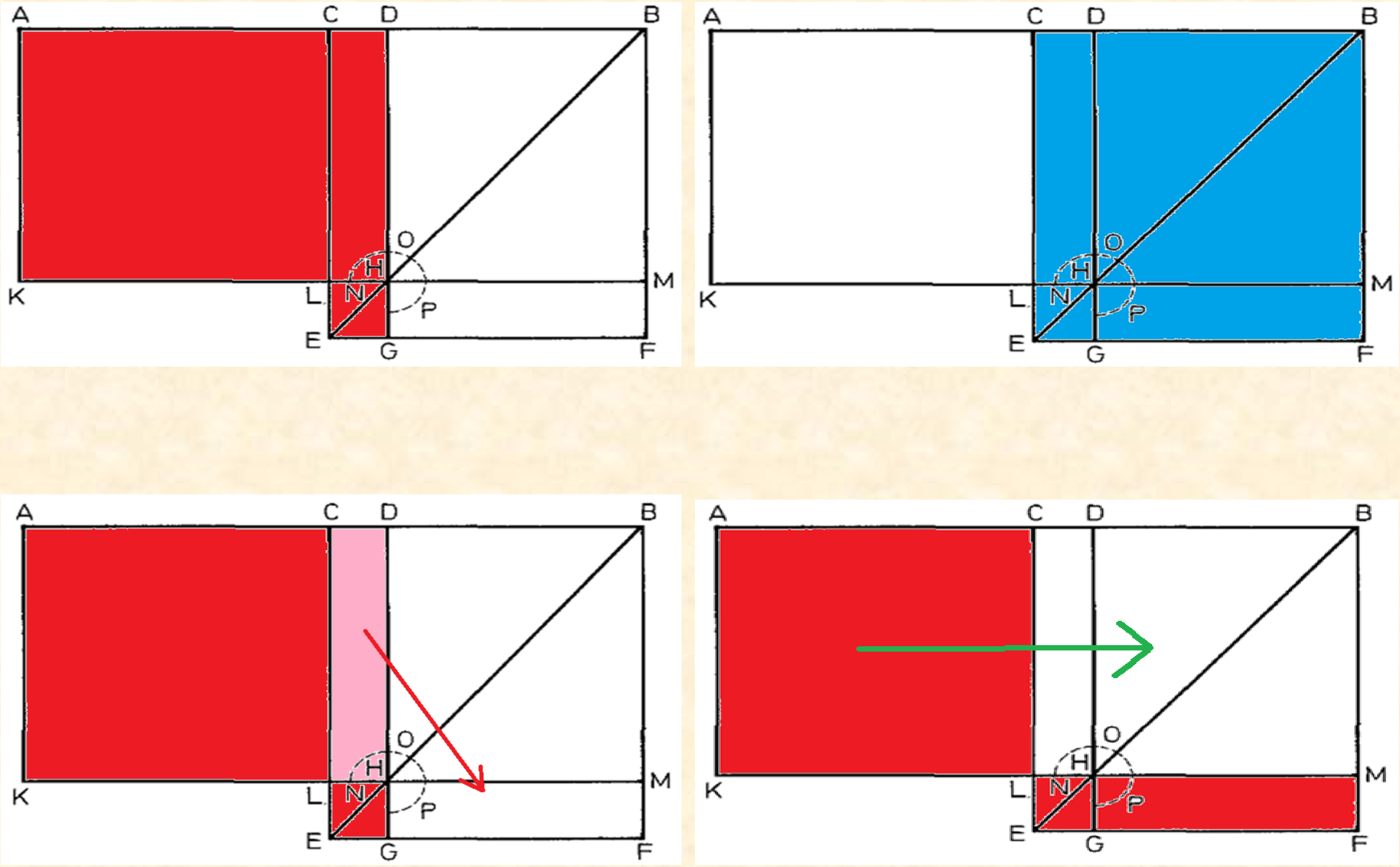
$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$



5.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀνίσων τμημάτων τῆς ὅλης εὐθείας μὲ τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὸ μεταξύ τῶν τομῶν τμῆμα εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὸ ἥμισυ τῆς τμηθείσης εὐθείας.




A
C
D
B
O
H
K
L
N
M
P
E
G
F

1. $a(b+c+d+\ldots) = ab + ac + ad + \ldots,$

2. $(a+b)a + (a+b)b = (a+b)^2,$

3. $(a+b)a = ab + a^2,$

4. $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$

5. $ab + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$

or $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) + \beta^2 = \alpha^2,$

6. $(2a+b)b + a^2 = (a+b)^2,$

or $(\alpha+\beta)(\beta-\alpha) + \alpha^2 = \beta^2,$

7. $(a+b)^2 + a^2 = 2(a+b)a + b^2,$

or $\alpha^2 + \beta^2 = 2\alpha\beta + (\alpha-\beta)^2,$

8. $4(a+b)a + b^2 = \{(a+b)+a\}^2,$

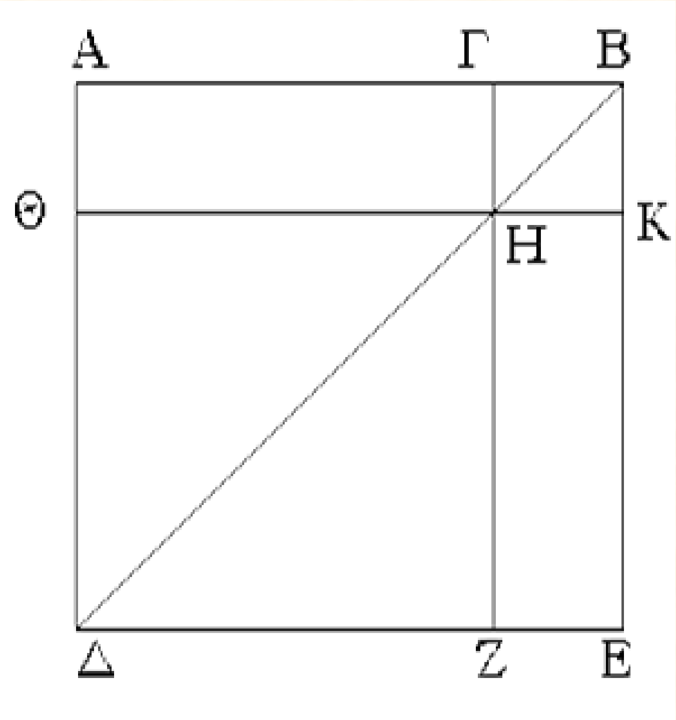
or $4\alpha\beta + (\alpha-\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2,$

9. $a^2 + b^2 = 2\left\{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2\right\},$

or $(\alpha+\beta)^2 + (\alpha-\beta)^2 = 2(\alpha^2+\beta^2),$

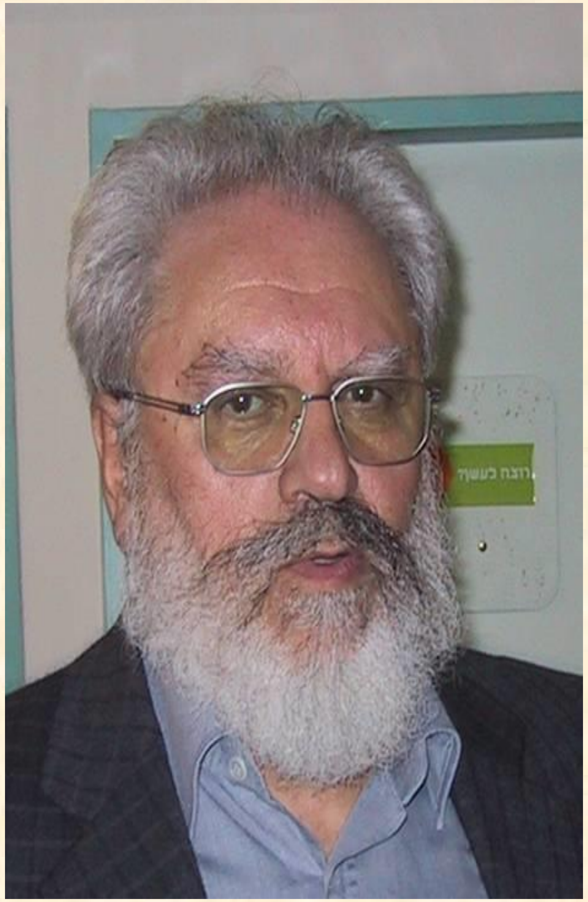
10. $(2a+b)^2 + b^2 = 2\{a^2 + (a+b)^2\},$

or $(\alpha+\beta)^2 + (\beta-\alpha)^2 = 2(\alpha^2+\beta^2).$



‘ …[I have] attempt[ed] to make the work of "the great geometer" accessible to the mathematician of today who might not be able, in consequence of its length and of its form, either to read it in the original Greek or in a Latin translation, or, having read it, to master it and grasp the whole scheme of the treatise…’

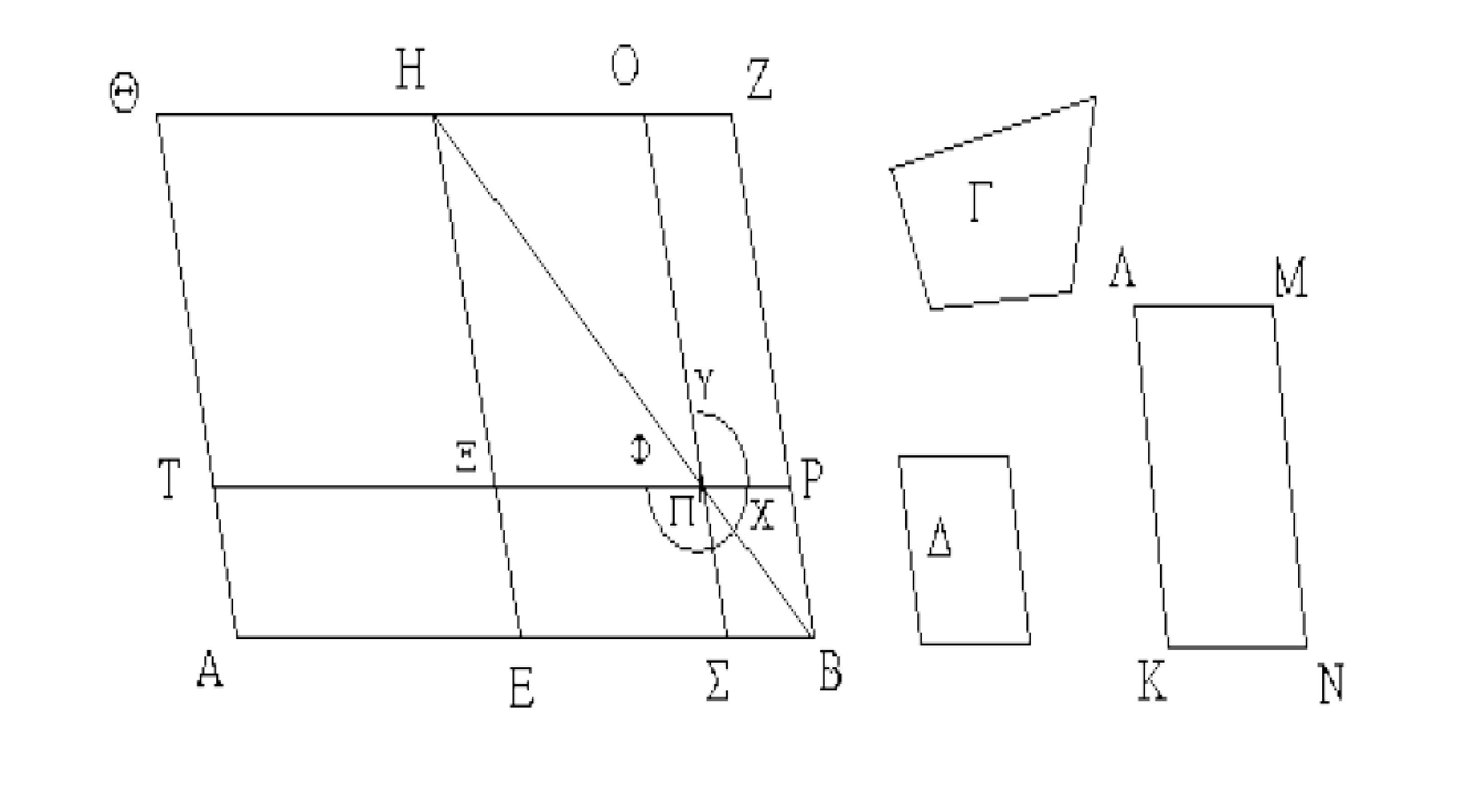
[they] were at bottom algebraists,
they thought algebraically even though they put their reasoning in a geometric dress



‘...it is the purpose of this paper to show what is historically wrong with the traditional way the history of ancient Greek mathematics has been written and to call to the new generation of historians of Greek mathematics to rewrite that history on a new and historically sane basis...’

28.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν νὰ παραβληθῇ παραλληλόγραμμον ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον, ἀπὸ τὸ ὁποῖον νὰ ἐλλείπῃ σχῆμα παραλληλόγραμμον ὅμοιον πρὸς τὸ δοθέν· πρέπει δὲ τὸ διδόμενον εὐθύγραμμον [πρὸς τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ παραβληθῇ ἴσον] νὰ μὴ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένου ὁμοίου πρὸς τὸ ἐλλεῖπον [δηλ. τοῦ ἀναγραφομένου ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ πρὸς τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἐλλείπῃ ὅμοιον].



$$ax - \frac{b}{c}x^2 = S$$

$$S \leq \frac{c}{b}\frac{a^2}{4}$$

‘Who can see that?

If you face a smart student of Greek synthetic geometry, whose mind was never exposed to the algebraic way of thinking, with Heath’s statement quoted above, there is not the slightest doubt whatever that he would fail to understand it.

Indeed, I think that Euclid *himself would have failed to understand* Heath’s *statement*; not because Euclid was less smart than Heath, but because, living when he did, he did not have at his disposal what Heath had in the nineteenth and twentieth centuries (primarily algebra and analytical geometry) and because (and this is another way of saying the same thing) his pattern of mathematical though was different that Heath’s.’

...The proof is purely geometrical, constructive,
intuitive in the sense of its appeal to the eye,
and it consists of a logical concatenation
of statements about geometrical objects
(in this case, rectangles, squares, and gnomons). There are no symbols and, consequently,
there are no operations performed on symbols;
the proof appears to spatial perception
rather than being abstract and it is essentially rootedin what has become known as Aristotelian predicate logic. All these are the very characteristics of Greek geometry...

Παράρτημα: Η διαμάχη για τη «γεωμετρική άλγεβρα»

On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics

Sabetai Unguru

Communicated by W. Hartner

'History is the most fundamental science, for there is no human knowledge which cannot lose its scientific character when men forget the conditions under

Defence of a "Shocking" Point of View

B. L. van der Waerden

Communicated

1. Intro

n his paper "On the Need to Rewr
tai Unguru severely criticizes the vi
myself on the "Geometrical Algebr
position in one sentence: "Greek 'ge
algebra' in geometrical attire", and
historically unacceptable. Unguru states
the present paper is to defend our posi

What is Algebra and What has it been in History?

Hans Freudenthal

Who Betrayed Euclid?
(Extract from a letter to the Editor)

André Weil

Some time ago your *Archive* printed a paper on Greek mathematics in tone and style as well as in content, fell significantly below the standards of that journal. As it has already quite adequately (if perha gently) been refuted there by v. d. Waerden and by Freudenthal, the need for referring to it by name. My only purpose in this letter is to po that we have here almost a textbook illustration of the very thesis wh author (let us call him Z) sought to discredit, *viz.*, that it is well to mathematics before concerning oneself with its history; just as it is well t Greek before dealing with Greek mathematics.

Z discusses a number of examples from Euclid; I shall examine o simplest one, which raises no side-issue; it is taken from Euclid IX.8. consists of parallel statements about squares and about cubes. I may, for

CRITIQUES & CONT

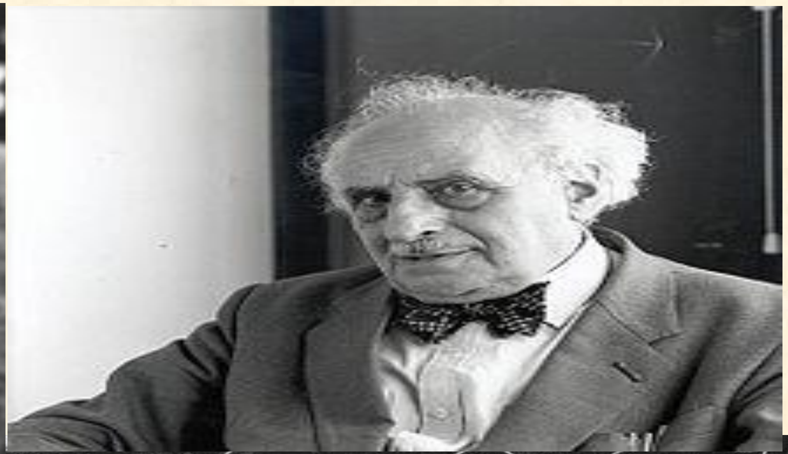
History of Anci

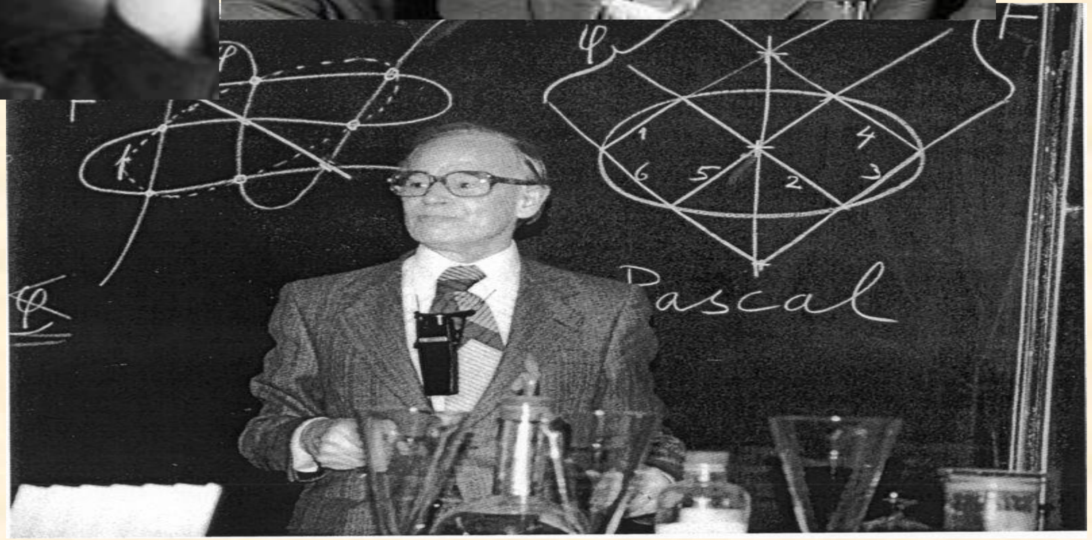
SOME REFLECTIO
OF TH

By Sabet

Da stellt ein Wort zur rechten Zeit sich ein.
—Johann Wolfgang von Goethe[1]

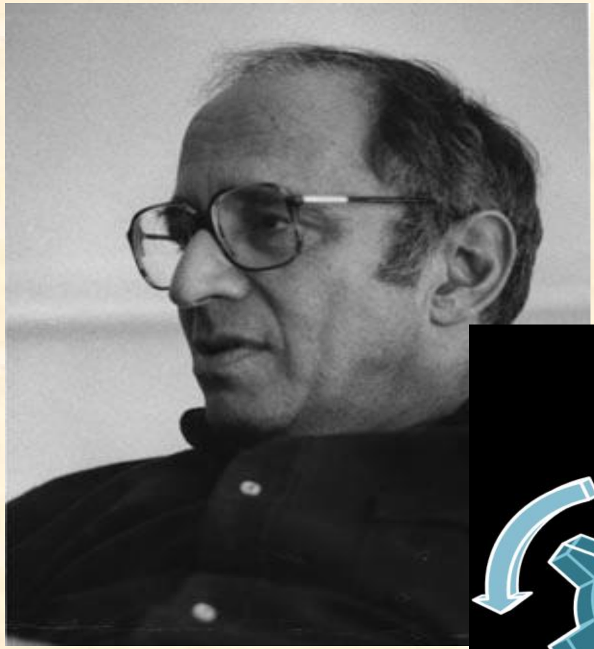
The history of mathematics typically has been written as if to illustrate the adage "anachronism is no vice." Most contemporary historians of mathematics, being mathematicians by training, assume tacitly or explicitly that mathematical entities reside in the world of Platonic ideas where they wait patiently to be discovered by the genius of the working mathematician. Mathematical concepts, constructive as well as computational, are seen as eternal, unchanging, unaffected by the idiosyncratic features of the culture in which they appear, each one clearly identifiable in its various historical occurrences, since these occurrences

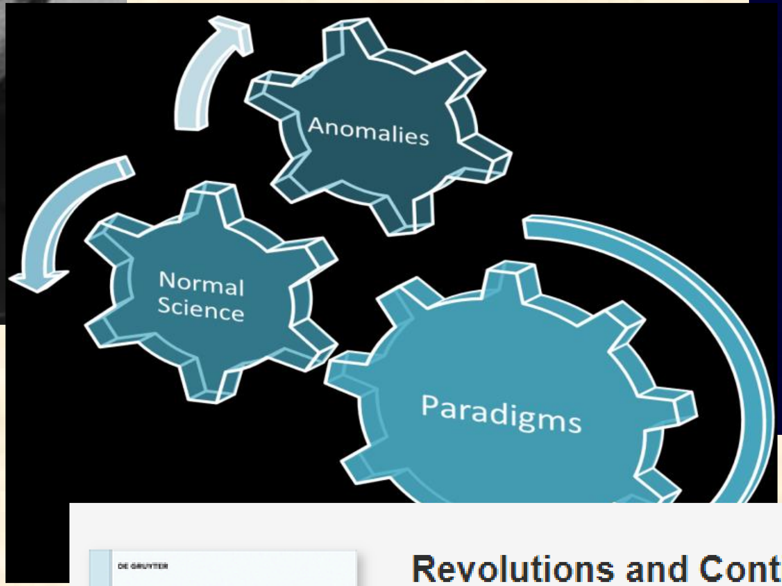


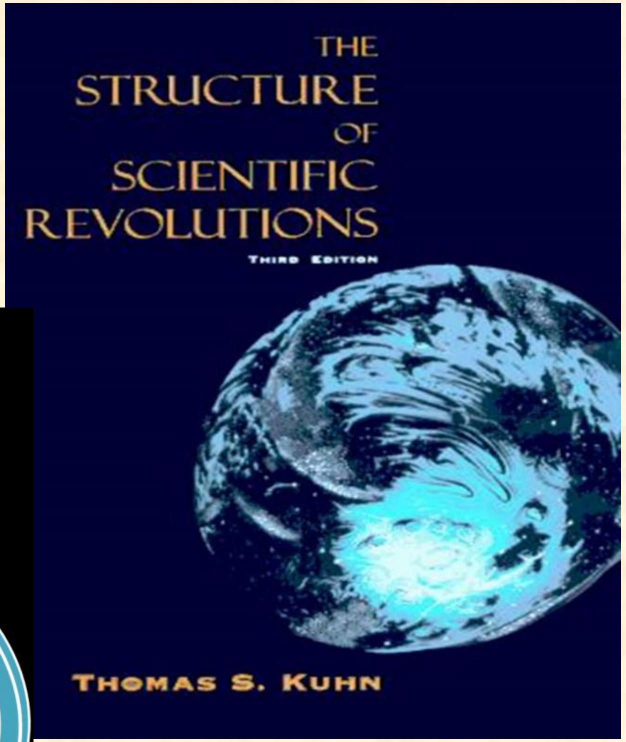


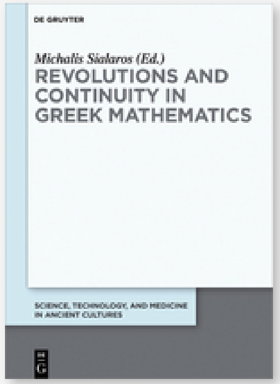
Who betrayed Euclid?

- Mr Z
- (who is) 'a parasite growing between disciplines'
- (and) 'a disease needed to be stopped before proved fatal'









Revolutions and Continuity in Greek Mathematics

Ed. by Sialaros, Michalis

Series: Science, Technology, and Medicine in Ancient Cultures 8

Look inside

ΝΕΥΣΙΣ

ΕΞΑΜΗΝΙΑΙΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ
ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

Τεύχος 25 - 2018

Περιεχομενα