ΓΙΑΝΝΗΣ ΧΡΙΣΤΙΑΝΙΔΗΣ *Πανεπιστήμιο Αθηνών*
ΑΠΟΣΤΟΛΟΣ ΔΕΜΗΣ *Δρ. Πανεπιστημίου Αθηνών*

ΟΙ ΜΕΘΟΔΟΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΥ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΗ

Ο Ευκλείδης (ήκμασε περί το 300 π.Χ.) και ο Αρχιμήδης (περ. 287–212 π.Χ.) είναι οι δύο πιο αναγνωρίσιμες μορφές στην ιστορία των Μαθηματικών της Αρχαιότητας. Και οι δύο περιλαμβάνονται στην ομάδα εκείνη των αρχαίων ελλήνων μαθηματικών οι οποίοι με το έργο τους επηρέασαν βαθύτατα τη δημιουργία των νεότερων Μαθηματικών, κατά την περίοδο από την Αναγέννηση έως τα μέσα του 17ου αιώνα.[1] Η χρονική και η τοπική εγγύτητα που συνδέει τους βίους των δύο μαθηματικών –ο Αρχιμήδης επικοινωνούσε συχνά με τους μαθηματικούς της Αλεξάνδρειας, όπου είχε εργαστεί ο Ευκλείδης– θα μπορούσε, ίσως, να οδηγήσει κάποιον στο συμπέρασμα ότι το επιστημονικό έργο τους ήταν τελείως ανάλογο, όσον αφορά στο εύρος και στο περιεχόμενο, και ότι ο Αρχιμήδης εργάστηκε, τουλάχιστον ως έναν βαθμό, στο πλαίσιο του ερευνητικού προγράμματος που είχε θέσει ο Ευκλείδης λίγες δεκαετίες νωρίτερα. Το συμπέρασμα αυτό, όμως, απέχει αρκετά από την αλήθεια. Πιο ειδικά, όσον αφορά στα Μαθηματικά, από τη μελέτη του έργου των δύο ανδρών προκύπτει ότι ο Ευκλείδης και ο Αρχιμήδης εργάστηκαν στο πλαίσιο δύο μαθηματικών παραδόσεων οι οποίες, αν και δεν είναι ξένες μεταξύ τους, είναι ωστόσο διακριτές, αμφότερες δε έλκουν την καταγωγή τους στην περίοδο των κλασικών ελληνικών Μαθηματικών.

---

1. Άλλοι αρχαίοι έλληνες μαθηματικοί που με το έργο τους συνέβαλαν σημαντικά στη δημιουργία των νεότερων Μαθηματικών ήσαν ο Απολλώνιος ο Περγαίος (περ. 262–180 π.Χ.), ο Διόφαντος (3ος/4ος αι. μ.Χ.) και ο Πάππος ο Αλεξανδρεύς (ήκμασε περί το 320 μ.Χ.).

Η μία ήταν η παράδοση της «στοιχειώσεως» των Μαθηματικών. Πρόκειται για μία παράδοση η οποία ήταν προσανατολισμένη κυρίως στην επεξεργασία της λογικής δομής του μαθηματικού επιχειρήματος, στην εξασφάλιση αυστηρότητας και απλότητας των μαθηματικών αποδείξεων και, εν τέλει, στη διάταξη και συστηματοποίηση της δομής του μαθηματικού οικοδομήματος. Η παράδοση αυτή έχει τις ρίζες της στο έργο του Ιπποκράτη του Χίου (ήκμασε περί το 435 π.Χ.) και γνώρισε τη μεγαλύτερη άνθηση τον 4ο π.Χ. αιώνα στους κόλπους της Πλατωνικής Ακαδημίας, όπου μαθηματικοί και φιλόσοφοι εργάστηκαν από κοινού προκειμένου να διαμορφωθεί μία «Στοιχείωσις» των Μαθηματικών που θα συγκέντρωνε τη συναίνεση της μαθηματικής κοινότητας.[2] Ο Ευκλείδης υπήρξε ο κύριος εκπρόσωπος αυτής της παράδοσης και τα *Στοιχεία* του αποτελούν το επιστέγασμα των ερευνών που αναπτύχθηκαν σε αυτό το πεδίο.

Πλάι στην παράδοση της «στοιχειώσεως» αναπτύχθηκε στους κόλπους των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών, κατά την ίδια πάνω κάτω περίοδο, μία δεύτερη παράδοση, η οποία θα μπορούσε να ονομαστεί «μετρική». Χωρίς να είναι ξένη προς την προαναφερθείσα, η μετρική παράδοση ήταν προσανατολισμένη κυρίως στη μέτρηση των γεωμετρικών σχημάτων, δηλαδή στην ανάπτυξη τεχνικών για την εύρεση των τύπων, όπως θα λέγαμε σήμερα, που δίδουν το εμβαδόν ή τον όγκο σχημάτων δύο ή τριών διαστάσεων και στην επεξεργασία επιχειρημάτων για τη δικαιολόγηση / απόδειξη αυτών των «τύπων». Η μετρική παράδοση αναπτύχθηκε από τον Εύδοξο (390–337 π.Χ. ή 408–355

2. Οι συγγραφές «Στοιχείων» της γεωμετρίας που παρατηρούνται κατά την περίοδο αυτή, αρχικώς από τον Ιπποκράτη τον Χίο, στη συνέχεια από τον Λέοντα και τον Θεύδιο και, τελικώς, από τον Ευκλείδη, εντάσσονται στο πρόγραμμα της «στοιχειώσεως» των Μαθηματικών που αναπτύχθηκε στο πλαίσιο αυτής της παράδοσης.

π.Χ.), αν και οι απαρχές της μπορούν να ανιχνευθούν παλαιότερα, στο δεύτερο μισό του 5ου αιώνα, στο έργο του Δημοκρίτου. Ωστόσο, η πλήρης καρποφορία αυτής της παράδοσης έλαβε χώρα τον 3ο π.Χ. αιώνα, με το έργο του Αρχιμήδη.[3]

3. Σε μια παρόμοια εκτίμηση όσον αφορά τις διαφορές των μαθηματικών εγχειρημάτων του Ευκλείδη και του Αρχιμήδη έχει καταλήξει ο W. R. Knorr σε μία μελέτη του, από την οποία παραθέτουμε ένα ενδιαφέρον απόσπασμα: «Ο Αρχιμήδης γεννήθηκε περίπου τον καιρό που πέθανε ο Ευκλείδης, κατά τη δεύτερη δεκαετία του 3ου π.Χ. αιώνα. Θα μπορούσε να υποθέσει κανείς ότι το έργο του Ευκλείδη άσκησε καθοριστική επιρροή στη διαμόρφωση του Αρχιμήδη ως γεωμέτρη και ότι ο Αρχιμήδης θα καταπιανόταν και θα ανέπτυσσε το πεδίο των μελετών που άνοιξε ο Ευκλείδης. Αλλά δεν συνέβη αυτό. Κάποιες λεπτομέρειες που σχετίζονται με τις πρώιμες μελέτες του Αρχιμήδη και με την τεχνική του των αναλογιών φανερώνουν ότι ο Αρχιμήδης συνδέεται με μία παράδοση εναλλακτική των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, η οποία χωρίς αμφιβολία βρίσκεται κοντύτερα στις αυθεντικές μελέτες του Ευδόξου. Στο πεδίο της μηχανικής, που προσήλκυσε τόσο πολύ το ενδιαφέρον του, ο Αρχιμήδης δεν μπορούσε να βρει τίποτα στο έργο του Ευκλείδη για να βασιστεί. Ακόμα ... το πεδίο στο οποίο έκανε πρόοδο ο Ευκλείδης, δηλαδή η εφαρμογή της μεθόδου της ανάλυσης στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων, προσήλκυσε σχετικά λίγο το ενδιαφέρον του Αρχιμήδη. Αυτή η διαφοροποίηση προκαλεί εντύπωση αλλά δεν αποτελεί μεγάλη έκπληξη. Ο πατέρας του Αρχιμήδη ήταν αστρονόμος, άρα είχε επαρκή γνώση των γεωμετρικών μεθόδων του Ευδόξου και ήταν ικανός να διδάξει στον γιο του τις παλαιότερες γεωμετρικές πραγματείες. Επιπλέον, η απόσταση των Συρακουσών από την Αλεξάνδρεια θα μπορούσε να συντηρήσει τις διαφορές στα ερευνητικά ενδιαφέροντα. Φαίνεται λοιπόν ότι ο Αρχιμήδης βρισκόταν τόσο κοντά όσον αφορά τον χρόνο αλλά τόσο μακριά όσον αφορά την απόσταση για να δελεαστεί από τη γοητεία του είδους της γεωμετρίας που ανέπτυξε ο Ευκλείδης.» (Knorr 1993, 151–152) Το συμπέρασμα στο οποίο καταλήγει ο Knorr, όσον αφορά τις σχέσεις του ερευνητικού προγράμματος του Αρχιμήδη με το αντίστοιχο εγχείρημα του Ευδόξου, είναι ότι «οι τεχνικές και τα ενδιαφέροντα της γεωμετρίας του Ευδόξου διαπερνούν ολόκληρο το σύνταγμα των σωζόμενων στην ελληνική γλώσσα έργων του Αρχιμήδη και ουσιαστικά προσδιορίζουν

Ο Αρχιμήδης, λοιπόν, είναι ο κατ' εξοχήν εκπρόσωπος της μετρικής παράδοσης των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών. Ένα σημαντικό μέρος του έργου του αφορά στον τετραγωνισμό και τον κυβισμό, δηλαδή στην εύρεση του εμβαδού και του όγκου διαφόρων γεωμετρικών σχημάτων, στα οποία περιλαμβάνονται η σφαίρα και τα στερεά που σχηματίζονται από την περιστροφή κωνικών τομών (σφαιροειδή και κωνοειδή, κατά την ορολογία του Αρχιμήδη). Αυτό είναι το αντικείμενο μερικών από τις πιο σημαντικές πραγματείες του. Πράγματι, στις περισσότερες από τις πραγματείες του Αρχιμήδη που σώζονται στην ελληνική γλώσσα εξετάζονται θέματα τετραγωνισμού και κυβισμού. Οι πραγματείες αυτές θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν, κατ' αναλογία προς την παράδοση στην οποία ανήκουν, «μετρικές», και είναι οι ακόλουθες: *Κύκλου μέτρησις*, *Τετραγωνισμός ὀρθογωνίου κώνου τομῆς*, *Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου*, *Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων*, *Περί ἑλίκων* και *Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένη ἔφοδος*. Συναφής προς τα ανωτέρω έργα είναι επίσης η πραγματεία *Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν ἢ κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων*, διότι, μολονότι τυπικά ανήκει στις φυσικές πραγματείες του Αρχιμήδη, σε αυτήν μελετώνται ο νόμος ισορροπίας του ζυγού και μία σειρά θεωρήματα για το κέντρο βάρους διαφόρων επίπεδων σχημάτων τα οποία χρησιμοποιούνται ευρύτατα σε «μετρικές» πραγματείες, συγκεκριμένα στις πραγματείες *Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένη ἔφοδος* και *Τετραγωνισμός ὀρθογωνίου κώνου τομῆς*.

Από τα έργα του Αρχιμήδη που σώζονται στην ελληνική γλώσσα, μόνον ο *Ψαμμίτης*, το *Ὀχουμένων* και το *Βοεικὸν πρόβλημα* δεν σχετίζονται με τη θεματική του τετραγωνισμού και του κυβισμού, ενώ αβέβαιη εξακολουθεί να παραμένει, παρά τις πρόσφατες εξελίξεις, η θεματική της πραγματείας *Στομάχιον*.

πλήρως το αντικείμενό τους.» (Knorr 1993, 152)

Αξίζει να παρατηρήσουμε πάντως ότι ακόμη και μερικά από αυτά τα έργα πραγματεύονται υπό μία έννοια θέματα μέτρησης. Έτσι, στον *Ψαμμίτη* γίνεται λόγος για τον όγκο της άμμου που θα μπορούσε να γεμίσει ολόκληρο τον κόσμο, το *Βοεικὸν πρόβλημα* αφορά τον υπολογισμό του πλήθους τεσσάρων συνόλων βοών και αγελάδων που ικανοποιούν κάποιες συνθήκες, ενώ το *Στομάχιον*, σύμφωνα τουλάχιστον με την ερμηνεία που εκτέθηκε προηγουμένως στην παρούσα έκδοση, πραγματεύεται το συνδυαστικό πρόβλημα του πλήθους των λύσεων που επιδέχεται το πρόβλημα της σύνθεσης ενός τετραγώνου από τα δέκα τέσσερα τμήματα μιας αρχικής διαμέρισης αυτού. (Netz, Acerbi, Wilson 2005· βλ. παραπάνω, σ. 93–154)

Από όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως προκύπτει αυτό που ήδη μνημονεύσαμε, ότι δηλαδή το μαθηματικό έργο του Αρχιμήδη εντάσσεται στη μετρική παράδοση των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών και ότι ο Αρχιμήδης είναι ο κύριος εκπρόσωπος της παράδοσης αυτής. Το συμπέρασμα αυτό δεν είναι άλλωστε καινούργιο. Αποτελεί σήμερα κοινό τόπο στην ιστορία των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών η θέση ότι ο Αρχιμήδης προσοικειώθηκε τις απειροστικές μεθόδους του Ευδόξου, τις εκλέπτυνε και τις ανέπτυξε ακόμα περισσότερο, και τις εφάρμοσε με μεγάλη επιδεξιότητα σε πλήθος περιπτώσεων τετραγωνισμού και κυβισμού γεωμετρικών σχημάτων.[4]

Από το πλήθος, τώρα, των τετραγωνισμών που περιέχουν τα έργα του Αρχιμήδη υπάρχουν δύο περιπτώσεις που προκαλούν ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Η μία είναι ο τετραγωνισμός του παραβολικού χωρίου, του τμήματος δηλαδή που περιέχεται από το τόξο μίας παραβολής και τη χορδή που ορίζεται από τα άκρα αυτού του τόξου. Το ενδιαφέρον για τον εν λόγω τετραγωνισμό έγκει-

4. Η καλύτερη επισκόπηση του όλου έργου του Αρχιμήδη εξακολουθεί ακόμα και σήμερα να είναι το (Dijksterhuis 1987).

ται στο γεγονός ότι ο Αρχιμήδης ασχολείται με αυτόν τρεις φορές, σε δύο διαφορετικά συγγράμματά του: στον *Τετραγωνισμὸ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς* και στο *Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένη ἔφοδος*. Μάλιστα, το πρώτο από τα δύο αυτά συγγράμματα είναι αφιερωμένο αποκλειστικά στο θέμα του τετραγωνισμού του παραβολικού χωρίου, το οποίο ο Αρχιμήδης το πραγματεύεται με δύο διαφορετικούς τρόπους (έναν μηχανικό και έναν γεωμετρικό), ενώ στο δεύτερο σύγγραμμα ο τετραγωνισμός του παραβολικού χωρίου παρουσιάζεται ως ένα παράδειγμα εφαρμογής της ευρετικής μεθόδου που είχε επινοήσει ο Αρχιμήδης προκειμένου να βρίσκει εμβαδά και όγκους γεωμετρικών σχημάτων, ανεξαρτήτως της τυπικής, αυστηρής απόδειξης των συμπερασμάτων στα οποία κατέληγε. Η δεύτερη περίπτωση εμφανίζεται στην εργασία *Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένη ἔφοδος*. Συγκεκριμένα, στις Προτάσεις 12–15 της εργασίας αυτής ο Αρχιμήδης πραγματεύεται το ίδιο πρόβλημα του κυβισμού ενός κυλινδρικού τμήματος τρεις φορές, με τρεις διαφορετικούς τρόπους.[5] Έτσι, στις Προτάσεις 12–13 πραγματεύεται το πρόβλημα με μηχανικό τρόπο, στην Πρόταση 14 με τη χρήση «αδιαιρέτων» (που, όπως θα δούμε, αποτελεί ουσιαστικό γνώρισμα της ευρετικής μεθόδου του) και στην Πρόταση 15 με γεωμετρικό τρόπο.[6] (Saito 2006, 36 n. 3) Πρέπει πάντως να σημειώσουμε στο σημείο αυτό ότι ο χωρισμός του συγκεκριμένου κειμένου του Αρχιμήδη σε ξεχωριστές προτάσεις και η αρίθμησή τους οφείλεται στον σύγχρονο εκδότη του

5. Στην αγγλόφωνη βιβλιογραφία το στερεό αυτό σχήμα ονομάζεται «hoof», επειδή μοιάζει με την οπλή του αλόγου.

6. Οι προσδιορισμοί «μηχανικός», «γεωμετρικός», «ευρετικός» που χρησιμοποιήσαμε για να χαρακτηρίσουμε τους τρόπους με τους οποίους ο Αρχιμήδης πραγματεύεται το ένα ή το άλλο από τα δύο προβλήματα θα γίνουν κατανοητοί στη συνέχεια της εργασίας.

έργου Johann Ludwig Heiberg (1854–1928), και δεν εμφανίζεται στον παλίμψηστο κώδικα που περιέχει την εργασία του Αρχιμήδη. (Netz, Saito, Tchernetska 2001, 11 n. 5· βλ. παραπάνω σ. 15, υποσημ. 6)

Όπως είναι φανερό, η ύπαρξη πολλαπλών τρόπων χειρισμού αυτών των δύο προβλημάτων μέσα στα έργα του Αρχιμήδη, ακόμα δε και μέσα στο ίδιο έργο, γεννά μία σειρά ιστοριογραφικά ερωτήματα σχετικά με το περιεχόμενο, τον ρόλο και το κύρος που ο συρακούσιος μαθηματικός απέδιδε στις διάφορες μεθόδους τετραγωνισμού / κυβισμού που χρησιμοποιούσε. Στη συνέχεια αυτής της εργασίας θα χρησιμοποιήσουμε το παράδειγμα των τριών τρόπων με τους οποίους ο Αρχιμήδης πραγματεύεται το πρόβλημα του τετραγωνισμού του παραβολικού χωρίου προκειμένου, μέσω αυτού, να διερευνήσουμε τέτοιου είδους ερωτήματα που έχει αναδείξει η ιστοριογραφική έρευνα. Προηγουμένως, όμως, είναι χρήσιμο να αναφέρουμε μερικά στοιχεία σχετικά με τα δύο έργα, τον *Τετραγωνισμὸ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς* και το *Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένη ἔφοδος*, στα οποία ο Αρχιμήδης μελετά τον τετραγωνισμό του παραβολικού χωρίου. Χάριν συντομίας, τα δύο αυτά έργα θα τα ονομάζουμε εφεξής *Τετραγωνισμός παραβολής* και *Μέθοδος* αντίστοιχα.

Τα δύο συγγράμματα διαφέρουν μεταξύ τους κατ' αρχάς από την άποψη της μορφής και του ρόλου τους. Ο *Τετραγωνισμός παραβολής* έχει τη μορφή μιας επίσημης δημοσίευσης. Γράφτηκε από τον Αρχιμήδη προκειμένου να εκδοθεί, όπως θα λέγαμε, σαν ένα κανονικό βιβλίο, το οποίο απευθύνεται στο αναγνωστικό κοινό. Αντίθετα, η *Μέθοδος* έχει τη μορφή ενός κειμένου το οποίο φαίνεται σαν να έχει εξαχθεί από το προσωπικό αρχείο του Αρχιμήδη· επισυνάπτεται σε μία επιστολή προς τον Ερατοσθένη και απευθύνεται, στην καλύτερη περίπτωση, σε έναν στενό κύκλο μαθηματικών του περιβάλλοντος του Ερατοσθένη. Το έργο αυτό έχει μια πολύ πιο προσωπική χροιά. Μοιάζει μάλλον με μια επεξεργασμένη εκδοχή των σημειώσεων που κρατά ένας ερευνητής κατά τη διάρκεια της ερευνητικής εργασίας του.[7] Επαναλαμβάνοντας μια έκφραση του Dijksterhuis, μπορούμε να πούμε ότι με το έργο αυτό ο Αρχιμήδης μας επιτρέπει να ρίξουμε μια ματιά στα ενδότερα του μαθηματικού σπουδαστηρίου του. (Dijksterhuis 1987, 315) Τα δύο έργα, λοιπόν, παρουσιάζουν ουσιαστική διαφορά μεταξύ τους όσον αφορά το τυπικό επίπεδο και τον σκοπό τους.

Το δεύτερο στοιχείο που πρέπει να σημειώσουμε είναι ότι ο *Τετραγωνισμός παραβολής* προηγείται, όσον αφορά τη σειρά συγγραφής, της *Μεθόδου*. Αυτό απορρέει αμέσως από μία αποστροφή του Αρχιμήδη στην επιστολή προς τον Ερατοσθένη, όπου γράφει: «Θέλησα λοιπόν να καταγράψω τη μέθοδο, παρακινηθείς σε τούτο αφενός διότι έχω μιλήσει στο παρελθόν γι' αυτό, ούτως ώστε να μην φανούμε σε μερικούς ότι λέμε κενά λόγια, και αφετέρου διότι είμαι πεπεισμένος ότι αυτό θα αποδειχθεί πολύ χρήσιμο για τα Μαθηματικά». (Αρχιμήδης 1970–1974, Β, 388.8–12) Λέγοντας ότι έχει μιλήσει στο παρελθόν περί αυ-

7. Μια πρόσθετη ένδειξη για αυτό είναι το γεγονός ότι στην εκφώνηση της πρώτης πρότασης εμφανίζονται γράμματα για να ονομάσουν σημεία και γραμμές. Στις επίσημες πραγματείες των αρχαίων ελλήνων μαθηματικών τα στάδια της επίλυσης ενός προβλήματος είναι κατά σειρά τα εξής: πρότασις, ἔκθεσις, διορισμός, κατασκευή, ἀπόδειξις, συμπέρασμα. Η απόδοση ονομάτων, δηλαδή η εισαγωγή των γραμμάτων, γίνεται πάντοτε στο στάδιο της έκθεσης, ουδέποτε στο στάδιο της πρότασης, η οποία πρέπει να έχει τη μορφή γενικής διατύπωσης. Από το γεγονός ότι ο Αρχιμήδης στην πρώτη πρόταση της *Μεθόδου* παραλείπει ουσιαστικά το στάδιο της πρότασης και αρχίζει τη μελέτη του από το στάδιο της έκθεσης προκύπτει και πάλι, όπως παρατηρεί ο Dijksterhuis, ότι «η *Μέθοδος* πρέπει να θεωρηθεί ως μια ιδιωτική κοινοποίηση στον Ερατοσθένη και όχι ως πραγματεία που προοριζόταν για δημοσίευση.» (Dijksterhuis 1987, 316 n. 2)

τού ο Αρχιμήδης παραπέμπει ουσιαστικά σε μία φράση από την εισαγωγή της πραγματείας *Τετραγωνισμός παραβολής* –εισαγωγή η οποία είχε τη μορφή επιστολής αφιέρωσης με παραλήπτη, αυτήν τη φορά, τον Δοσίθεο[8] – όπου ανέφερε ότι το θεώρημα για το εμβαδόν του παραβολικού χωρίου πρώτα το βρήκε δια της μηχανικής μεθόδου και κατόπιν το απέδειξε γεωμετρικώς. (Αρχιμήδης 1970–1974, Β, 218.11–13) Από την παραβολή των δύο αποσπασμάτων προκύπτει ότι ο Αρχιμήδης πρώτα έγραψε τον *Τετραγωνισμό παραβολής* και αργότερα τη *Μέθοδο*. Το ίδιο συμπέρασμα προκύπτει επίσης από την ακροτελεύτια φράση της πρώτης πρότασης της *Μεθόδου*, όπου, αφού έχει εκθέσει πώς βρήκε δια της μηχανικής μεθόδου ότι το παραβολικό χωρίο είναι τα $4/3$ του τριγώνου που έχει την ίδια βάση και ύψος ίσο, ο Αρχιμήδης προσθέτει: «Αυτό όμως δεν έχει αποδειχθεί με όσα ελέχθησαν προηγουμένως· έχει δημιουργηθεί μόνο κάποια πεποίθηση ότι το συμπέρασμα είναι αληθές. Επειδή λοιπόν βλέπουμε ότι το συμπέρασμα δεν είναι αποδεδειγμένο, αλλά υποθέτουμε ότι είναι αληθές, πρέπει να παραθέσουμε τη γεωμετρική απόδειξη[9], την οποία βρήκαμε εμείς οι ίδιοι και έχουμε δημοσιεύσει προηγουμένως.» (Αρχιμήδης 1970–1974, Β, 396.5–10) Και σε αυτό το χωρίο ο Αρχιμήδης παραπέμπει στην πραγματεία *Τετραγωνισμός παραβολής*, γεγονός από το οποίο συνάγεται ότι η συγγραφή της πραγματείας αυτής προηγείται χρονικά της συγγραφής της *Μεθόδου*.

8. Για τον Δοσίθεο και την αλληλογραφία του Αρχιμήδη με αυτόν βλ. (Netz 1998).

9. Το κείμενο αναφέρει «τάξομεν τὴν γεωμετρουμένην ἀπόδειξιν». Βασιζόμενος στη φράση αυτή ο Dijksterhuis έχει διατυπώσει την υπόθεση ότι ο Αρχιμήδης είχε την πρόθεση να συμπεριλάβει στο τέλος της *Μεθόδου* (που δεν έχει διασωθεί) τις αυστηρές αποδείξεις των θεωρημάτων που στις πρώτες προτάσεις του έργου εκτίθενται όπως τις ανακάλυψε με την ευρετική του μέθοδο. (Dijksterhuis 1987, 318)

Βέβαια, η σειρά συγγραφής των δύο έργων δεν συμπίπτει με τη σειρά με την οποία ο Αρχιμήδης συνέλαβε όσα περιέχονται σε αυτά. Αντίθετα, η ανακάλυψη ενός θεωρήματος προηγείται πάντοτε της τυπικής, αυστηρής απόδειξής του. Το πρόβλημα της κατάταξης των έργων του Αρχιμήδη αφενός με βάση το κριτήριο της σειράς συγγραφής τους και αφετέρου με βάση το κριτήριο της σειράς την οποία καταλαμβάνουν στην ερευνητική «ατζέντα» του Αρχιμήδη είναι ένα δυσεπίλυτο πρόβλημα, το οποίο εξακολουθεί ακόμα και σήμερα να απασχολεί τους ιστορικούς των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών. (Knorr 1978· Vitrac 1992)

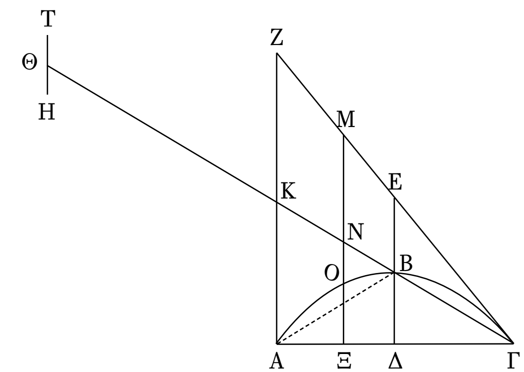
Μετά από αυτές τις γενικότερες παρατηρήσεις για τα δύο έργα που μας ενδιαφέρουν, θα προχωρήσουμε στην παρουσίαση των τριών τρόπων με τους οποίους ο Αρχιμήδης πραγματεύεται το πρόβλημα του τετραγωνισμού του παραβολικού χωρίου, προκειμένου κατόπιν να προβούμε σε μερικές παρατηρήσεις σχετικά με μερικά ιστοριογραφικά ερωτήματα που εγείρονται από αυτούς.

1. *Τετραγωνισμός παραβολικού χωρίου: ευρετική προσέγγιση*

Παράφραση της Πρότασης 1 του *Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένη ἔφοδος*. (Αρχιμήδης 1970–1974, Β, 392.9 – 396.10)

Έστω το παραβολικό χωρίο ΑΒΓ που ορίζεται από το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ και το τμήμα μιας παραβολής που διέρχεται από τα Α και Γ. Φέρουμε τις ΑΒ, ΒΓ και έστω ΒΔ η διάμετρος της παραβολής. Το παραβολικό χωρίο ΑΒΓ είναι κατά ένα τρίτο μεγαλύτερο του τριγώνου ΑΒΓ, ήτοι:

$$(\text{παραβολικό χωρίο ΑΒΓ}) = \tfrac{4}{3}\ (\text{τρίγωνο ΑΒΓ}).$$



Στο ανωτέρω σχήμα η ΓΖ είναι εφαπτομένη στο σημείο Γ της παραβολής, η ΑΖ είναι παράλληλη προς τη διάμετρο ΒΔ και ΚΘ = ΓΚ (Γ, Κ και Θ είναι συνευθειακά). Έστω Ο τυχαίο σημείο της παραβολής. Από το Ο φέρουμε την ευθεία ΜΝΟΞ παράλληλη προς τη διάμετρο της παραβολής. Στην πραγματεία *Τετραγωνισμός παραβολής* (Θεώρημα 5) έχει αποδειχθεί ότι ο λόγος κατά τον οποίο το σημείο Ο χωρίζει τη ΜΞ είναι ίδιος με τον λόγο κατά τον οποίο το σημείο Ξ χωρίζει την ΑΓ. Δηλαδή ΟΞ : ΟΜ :: ΑΞ : ΞΓ. Από την αναλογία αυτή συνεπάγεται ότι ΟΞ : ΜΞ :: ΑΞ : ΑΓ, και τελικώς, λόγω των παραλλήλων και της ισότητας των ΚΓ και ΚΘ, προκύπτει η θεμελιώδης αναλογία

$$\text{ΟΞ} : \text{ΜΞ} :: \text{ΚΝ} : \text{ΚΘ}.$$

Στο σημείο αυτό εγκαταλείπουμε, ούτως ειπείν, προσωρινά τη γεωμετρία και μεταφερόμαστε στο πεδίο της μηχανικής, θεωρώντας την ευθεία ΘΓ ως φάλαγγα ενός ιδεατού ζυγού ο οποίος στηρίζεται στο σημείο Κ. Η θεμελιώδης αναλογία, αν ερμηνευθεί στο πλαίσιο της μηχανικής (στατικής), δηλώνει ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΜΞ ισορροπεί με το ευθύγραμμο τμήμα ΟΞ, εάν το τελευταίο μεταφερθεί στη θέση που καταλαμβάνει στο σχήμα το ΤΗ. Πράγματι, η θεμελιώδης αναλογία τότε γράφεται

ΤΗ : ΜΞ :: ΚΝ : ΚΘ,

από όπου συνεπάγεται ότι τα μεγέθη ΤΗ και ΜΞ είναι αντιστρόφως ανάλογα προς τις αποστάσεις τους από το Κ και επομένως ισορροπούν βάσει της αρχής ισορροπίας του ζυγού.

Όμως το Ο είναι τυχαίο σημείο της παραβολής. Άρα τα ΟΞ και ΜΞ είναι τυχαία ευθύγραμμα τμήματα αντιστοίχως του παραβολικού χωρίου και του τριγώνου ΑΓΖ, αμφότερα με διεύθυνση παράλληλη προς τη διάμετρο της παραβολής. Επομένως, εάν τοποθετήσουμε όλα τα ΟΞ (δηλαδή το παραβολικό χωρίο στην ολότητά του) στο σημείο Θ, θα ισορροπούν προς όλα τα ΜΞ (δηλαδή προς το τρίγωνο ΑΓΖ τοποθετημένο στη θέση που βρίσκεται).

Αν Χ είναι σημείο της ΚΓ τέτοιο ώστε ΚΧ = $\frac{1}{3}$ ΚΓ, τότε το Χ είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΓΖ και επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το τρίγωνο ισορροπεί αναρτημένο από το σημείο Χ. Από την ισορροπία του παραβολικού χωρίου προς το τρίγωνο προκύπτει η αναλογία

(παραβολικό χωρίο ΑΒΓ) : (τρίγωνο ΑΓΖ) :: ΚΧ : ΘΚ

και επειδή ΚΧ = $\frac{1}{3}$ ΘΚ

(παραβολικό χωρίο ΑΒΓ) = $\frac{1}{3}$ (τρίγωνο ΑΓΖ).

Στο σημείο αυτό επιστρέφουμε στο πεδίο της γεωμετρίας και, επειδή το τρίγωνο ΑΓΖ είναι τετραπλάσιο του τριγώνου ΑΒΓ, συμπεραίνουμε ότι

(παραβολικό χωρίο ΑΒΓ) = $\frac{4}{3}$ (τρίγωνο ΑΒΓ).

2. *Τετραγωνισμός παραβολικού χωρίου: μηχανική προσέγγιση*

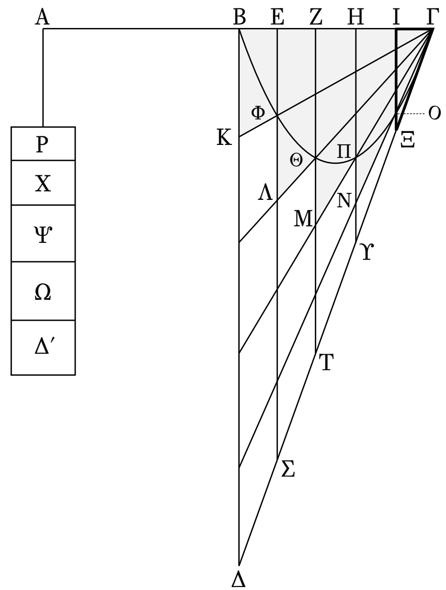
Παράφραση των Προτάσεων 14 & 16 του *Τετραγωνισμός ὀρθογωνίου κώνου τομῆς*. (Αρχιμήδης 1970–1974, Β, 236.23 – 240.26 και 244.19 – 248.13)

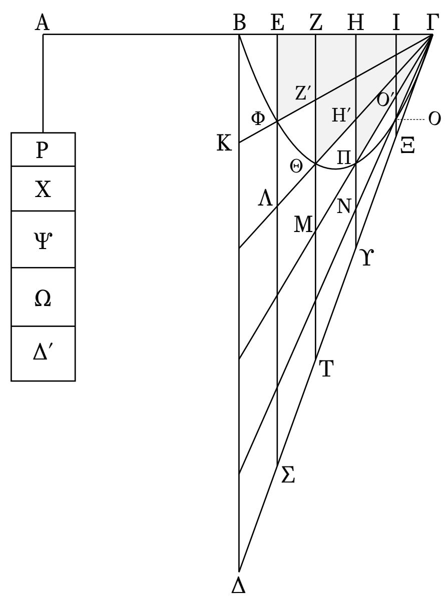
Έστω το παραβολικό χωρίο ΒΓΘ το οποίο ορίζεται από το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ και το τμήμα μιας παραβολής που διέρχεται από τα σημεία Β και Γ, όπου το ΒΓ είναι κάθετο στη διάμετρο της παραβολής. Στα παρακάτω διαγράμματα[10] η ΓΔ είναι εφαπτομένη στο σημείο Γ της παραβολής και η ΒΔ είναι παράλληλη προς τη διάμετρο. Διαιρούμε τη ΒΓ σε ίσα μέρη, έστω τα ΒΕ = ΕΖ = ΖΗ = ΗΙ = ΙΓ, ο αριθμός n των οποίων πρέπει να προσδιοριστεί. (Στο σχήμα έχουμε επιλέξει $n = 5$.) Από τα σημεία διαίρεσης της ΒΓ φέρουμε παράλληλες προς τη διάμετρο και ενώνουμε τα σημεία στα οποία αυτές οι παράλληλοι τέμνουν την παραβολή με το άκρο Γ. Αποδεικνύεται ότι τα ευθύγραμμα τμήματα στα οποία αυτές οι τελευταίες ευθείες διαιρούν τη ΒΔ είναι ίσα μεταξύ τους.[11] Τότε, το τρίγωνο ΒΔΓ είναι μικρότερο του τριπλασίου του αθροίσματος των τραπεζίων (ΚΕ), (ΛΖ), (ΜΗ), (ΝΙ) και του τριγώνου ΞΙΓ και μεγαλύτερο του τριπλασίου του αθροίσματος των τραπεζίων (ΦΖ), (ΘΗ), (ΠΙ) και του τριγώνου ΙΟΓ, ήτοι:

(ΦΖ) + (ΘΗ) + (ΠΙ) + (ΙΟΓ) < $\frac{1}{3}$ (ΒΔΓ) < (ΚΕ) + (ΛΖ) + (ΜΗ) + (ΝΙ) + (ΞΙΓ).

10. Τα διαγράμματα έχει σχεδιάσει ο Δρ. Απόστολος Δέμης.

11. Ισχύει και το αντίστροφο. Ο χωρισμός δηλαδή της ΒΔ σε ίσα τμήματα συνεπάγεται τον χωρισμό και της ΒΓ σε ίσα τμήματα.





Η ανωτέρω ανισότητα αποδεικνύεται στην Πρόταση 14 (και γενικεύεται στην Πρόταση 15). Στη συνέχεια (Πρόταση 16) αποδεικνύεται, με τον οικείο στον Αρχιμήδη τρόπο της διπλής εις άτοπον απαγωγής, ότι: (παραβολικό χωρίο ΒΘΓ) = $\frac{1}{3}$ (ΒΔΓ).

Έστω σημείο Α στην προέκταση της ΒΓ τέτοιο ώστε ΑΒ = ΒΓ. Θεωρούμε, όπως στην περίπτωση που εξετάσαμε προηγουμένως, την ΑΓ ως ζυγό, ο οποίος στηρίζεται στο μέσον Β του ΑΓ. Στον βραχίονα ΒΓ αναρτούμε το τρίγωνο ΒΔΓ και στο σημείο Α αναρτούμε τα χωρία Ρ, Χ, Ψ, Ω, Δ′ ώστε να ισορροπούν αντιστοίχως με τα τραπέζια (ΔΕ), (ΣΖ), (ΤΗ), (ΥΙ) και το τρίγωνο ΞΙΓ ως έχουν. Τότε ο ζυγός θα ισορροπεί και λόγω της ισορροπίας θα ισχύει:

$$(\text{ΒΔΓ}) = 3[(\text{Ρ}) + (\text{Χ}) + (\text{Ψ}) + (\text{Ω}) + (\text{Δ}')].$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τη θεμελιώδη αναλογία ΒΓ : ΒΕ :: ΣΕ : ΕΦ, μπορούμε εύκολα να συναγάγουμε ότι, ΒΑ : ΒΕ :: (ΔΕ) : (ΚΕ). Πράγματι, ΔΒ : ΣΕ :: ΚΒ : ΦΕ, εναλλάξ ΔΒ : ΚΒ :: ΣΕ : ΦΕ, και προσθέτοντας ΣΕ : ΦΕ :: (ΔΒ + ΣΕ) : (ΚΒ + ΦΕ). Από τον συνδυασμό της τελευταίας με τη θεμελιώδη αναλογία, και λόγω του ότι ΑΒ = ΒΓ, προκύπτει η ζητούμενη αναλογία. Με τον ίδιο τρόπο συνάγονται επίσης οι, ΒΑ : ΒΖ :: (ΣΖ) : (ΛΖ), ΒΑ : ΒΗ :: (ΤΗ) : (ΜΗ) και ΒΑ : ΒΙ :: (ΥΙ) : (ΝΙ).

Επειδή το τραπέζιο (ΔΕ) ισορροπεί με το χωρίο Ρ, ισχύει ΒΑ : BG :: (ΔΕ) : Ρ, όπου G η προβολή του κέντρου βάρους του (ΔΕ) στη ΒΕ. Αλλά το G είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος ΒΕ, επομένως, ΒΑ : BG > ΒΑ : ΒΕ. Άρα, (ΔΕ) : Ρ > (ΔΕ) : (ΚΕ) και επομένως, Ρ < (ΚΕ).

Με παρόμοιους συλλογισμούς μπορούμε να αποδείξουμε επίσης τις διπλές ανισότητες

$$(\text{ΦΖ}) < \text{Χ} < (\text{ΛΖ}),\ (\text{ΘΗ}) < \text{Ψ} < (\text{ΜΗ}),\ (\text{ΠΙ}) < \text{Ω} < (\text{ΝΙ})$$
$$\text{και } (\text{ΓΙΟ}) < \text{Δ}' < (\text{ΞΙΓ}).$$

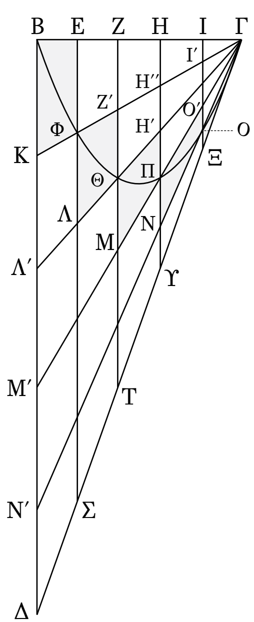
Προσθέτοντας, τώρα, όλες αυτές τις ανισότητες βρίσκουμε,

$$(\Phi\mathrm{Z}) + (\Theta\mathrm{H}) + (\Pi\mathrm{I}) + (\Gamma\mathrm{IO}) < \mathrm{P} + \mathrm{X} + \Psi + \Omega + \Delta' < (\mathrm{KE}) + (\Lambda\mathrm{Z}) + (\mathrm{MH}) + (\mathrm{NI}) + (\Xi\mathrm{I}\Gamma)$$

και επειδή $(\mathrm{B}\Delta\Gamma) = 3[(\mathrm{P}) + (\mathrm{X}) + (\Psi) + (\Omega) + (\Delta')]$,
θα έχουμε τελικώς

$$(\Phi\mathrm{Z}) + (\Theta\mathrm{H}) + (\Pi\mathrm{I}) + (\Gamma\mathrm{IO}) < \tfrac{1}{3}\,(\mathrm{B}\Delta\Gamma) < (\mathrm{KE}) + (\Lambda\mathrm{Z}) + (\mathrm{MH}) + (\mathrm{NI}) + (\Xi\mathrm{I}\Gamma).$$

Στο σημείο αυτό ολοκληρώνεται η Πρόταση 14. Στην Πρόταση 16 αποδεικνύεται ότι το παραβολικό χωρίο ΒΓΘ είναι ίσο με $\tfrac{1}{3}$ (ΒΔΓ). Η απόδειξη είναι καθαρά γεωμετρική και έχει τη μορφή της διπλής εις άτοπο απαγωγής.



Περίπτωση Α: Έστω ότι (παραβολικό χωρίο ΒΘΓ) > $\tfrac{1}{3}$ (ΒΔΓ).

Όσο μικρή κι αν είναι η διαφορά

$$(\text{παραβολικό χωρίο } \mathrm{B}\Theta\Gamma) - \tfrac{1}{3}\,(\mathrm{B}\Delta\Gamma),$$

υπάρχει πολλαπλάσιο αυτής μεγαλύτερο του τριγώνου ΒΔΓ. Αυτό απορρέει από το λεγόμενο «αξίωμα του Αρχιμήδη», το οποίο διατυπώνεται στην προς Δοσίθεον επιστολή ως εξής: «Εκ των άνισων χωρίων η υπεροχή κατά την οποία το μεγαλύτερο υπερέχει του μικρότερου, εάν προστίθεται στον εαυτό της είναι δυνατόν να ξεπεράσει κάθε προκαθορισμένο πεπερασμένο χωρίο.» (Αρχιμήδης 1970–1974, Β, 220.2–5) Με άλλα λόγια, υπάρχει φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε

$$n[(\text{παραβολικό χωρίο } \mathrm{B}\Theta\Gamma) - \tfrac{1}{3}\,(\mathrm{B}\Delta\Gamma)] > (\mathrm{B}\Delta\Gamma).$$

Έστω Κ σημείο της ΒΔ τέτοιο ώστε

$$(\mathrm{BK}\Gamma) = \tfrac{1}{n}\,(\mathrm{B}\Delta\Gamma).$$

Τότε

$$(\mathrm{BK}\Gamma) < (\text{παραβολικό χωρίο } \mathrm{B}\Theta\Gamma) - \tfrac{1}{3}\,(\mathrm{B}\Delta\Gamma).$$

Προφανώς ΒΚ = $\tfrac{1}{n}$ ΒΔ. Επιλέγουμε (n – 2 κατά το πλήθος) σημεία Λ′, Μ′, Ν′ επί της ΒΔ (εμείς έχουμε επιλέξει 3, που αντιστοιχεί σε $n = 5$), εις τρόπο ώστε να είναι ΒΚ = ΚΛ′ = Λ′Μ′ = Μ′Ν′ = Ν′Δ, και φέρουμε τις ευθείες που φαίνονται στο διάγραμμα. Αποδεικνύεται ότι ΒΕ = ΕΖ = ΖΗ = ΗΙ = ΙΓ.

Επειδή (ΒΚΓ) < (παραβολικό χωρίο ΒΘΓ) – $\tfrac{1}{3}$ (ΒΔΓ) θα ισχύει

$$(\mathrm{BK}\Gamma) + \tfrac{1}{3}\,(\mathrm{B}\Delta\Gamma) < (\text{παραβολικό χωρίο } \mathrm{B}\Theta\Gamma).$$

Για τα τραπέζια (ΦΘ), (ΘΠ), (ΠΟ) από τα οποία διέρχεται η παραβολή ισχύουν (ΦΘ) = (ΦΖ), (ΘΠ) = (Ζ′Η), (ΠΟ) = (ΗΙ′), ενώ ισχύει επίσης (ΓΟΞ) = (ΙΓΙ′). Επομένως (ΦΘ) + (ΘΠ) + (ΠΟ) + (ΓΟΞ) = (ΦΖ) + (Ζ′Η) + (ΗΙ′) + (ΙΓΙ′), και αν προσθέσουμε σε αμφότερα τα μέλη το (ΚΕ) θα έχουμε (ΒΚΓ) = (ΚΕ) + (ΦΘ) + (ΘΠ) + (ΠΟ) + (ΓΟΞ).

Όμως (ΒΘΓ) < (ΚΕ) + (ΛΖ) + (ΜΗ) + (ΝΙ) + (ΙΞΓ), άρα (ΒΘΓ) – (ΒΚΓ) < (ΚΕ) + (ΛΖ) + (ΜΗ) + (ΝΙ) + (ΙΞΓ) – (ΒΚΓ). Και επειδή (ΚΕ) + (ΛΖ) + (ΜΗ) + (ΝΙ) + (ΙΞΓ) – (ΒΚΓ) = (ΦΖ) + (ΘΗ) + (ΠΙ) + (ΙΟΓ), θα έχουμε (ΒΘΓ) – (ΒΚΓ) < (ΦΖ) + (ΘΗ) + (ΠΙ) + (ΙΟΓ). Άρα, $\frac{1}{3}$ (ΒΔΓ) < (ΒΘΓ) – (ΒΚΓ) < (ΦΖ) + (ΘΗ) + (ΠΙ) + (ΙΟΓ), δηλαδή

(ΒΔΓ) < 3[(ΦΖ) + (ΘΗ) + (ΠΙ) + (ΙΟΓ)],

το οποίο είναι άτοπο διότι στην Πρόταση 14 αποδείχτηκε ότι (ΒΔΓ) > 3[(ΦΖ) + (ΘΗ) + (ΠΙ) + (ΙΟΓ)].

Περίπτωση Β: Έστω ότι (παραβολικό χωρίο ΒΘΓ) < $\frac{1}{3}$ (ΒΔΓ).

Λόγω του «αξιώματος του Αρχιμήδη» όσο μικρή κι αν είναι η διαφορά

$\frac{1}{3}$ (ΒΔΓ) – (παραβολικό χωρίο ΒΘΓ)

υπάρχει πολλαπλάσιο αυτής μεγαλύτερο του τριγώνου ΒΔΓ. Κατασκευάζουμε το ίδιο διάγραμμα όπως προηγουμένως, με

(ΒΚΓ) < $\frac{1}{3}$ (ΒΔΓ) – (παραβολικό χωρίο ΒΘΓ),
ή
(ΒΚΓ) + (παραβολικό χωρίο ΒΘΓ) < $\frac{1}{3}$ (ΒΔΓ).

Από την Πρόταση 14 γνωρίζουμε ότι (ΒΔΓ) < 3[(ΚΕ) + (ΛΖ) + (ΜΗ) + (ΝΙ) + (ΞΙΓ)] οπότε, κατά μείζονα λόγο, θα ισχύει

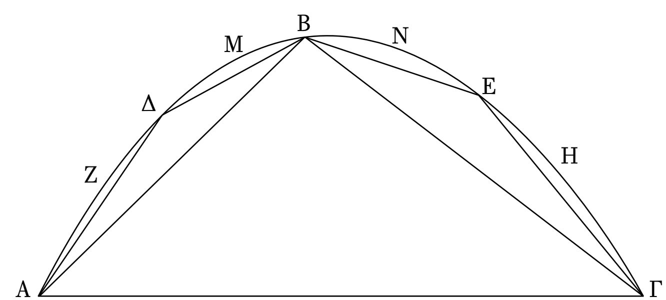
(ΒΚΓ) + (παραβολικό χωρίο ΒΘΓ) < (ΚΕ) + (ΛΖ) + (ΜΗ) + (ΝΙ) + (ΞΙΓ).

Αν αφαιρέσουμε από τα δύο μέλη το κοινό χωρίο (ΒΘΓ) καταλήγουμε σε άτοπο, διότι στο δεύτερο μέλος θα μείνουν χωρία που είναι μικρότερα του αθροίσματος (ΚΕ) + (ΦΖ) + (Ζ′Η) + (ΗΙ′) + (ΙΙ′Γ), και άρα το (ΒΚΓ) θα είναι μικρότερο του αθροίσματος αυτών των χωρίων, ενώ γνωρίζουμε ότι το (ΒΚΓ) είναι ίσο με το άθροισμα αυτών των χωρίων.

3. *Τετραγωνισμός παραβολικού χωρίου: γεωμετρική προσέγγιση*

Παράφραση της Πρότασης 24 του *Τετραγωνισμός ὀρθογωνίου κώνου τομῆς*. (Αρχιμήδης 1970–1974, Β, 260.11 – 264.9)

Έστω το παραβολικό χωρίο ΑΔΒΕΓ, όπου Β η κορυφή της παραβολής. Τότε, (ΑΔΒΕΓ) = $\frac{4}{3}$ (ΑΒΓ). Η απόδειξη έχει τη μορφή της διπλής εις άτοπο απαγωγής.



Περίπτωση Α: Έστω ότι (ΑΔΒΕΓ) > $^4\!/_3$ (ΑΒΓ).

Στα δύο παραβολικά χωρία που απομένουν μετά την αφαίρεση του τριγώνου ΑΒΓ από το ΑΔΒΕΓ εγγράφουμε τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΒΕΓ (Δ, Ε είναι αντιστοίχως οι κορυφές των τμημάτων ΑΒ, ΒΓ της παραβολής). Στα τέσσερα παραβολικά χωρία που σχηματίζονται εγγράφουμε με τον ίδιο τρόπο ισάριθμα νέα τρίγωνα και συνεχίζουμε την εγγραφή, με τον ίδιο τρόπο, μέχρις ότου απομείνουν παραβολικά χωρία μικρότερα της διαφοράς (ΑΔΒΕΓ) – $^4\!/_3$ (ΑΒΓ). Τότε, το άθροισμα των εγγεγραμμένων τριγώνων θα είναι μεγαλύτερο του $^4\!/_3$ (ΑΒΓ). Αυτό όμως είναι άτοπο, διότι αποδεικνύεται ότι τα τρίγωνα που εγγράφονται σε κάθε βήμα είναι το ένα τέταρτο των τριγώνων που εγγράφηκαν στο αμέσως προηγούμενο βήμα και ότι το άθροισμα όλων των εγγεγραμμένων τριγώνων είναι μικρότερο του $^4\!/_3$ (ΑΒΓ) (Πρόταση 23).

Περίπτωση Β: Έστω ότι (ΑΔΒΕΓ) < $^4\!/_3$ (ΑΒΓ).

Εγγράφουμε πάλι τρίγωνα, όπως προηγουμένως, μέχρι το μερικό άθροισμα των τριγώνων του τελευταίου βήματος να γίνει μικρότερο της διαφοράς $^4\!/_3$ (ΑΒΓ) – (ΑΔΒΕΓ). Η διαφορά αυτή είναι, προφανώς, μικρότερη της διαφοράς του αθροίσματος όλων των εγγεγραμμένων τριγώνων από το $^4\!/_3$ (ΑΒΓ). Από την Πρόταση 23, όμως, γνωρίζουμε ότι αυτή η τελευταία διαφορά είναι ίση με το ένα τρίτο του μερικού αθροίσματος των τριγώνων που εγγράφηκαν στο τελευταίο βήμα, και επομένως είναι μικρότερη αυτού του μερικού αθροίσματος. Άρα, το μερικό άθροισμα των εγγεγραμμένων τριγώνων του τελευταίου βήματος είναι μεγαλύτερο της διαφοράς του αθροίσματος όλων των εγγεγραμμένων τριγώνων από το $^4\!/_3$ (ΑΒΓ) και μικρότερο της διαφοράς $^4\!/_3$ (ΑΒΓ) – (ΑΔΒΕΓ). Από αυτήν προκύπτει ότι το παραβολικό χωρίο (ΑΔΒΕΓ) είναι μικρότερο του αθροίσματος των εγγεγραμμένων τριγώνων, το οποίο είναι άτοπο.

Στις σελίδες που προηγήθηκαν παρουσιάσαμε με ελαφρώς απλουστευμένη μορφή, που ωστόσο δεν αλλοιώνει τα επιχειρήματα που χρησιμοποιεί στις προτάσεις του ο Αρχιμήδης, τους τρεις τρόπους με τους οποίους ο συρακούσιος μαθηματικός πραγματεύεται το πρόβλημα του τετραγωνισμού του παραβολικού χωρίου. Χαρακτηρίσαμε, μάλιστα, τις τρεις προσεγγίσεις ευρετική, μηχανική και γεωμετρική, προλαμβάνοντας τρόπον τινά τη συζήτηση που θα ακολουθήσει σε αυτή τη μελέτη. Θα εξετάσουμε λοιπόν τώρα πώς ο ίδιος ο Αρχιμήδης αντιμετωπίζει τους τρεις τρόπους, δηλαδή πώς αντιλαμβάνεται τον ρόλο και τη σημασία του καθενός, και θα ολοκληρώσουμε με μια κριτική παρουσίαση των κύριων απόψεων που έχουν διατυπώσει σχετικά με αυτό κατά το παρελθόν οι ιστορικοί των Μαθηματικών.

Ο Αρχιμήδης χρησιμοποιεί δύο ζεύγη χαρακτηρισμών για να χαρακτηρίσει και να διακρίνει τον έναν από τον άλλο τους τρεις τρόπους με τους οποίους πραγματεύεται το πρόβλημα του τετραγωνισμού. Τα ζεύγη αυτά μπορούμε να τα αποδώσουμε επιγραμματικά ως εξής: «ευρετικός» – «αποδεικτικός» και «μηχανικός» – «γεωμετρικός». Είναι αλήθεια ότι οι λέξεις αυτές δεν απαντούν όλες *en personne* στα κείμενα του Αρχιμήδη. Η λέξη «ευρετικός», παραδείγματος χάριν, δεν εμφανίζεται πουθενά· αντ' αυτής όμως εμφανίζονται διάφοροι ισοδύναμοι τύποι σε εκφράσεις όπως: «διὰ μηχανικῶν εὑρεθέν» (Αρχιμήδης 1970–1974, Β, 218.11–12), «τοῦ νῦν ἐκδιδομένου θεωρήματος τὴν εὕρεσιν» (Αρχιμήδης 1970–1974, Β, 388.7–8), «φανέντων μηχανικῶς» (Αρχιμήδης 1970–1974, Β, 386.23), «φανὲν διὰ τῶν μηχανικῶν» (Αρχιμήδης 1970–1974, Β, 388.16–17). Επίσης, αντί της λέξης «μηχανικός» εμφανίζεται στα κείμενα η έκφραση «διὰ τῶν μηχανικῶν» ή ο επιρρηματικός τύπος «μηχανικῶς». Παρόμοιες είναι οι παραλλαγές με τις οποίες εμφανίζονται και οι δύο άλλες λέξεις, «αποδεικτικός» και «γεωμετρικός». Χάριν συντομίας, όλες αυτές τις παραλλαγές θα τις αποδίδουμε στη συνέχεια με τα δύο ζεύγη των όρων που αναφέραμε προηγουμένως.

Ας δούμε τώρα πώς χαρακτηρίζει ο Αρχιμήδης τον κάθε τρόπο τετραγωνισμού. Τον τετραγωνισμό που εκθέτει στη *Μέθοδο* (βλ. ανωτέρω, τετραγωνισμός υπ' αριθμ. 1), ο Αρχιμήδης τον χαρακτηρίζει «ευρετικό» και «μηχανικό». Ο ευρετικός χαρακτήρας του έγκειται, όπως σημειώνει, στο ότι δίνει τη δυνατότητα να αναγνωρίζει κανείς εκ των προτέρων, με τη βοήθεια της μηχανικής, μερικές μαθηματικές ιδιότητες, γεγονός το οποίο είναι χρήσιμο για την απόδειξη των σχετικών θεωρημάτων. (Αρχιμήδης 1970–1974, Β, 386.19–22) Διότι «είναι ευκολότερο να βρούμε την απόδειξη εάν έχουμε προηγουμένως αποκτήσει, με τη μέθοδο αυτή, κάποια γνώση των ζητημάτων, παρά να την αναζητούμε χωρίς να γνωρίζουμε τίποτα εκ των προτέρων.» (Αρχιμήδης 1970–1974, Β, 386.25–28) Φροντίζει ωστόσο ο Αρχιμήδης να επισημάνει ρητά ότι ο τετραγωνισμός που επιτυγχάνεται με αυτόν τον τρόπο δεν συνιστά απόδειξη του ευρισκόμενου αποτελέσματος. Αυτό συνάγεται από τη διευκρίνιση στο τέλος της πρώτης πρότασης της *Μεθόδου*, όπου αναφέρει: «Αυτό όμως δεν έχει αποδειχθεί με όσα ελέχθησαν προηγουμένως· έχει δημιουργηθεί μόνο κάποια πεποίθηση ότι το συμπέρασμα είναι αληθές.» (Αρχιμήδης 1970–1974, Β, 396.5–7) Δεν χωρεί καμία αμφιβολία, λοιπόν, ότι ο Αρχιμήδης θεωρεί τον πρώτο τρόπο τετραγωνισμού, δηλαδή τον τετραγωνισμό που εκθέτει στο έργο *Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένη ἔφοδος*, ως μηχανικό, ευρετικό, και μη αποδεικτικό.

Εξίσου σαφής είναι ο τρόπος με τον οποίο ο Αρχιμήδης αντιμετωπίζει τον τελευταίο από τους δύο τρόπους τετραγωνισμού που εκθέτει στον *Τετραγωνισμό παραβολής* (βλ. ανωτέρω, τετραγωνισμός υπ' αριθμ. 3). Τον χαρακτηρίζει γεωμετρικό και αποδεικτικό. Αυτό προκύπτει αμέσως από το ακόλουθο απόσπασμα από την προς Δοσίθεον επιστολή: «Συγγράψαμε, λοιπόν, τις αποδείξεις αυτού (αναφέρεται στον τετραγωνισμό του παραβολικού χωρίου) και σου τις αποστέλλουμε, πρώτον μεν όπως το πραγματευθήκαμε δια της μηχανικής και κατόπιν όπως αποδεικνύεται δια της γεωμετρίας.» (Αρχιμήδης 1970–1974, Β, 220.17–20) Το απόσπασμα αυτό είναι παραπλήσιο με ένα άλλο απόσπασμα από την ίδια επιστολή: «Επιλέξαμε λοιπόν να κοινοποιήσουμε σε εσένα ... ένα γεωμετρικό θεώρημα το οποίο δεν είχε ερευνηθεί προηγουμένως, τώρα δε έχει ερευνηθεί από εμάς, και το οποίο πρώτα βρέθηκε δια της μηχανικής και κατόπιν αποδείχτηκε δια της γεωμετρίας.» (Αρχιμήδης 1970–1974, Β, 218.8–12) Και στα δύο αυτά αποσπάσματα ο Αρχιμήδης αναφέρεται στη γεωμετρική απόδειξη που εκτίθεται στο δεύτερο μέρος της πραγματείας *Τετραγωνισμός παραβολής*, το κύριο θεώρημα της οποίας είναι η Πρόταση 24 που παρουσιάσαμε προηγουμένως. Το γεγονός ότι στο τελευταίο απόσπασμα χρησιμοποιεί την έκφραση «διὰ τῶν γεωμετρικῶν ἐπιδειχθέν», αντί της έκφρασης «διὰ τῶν γεωμετρουμένων ἀποδείκνυται» που χρησιμοποιεί στο πρώτο, δεν αλλάζει καθόλου το συμπέρασμα ότι ο Αρχιμήδης θεωρεί ότι ο τρόπος με τον οποίο πραγματεύεται στο δεύτερο μέρος της πραγματείας *Τετραγωνισμός παραβολής* το πρόβλημα του τετραγωνισμού του παραβολικού χωρίου είναι ταυτόχρονα γεωμετρικός και αποδεικτικός.

Όσον αφορά, τώρα, τον τρόπο τετραγωνισμού που εκτίθεται στο πρώτο μέρος της πραγματείας *Τετραγωνισμός παραβολής* (βλ. ανωτέρω, τετραγωνισμός υπ' αριθμ. 2), τα πράγματα δεν είναι τόσο σαφή όσο στις προηγούμενες περιπτώσεις. Για τον μηχανικό χαρακτήρα του, φυσικά, δεν υπάρχει καμία αμφιβολία. Το πρόβλημα έγκειται στο εάν ο Αρχιμήδης θεωρούσε ότι αυτός ο τρόπος πραγμάτευσης συνιστά πειστική και αποδεκτή απόδειξη. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, ακριβώς σε αυτό το σημείο εστιάζονται οι διαφωνίες μεταξύ των ιστορικών των Μαθηματικών. Κατά τη γνώμη μας, το απόσπασμα που παραθέσαμε προηγουμένως («συγγράψαμε, λοιπόν, *τις αποδείξεις* αυτού και σου τις αποστέλλουμε, πρώτον μεν όπως το πραγματευθήκαμε δια της μηχανικής και κατόπιν όπως αποδεικνύεται δια της γεωμετρίας»), στο οποίο ο Αρχιμήδης χρησιμοποιεί τον πληθυντικό «αποδείξεις» για να χαρακτηρίσει και τους δύο τετραγωνισμούς που εκτίθενται στον *Τετραγωνισμό παραβολής*, αποτελεί μια μαρτυρία την οποία δεν πρέπει να παραβλέψουμε.

Όμως τα πράγματα όσον αφορά αυτόν τον τελευταίο τρόπο τετραγωνισμού είναι πιο σύνθετα, καθώς εγείρεται το ερώτημα πόσο έγκυρη και μαθηματικώς αυστηρή μπορεί να είναι μια απόδειξη η οποία χρησιμοποιεί έννοιες και συλλογισμούς από τη μηχανική. Το επιχείρημα που αναπτύσσει ο Αρχιμήδης σε αυτόν τον τετραγωνισμό είναι, τρόπον τινά, ένα υβριδικό επιχείρημα, το οποίο αντλεί τόσο από τη γεωμετρία όσο και από τη μηχανική (στατική). Παρόμοια χαρακτηριστικά, όπως είδαμε, έχει επίσης το επιχείρημα που αναπτύσσεται στον τετραγωνισμό της *Μεθόδου*. Όμως εκείνον τον τετραγωνισμό ο Αρχιμήδης δεν τον θεωρεί αποδεικτικό· τον θεωρεί ευρετικό, και υπ' αυτήν τη έννοια δεν υφίσταται ζήτημα αποδεικτικής εγκυρότητας για εκείνον. Ο τετραγωνισμός, όμως, που εκτίθεται στο πρώτο μέρος του *Τετραγωνισμού παραβολής* δεν έχει καθόλου τα χαρακτηριστικά μιας ευρετικής διαδικασίας. Για την ανάπτυξή του απαιτείται το αποτέλεσμα να είναι γνωστό εκ των προτέρων. Από την άλλη πλευρά, ο μηχανικός χαρακτήρας του είναι αδιαμφισβήτητος και συνίσταται: α) στη θεώρηση των γεωμετρικών μεγεθών ως φυσικών (δηλαδή σαν να έχουν βάρος), β) στη χρήση ζυγού, γ) στην εφαρμογή της αρχής της ισορροπίας του ζυγού, και δ) στη χρήση ιδιοτήτων σχετικά με τα κέντρα βάρους. Η διερεύνηση, όμως, γεωμετρικών ιδιοτήτων με χρήση επιχειρημάτων από τη μηχανική είναι μια αποδεκτή μέθοδος; Για έναν αυστηρό μαθηματικό, γαλουχημένο με τα ευκλείδεια πρότυπα αυστηρότητας των αποδείξεων, κάτι τέτοιο είναι ανεπίτρεπτο. Ο B. Vitrac γράφει σχετικά: «Για έναν αυστηρό (μαθηματικό)[12] αυτό δεν είναι αποδεκτό ως γεωμετρική απόδειξη, διότι υπάρχει ένα πρόβλημα ως προς τις αρχικές παραδοχές της χρησιμοποιούμενης απόδειξης.» (Vitrac 1992, 75) Παραπέμπει μάλιστα στα εδάφια I, 6–7 από τα *Αναλυτικά ύστερα* του Αριστοτέλη, προσθέτοντας ότι «ένα σχήμα στη μηχανική έχει βάρος και μέγεθος· στη γεωμετρία έχει μόνον μέγεθος.» (Vitrac 1992, 75 n. 56) Πράγματι, σύμφωνα με τον Αριστοτέλη δεν πρέπει σε μια απόδειξη να χρησιμοποιούνται αρχές από διαφορετικές επιστήμες, δεν πρέπει να υπεισέρχεται κανείς στα εδάφη μιας επιστήμης χρησιμοποιώντας μέσα και τεχνικές που ανήκουν σε άλλη επιστήμη. Ωστόσο ο ίδιος ο Αρχιμήδης, όπως προαναφέρθηκε, αποκαλεί, έστω και άπαξ, τον συγκεκριμένο τετραγωνισμό αποδεικτικό. Με βάση τα ανωτέρω είναι φανερό ότι υπάρχουν ανοικτά ιστοριογραφικά ερωτήματα όσον αφορά τον ρόλο και τον χαρακτήρα του τετραγωνισμού που εκτίθεται στο πρώτο μέρος του *Τετραγωνισμού παραβολής*. Ας δούμε λοιπόν πώς προσέγγισαν το θέμα αυτό οι ιστορικοί των Μαθηματικών.

Η αφετηρία για τη διερεύνησή μας θα είναι ο τετραγωνισμός που εκτίθεται στη *Μέθοδο*. Όπως αναφέρθηκε ο Αρχιμήδης χαρακτηρίζει πάντοτε αυτή τη μέθοδο τετραγωνισμού ευρετική, προσθέτει ότι δεν αποτελεί απόδειξη, και παραπέμπει για την απόδειξη στην πραγματεία *Τετραγωνισμός παραβολής* που είχε δημοσιεύσει νωρίτερα. Το ερώτημα που εγείρεται φυσιολογικά είναι γιατί η μέθοδος που χρησιμοποιείται στον τετραγωνισμό της *Μεθόδου* δεν θεωρείται επαρκής για να θεωρηθεί το αποτέλεσμα έγκυρο, αυστηρά αποδεδειγμένο; Υπάρχει κάποιο έλλειμμα μαθηματικής αυστηρότητας στη μέθοδο και, αν υπάρχει, που εντοπίζεται το έλλειμμα αυτό;

12. Ο Vitrac χρησιμοποιεί το επίθετο «puriste».

Μια αποκωδικοποίηση της μεθόδου φανερώνει ότι σε αυτήν χρησιμοποιούνται δύο ειδών επιχειρήματα:

1. Πρώτον, χρησιμοποιούνται συλλογισμοί από τη μηχανική (στατική). Τα γεωμετρικά μεγέθη θεωρούνται ως έχοντα βάρος, κρέμονται από τη φάλαγγα ενός νοητού ζυγού, εφαρμόζεται η αρχή ισορροπίας του ζυγού προκειμένου να συναχθούν σχέσεις μεταξύ των γεωμετρικών μεγεθών, και χρησιμοποιούνται ιδιότητες σχετικά με τα κέντρα βάρους.
2. Δεύτερον, ένα επίπεδο σχήμα θεωρείται ότι συγκροτείται από «όλα» τα ευθύγραμμα τμήματα που άγονται με ορισμένη διεύθυνση και έχουν τα άκρα τους στην περιφέρεια του σχήματος. Έτσι, μπορεί να αποδομηθεί σε τέτοιες παράλληλες χορδές με ορισμένα μήκη και να ανασυγκροτηθεί εκ νέου από αυτές. Το «άθροισμα» των ευθυγράμμων τμημάτων δίνει την επιφάνεια του σχήματος. Θα ονομάζουμε αυτά τα ευθύγραμμα τμήματα «αδιαίρετα». Η ιδέα αυτή επεκτείνεται και στην περίπτωση των σχημάτων του χώρου, τα οποία μπορούν να αποδομηθούν σε παράλληλες επίπεδες τομές.[13]

Λαμβάνοντας υπόψη αυτά τα δύο είδη επιχειρημάτων που εμπλέκονται στη συλλογιστική του Αρχιμήδη, ας εξετάσουμε πού εντοπίζεται κατά τους ιστορικούς των Μαθηματικών το έλλειμμα αυστηρότητας αυτής της μεθόδου τετραγωνισμού. Η άποψη που

13. Ο όρος «αδιαίρετα» δεν απαντά στον Αρχιμήδη ούτε σε οποιονδήποτε άλλον μαθηματικό της Αρχαιότητας. Χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τους μαθηματικούς του πρώτου μισού του 17ου αιώνα (τους προδρόμους του Απειροστικού Λογισμού, όπως αποκαλούνται συνήθως). Ευρεία χρήση των αδιαιρέτων ως μεθόδου ολοκλήρωσης έκανε ο ιταλός γεωμέτρης Bonaventura Cavalieri (1598–1647) στο βιβλίο του *Geometria indivisibilitus continuorum nova quadam ratione promota* (1635).

εκφράζεται πιο συχνά στη βιβλιογραφία είναι αυτή που έχει διατυπώσει ο E. J. Dijksterhuis. Κατά τον Dijksterhuis και όσους συμμερίζονται την άποψή του το έλλειμμα μαθηματικής αυστηρότητας οφείλεται στη χρησιμοποίηση των αδιαιρέτων και ουδόλως στα μηχανικά χαρακτηριστικά της μεθόδου. Γράφει:

> Η μαθηματική ανεπάρκεια (της μεθόδου) οφείλεται αποκλειστικά στη χρήση των αδιαιρέτων· δεν υπάρχει από μαθηματική άποψη η παραμικρή αντίρρηση ως προς τις μηχανικές θεωρήσεις που είναι σωστά θεμελιωμένες, όπως εφαρμόζονται παραδείγματος χάριν στην Πρόταση 1 (της *Μεθόδου*). Ότι αυτή ήταν πράγματι η άποψη του Αρχιμήδη είναι προφανές ιδιαίτερα από το γεγονός ότι στην πραγματεία του *Τετραγωνισμός παραβολής*, η οποία αποτελεί ένα επίσημο δημοσίευμα που ικανοποιεί όλες τις απαιτήσεις αυστηρότητας, αποδεικνύει το αποτέλεσμα που βρήκε στην Πρόταση 1 για το εμβαδόν ενός τυχόντος παραβολικού χωρίου και πάλι μέσω θεωρήσεων από τη Στατική αλλά αυτήν τη φορά χωρίς αδιαίρετα. (Dijksterhuis 1987, 319)

Με σαφήνεια εκθέτει την άποψή του ο Dijksterhuis επίσης στο ακόλουθο απόσπασμα:

> Ακόμα πιο όμορφο παράδειγμα τέτοιας λογικής επιβεβαίωσης μιας ιδέας στην οποία έφτασε διαισθητικά είναι το θεώρημα για το εμβαδόν ενός παραβολικού χωρίου, που αποτελεί το θέμα της πρώτης πρότασης της *Μεθόδου*. Πράγματι, ο Αρχιμήδης αφιέρωσε μια ειδική πραγματεία, τον *Τετραγωνισμό παραβολής*, στη μαθηματική απόδειξη αυτού του θεωρήματος, όπου συνάγει με κάθε λεπτομέρεια το ήδη γνωστό αποτέλεσμα με δύο διαφορετικούς τρόπους,

ήτοι, με τη βοήθεια μηχανικών θεωρήσεων κατ' αρχάς και εν συνεχεία καθαρά γεωμετρικά. Όπως ήδη παρατηρήσαμε προηγουμένως, αυτός ο διττός χαρακτήρας της πραγματείας μπορεί να θεωρηθεί ότι προσφέρει ένα επιχείρημα υπέρ της άποψης ότι όταν ο Αρχιμήδης αρνείται την αποδεικτική ισχύ της μηχανικής μεθόδου που εξηγεί στον Ερατοσθένη αυτό δεν το κάνει λόγω της μηχανικής φύσης της αλλά αποκλειστικά και μόνο επειδή χρησιμοποιεί τη μέθοδο των αδιαιρέτων. (Dijksterhuis 1987, 336)

Η άποψη του Dijksterhuis, λοιπόν, είναι ότι ο Αρχιμήδης θεωρούσε πως η χρήση των αδιαιρέτων ήταν το μοναδικό γνώρισμα της ευρετικής μεθόδου του που την καθιστούσε μη αποδεικτική. Αντίθετα, κατά τη γνώμη του, ο Αρχιμήδης απέδιδε στα μηχανικά χαρακτηριστικά της μεθόδου πλήρη αποδεικτική εγκυρότητα και αυτό τεκμαίρεται αφενός από το ότι τη μηχανική (στατική) την είχε θεμελιώσει ο ίδιος ο Αρχιμήδης ως αποδεικτική επιστήμη στο *Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν ἢ κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων* και αφετέρου επειδή στο πρώτο μέρος της πραγματείας *Τετραγωνισμός παραβολής* αποδεικνύει το αποτέλεσμα για το παραβολικό χωρίο χρησιμοποιώντας μεν μηχανικές θεωρήσεις όχι όμως αδιαίρετα.[14] Τη θέση του Dijksterhuis υιοθέτησαν στα χρόνια που ακολούθησαν και άλλοι μελετητές, παραδείγματος χάριν ο I. Schneider (1979), και σήμερα θεωρείται δεσπόζουσα.

Εκτός από τους μελετητές που ασπάστηκαν τη θέση του Dijksterhuis, υπήρξαν και μερικοί οι οποίοι διαφώνησαν, υποστηρίζοντας ότι το έλλειμμα αυστηρότητας της μεθόδου δεν οφείλεται μόνο στη χρήση των αδιαιρέτων αλλά και στον μηχανικό χαρακτήρα της. Κατά συνέπεια, αυτοί οι μελετητές υποστήριξαν ότι ο τετραγωνισμός στο πρώτο μέρος του *Τετραγωνισμού παραβολής* δεν συνιστά ούτε αυτός, λόγω των μηχανικών χαρακτηριστικών του, έγκυρη και αυστηρή απόδειξη και ούτε θεωρείται ως τέτοια από τον Αρχιμήδη. Ένας παλαιότερος ιστορικός των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών που διατύπωσε αυτήν την άποψη ήταν ο Oskar Becker, του οποίου η γνώμη εκτίθεται με σαφήνεια στο παρακάτω απόσπασμα:

> Ο Αρχιμήδης δεν εκλαμβάνει αυτή τη μέθοδο ως αυστηρή, πρώτα απ' όλα εξαιτίας των απειροστικών θεωρήσεων, που ανάγονται εν μέρει στον Δημόκριτο (B 155) ..., αλλά επίσης εξαιτίας της χρήσης της Στατικής. Έτσι, στον *Τετραγωνισμό παραβολής* αντικαθιστά στη μηχανική του πραγμάτευση τις απειροστικές διαδικασίες με μια απόδειξη με εξάντληση (το παραβολικό χωρίο αναλύεται όχι σε ένα άπειρο πλήθος ευθυγράμμων τμημάτων αλλά σε έναν αριθμό στοιχείων ο οποίος, πεπερασμένος στην αρχή, βαίνει προοδευτικά στο άπειρο). Αυτό οδηγεί επίσης σε μια απόδειξη καθαρά γεωμετρική, στην πορεία της οποίας χρησι-

14. Όσον αφορά στην αυστηρότητα της μηχανικής απόδειξης του τετραγωνισμού του παραβολικού χωρίου, που εκτίθεται στο πρώτο μέρος του *Τετραγωνισμού παραβολής*, πρέπει να σημειώσουμε ότι η απόδειξη αυτή προϋποθέτει την παραδοχή της συμβατότητας της άθροισης με την ισορροπία. Δηλαδή, προϋποθέτει να έχει γίνει δεκτό το ακόλουθο αίτημα: Αν σε διάφορα σημεία των βραχιόνων ενός ζυγού αναρτηθούν βάρη έτσι ώστε ο ζυγός να ισορροπεί, τότε τα δύο αθροίσματα θα ισορροπούν αναρτημένα σε ίδιες αποστάσεις από το υπομόχλιο όπως οι αποστάσεις των κέντρων βαρών των δύο συνόλων των αρχικών ισορροπούντων βαρών. Το αίτημα αυτό ο Αρχιμήδης δεν το διατυπώνει σε κανένα έργο του, το χρησιμοποιεί όμως όχι μόνο στη *Μέθοδο* και στο πρώτο μέρος του *Τετραγωνισμού παραβολής* αλλά και στο *Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν ἢ κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων*. Βασιζόμενος σε μια ιδέα του O. Toeplitz, ο Dijksterhuis έχει προτείνει μια ερμηνεία του έκτου αιτήματος αυτής της τελευταίας πραγματείας η οποία το καθιστά συμβατό με την προαναφερθείσα παραδοχή. (Dijksterhuis 1987, 293)

μοποιεί, μαζί με μερικά ορισμένα ολοκληρώματα, άπειρες συγκλίνουσες σειρές. (Becher, Hofmann 1956, 81–82)

Ο Becker επανέλαβε την άποψή του έναν χρόνο αργότερα, σε μία κριτική που έγραψε για την αγγλική έκδοση του βιβλίου του Dijksterhuis. (Becker 1957) Όμως ο ιστορικός των Μαθηματικών που εξέφρασε με μεγαλύτερη έμφαση αντιρρήσεις για τη θέση του Dijksterhuis ήταν ο W. R. Knorr. (Knorr 1982· 1996) Σύμφωνα με τον Knorr, μάλιστα, η κύρια αδυναμία της μεθόδου του Αρχιμήδη, όσον αφορά το ζήτημα της μαθηματικής αυστηρότητας, είναι ακριβώς ο μηχανικός χαρακτήρας της και όχι τα αδιαίρετα. Όπως σημειώνει, κατά τον Αρχιμήδη «τα αδιαίρετα είναι απλώς ένα δευτερεύον γνώρισμα της μεθόδου· επί της ουσίας, η μέθοδός του βασίζεται στην επίκληση αρχών που προέρχονται από τη μηχανική.» (Knorr 1982, 73) Τα επιχειρήματα που επικαλείται ο Knorr για να δικαιολογήσει τη θέση του είναι τα εξής: 1) Ο Αρχιμήδης αναφέρεται πάντοτε στην ευρετική μέθοδο με την έκφραση «διὰ τῶν μηχανικῶν»· ουδέποτε χρησιμοποιεί κάτι που να υποδηλώνει τα αδιαίρετα. 2) Στα αποσπάσματα 218.11–12 και 220.17–20 από τον *Τετραγωνισμό παραβολής*, που έχουμε παραθέσει πιο πριν, ο Αρχιμήδης αντιδιαστέλλει το «αποδεικτικό» προς το «μηχανικό»· στο πλαίσιο αυτό, όταν αναφέρει στη *Μέθοδο* ότι μερικά από τα θεωρήματα που βρήκε αρχικώς δια της μηχανικής τα απέδειξε στη συνέχεια γεωμετρικώς, διότι «η εξέταση με αυτόν τον τρόπο δεν αποτελεί απόδειξη» (Αρχιμήδης 1970–1974, Β, 386.24–25), δεν μπορεί να εννοεί, υποστηρίζει ο Knorr, παρά μόνο τα μηχανικά χαρακτηριστικά της μεθόδου. 3) Τέλος, η προσθήκη της γεωμετρικής απόδειξης στο δεύτερο μέρος του *Τετραγωνισμού παραβολής* οφείλεται στην επιθυμία του Αρχιμήδη να προλάβει πιθανές αντιρρήσεις εκ μέρους των καθαρών μαθηματικών ως προς τη νομιμότητα της χρήσης μηχανικών στοιχείων (όπως βάρος,

ζυγός, ισορροπία) σε αποδείξεις που αφορούν αποκλειστικά γεωμετρικές ιδιότητες σχημάτων, όπως συμβαίνει στον τετραγωνισμό που πραγματοποιείται στο πρώτο μέρος του *Τετραγωνισμού παραβολής*.

Στα παραπάνω επιχειρήματα έχουμε να παρατηρήσουμε τα εξής: Ο Αρχιμήδης χρησιμοποιεί την έκφραση «διὰ τῶν μηχανικῶν» τόσο όταν περιγράφει την ευρετική μέθοδο όσο και όταν αναφέρεται στον μηχανικό τετραγωνισμό του *Τετραγωνισμού παραβολής*. Στην πρώτη περίπτωση, όμως, φροντίζει πάντοτε να προσθέτει στην έκφραση αυτή μία μετοχή όπως «εὑρεθὲν» ή «φανὲν», κάτι που δεν κάνει στη δεύτερη περίπτωση. Η αντιδιαστολή, λοιπόν, δεν γίνεται ανάμεσα στο «αποδεικτικό» και στο «μηχανικό» εν γένει, όπως υποστηρίζει ο Knorr, αλλά ανάμεσα στο «αποδεικτικό» και στο «εὑρεθὲν / φανὲν διὰ τῶν μηχανικῶν», δηλαδή ανάμεσα στο «αποδεικτικό» και στο «ευρετικό». Αντίθετα, ο Αρχιμήδης δεν αντιδιαστέλλει σε καμία περίπτωση το «αποδεικτικό» με τον μηχανικό τετραγωνισμό του *Τετραγωνισμού παραβολής*, αφού, όπως είδαμε, στο εδάφιο 220.18–19 χαρακτηρίζει τον τελευταίο ως απόδειξη. Εξάλλου, το τελευταίο επιχείρημα του Knorr δεν λέει τίποτα για το πώς αξιολογούσε ο ίδιος ο Αρχιμήδης τον μηχανικό τετραγωνισμό του *Τετραγωνισμού παραβολής*. Το ενδεχόμενο κάποιοι μαθηματικοί να είχαν εγείρει αντιρρήσεις για το πόσο νόμιμο είναι να χρησιμοποιούνται στοιχεία από τη μηχανική στις γεωμετρικές αποδείξεις είναι πολύ πιθανό, αλλά δεν σημαίνει κατ' ανάγκη ότι και ο ίδιος ο Αρχιμήδης συμμεριζόταν τις απόψεις τους. Αντίθετα, δεν είναι καθόλου απίθανη η υπόθεση να θεωρούσε ο Αρχιμήδης έγκυρη και πειστική τη μηχανική απόδειξη του τετραγωνισμού του παραβολικού χωρίου, την οποία άλλωστε επινόησε ο ίδιος, και να πρόσθεσε τη γεωμετρική απόδειξη στο δεύτερο μέρος του *Τετραγωνισμού παραβολής* προκειμένου να κάνει τη μηχανική απόδειξη πιο εύκολα αποδεκτή σε ένα ακροατήριο το οποίο μπορεί να είχε δισταγμούς και αντιρρήσεις για την τελευταία (τη μηχανική), δεν είχε όμως καμία επιφύλαξη για την εγκυρότητα της πρώτης (της γεωμετρικής).

Το κύριο θέμα της προς Δοσίθεον επιστολής (δηλ. της εισαγωγής του *Τετραγωνισμού παραβολής*) δεν είναι να αντιδιαστείλει τους μηχανικούς προς τους γεωμετρικούς χειρισμούς των προβλημάτων τετραγωνισμού, όπως υποστηρίζει ο Knorr. Το κύριο θέμα της επιστολής είναι να τοποθετηθεί επί του ερωτήματος τι είδους προτάσεις πρέπει να λαμβάνονται ως αρχικές παραδοχές (αξιώματα) προκειμένου να θεωρούνται έγκυρες οι αποδείξεις. Ο Αρχιμήδης επισημαίνει ότι στο παρελθόν υπήρξαν γεωμέτρες οι οποίοι προσπάθησαν να επιλύσουν (και να δικαιολογήσουν την επίλυση) προβλήματα όπως ο τετραγωνισμός του κύκλου, ο τετραγωνισμός κυκλικού τμήματος, ή ο τετραγωνισμός του χωρίου που ορίζεται από τμήμα έλλειψης και τη χορδή στα άκρα αυτού, χρησιμοποιώντας αξιώματα που δεν γίνονταν ευκόλως αποδεκτά (τετραγωνίζειν ἐπειρῶντο λαμβάνοντες οὐκ εὐπαραχώρητα λήμματα). Η χρησιμοποίηση τέτοιων αξιωμάτων είχε σαν αποτέλεσμα οι επιλύσεις που πρότειναν εκείνοι οι γεωμέτρες να μην αναγνωρίζονται από τους περισσότερους συναδέλφους τους ως έγκυρες. (Αρχιμήδης 1970–1974, Β, 218.18–19) Ουδείς, όμως, σημειώνει ο Αρχιμήδης, επιχείρησε στο παρελθόν να τετραγωνίσει το παραβολικό χωρίο. Αυτό το πρόβλημα το έλυσε για πρώτη φορά ο ίδιος, «χρησιμοποιώντας για την απόδειξή του την εξής παραδοχή: Εκ των άνισων χωρίων η υπεροχή κατά την οποία το μεγαλύτερο υπερέχει του μικρότερου, εάν προστίθεται στον εαυτό της είναι δυνατόν να ξεπεράσει κάθε προκαθορισμένο πεπερασμένο χωρίο.» (Αρχιμήδης 1970–1974, Β, 220.2–5)

Το αξίωμα αυτό –αναφέρεται συχνά στη βιβλιογραφία ως αξίωμα της συνέχειας–, διευκρινίζει ο Αρχιμήδης, το είχαν χρησιμοποιήσει και οι παλαιότεροι γεωμέτρες, διότι με αυτό ή με

παραπλήσια προς αυτό αξιώματα απέδειξαν ότι: α) οι κύκλοι είναι μεταξύ τους όπως τα τετράγωνα από τις διαμέτρους τους, β) οι σφαίρες έχουν μεταξύ τους λόγο όπως οι κύβοι από τις διαμέτρους τους, γ) η πυραμίδα είναι το τρίτο μέρος του πρίσματος που έχει την ίδια βάση και ίσο ύψος, και δ) ο κώνος είναι το τρίτο μέρος του κυλίνδρου που έχει την ίδια βάση και ίσο ύψος. Λέγοντας ότι οι παλαιότεροι γεωμέτρες απέδειξαν τα ανωτέρω θεωρήματα χρησιμοποιώντας παραπλήσια αξιώματα ο Αρχιμήδης εννοεί αφενός τον Εύδοξο και αφετέρου την Πρόταση X, 1 των *Στοιχείων* του Ευκλείδη.[15] Αφού έχει μνημονεύσει, λοιπόν, τα θεωρήματα που απέδειξε στο παρελθόν ο Εύδοξος χρησιμοποιώντας αξιώματα παραπλήσια με τη δική του εκδοχή τού αξιώματος της συνέχειας ο Αρχιμήδης προσθέτει την ακόλουθη κρίσιμη φράση: «Τώρα, πιστεύεται ότι το καθένα από τα προαναφερθέντα θεωρήματα δεν είναι κατώτερο εκείνων τα οποία έχουν αποδειχθεί χωρίς την παραδοχή αυτού του λήμματος· μου αρκεί δε τα θεωρήματα που εκδίδονται τώρα από εμάς να έχουν τον ίδιο βαθμό αποδοχής.» (Αρχιμήδης 1970–1974, Β, 220.14–17).[16]

15. Τα τέσσερα θεωρήματα που μνημονεύει ο Αρχιμήδης περιέχονται στο Βιβλίο XII των *Στοιχείων* του Ευκλείδη (πρόκειται για τα θεωρήματα 2, 18, 7 και 10). Στις αποδείξεις τους χρησιμοποιείται το X, 1, το οποίο αποτελεί παραπλήσια εκδοχή του λήμματος που διατυπώνει ο Αρχιμήδης. Τα ανωτέρω θεωρήματα αποδίδονται στον Εύδοξο, ο οποίος τα είχε αποδείξει, όπως πιστεύεται, με την παραδοχή του X, 1.

16. Ο Knorr φαίνεται ότι έχει παρανοήσει το νόημα της τελευταίας φράσης του Αρχιμήδη. Θεωρεί ότι στη φράση αυτή ο Αρχιμήδης αντιπαραβάλλει τις αποδείξεις που χρησιμοποιούν την αρχιμήδεια εκδοχή του αξιώματος της συνέχειας προς τις αποδείξεις που χρησιμοποιούν την ευδόξεια-ευκλείδεια εκδοχή του ίδιου αξιώματος. Γράφει: «Διατυπώνει (ο Αρχιμήδης) επακριβώς το αξίωμα –επειδή προφανώς το θεωρεί ως μια καινοτομία– και επίσης επιμένει ότι η ανάγκη ενός τέτοιου ειδικού αξιώματος δεν μειώνει την αξία των αποδείξεών του, διότι παλαιότεροι γεωμέτρες ... έκαναν χρήση μιας τελείως παραπλήσιας παραδοχής» (Knorr 1978, 222),

Τα συμπεράσματα που εξάγονται από αυτήν τη φράση είναι πολλά. Ένα πρώτο συμπέρασμα είναι ότι η ευρύτερη θεματική που απασχολεί τον Αρχιμήδη στην προς Δοσίθεον επιστολή (δηλαδή, επαναλαμβάνουμε, στην εισαγωγή του *Τετραγωνισμού παραβολής*) είναι οι αποδείξεις και η εγκυρότητά τους. Δεύτερον, το ερώτημα που τον απασχολεί δεν είναι η εγκυρότητα των μηχανικών έναντι των αμιγώς γεωμετρικών αποδείξεων, αλλά η εγκυρότητα των αποδείξεων που χρησιμοποιούν το αξίωμα της συνέχειας (ανεξαρτήτως εάν είναι μηχανικές ή αμιγώς γεωμετρικές) έναντι εκείνων που δεν χρησιμοποιούν το αξίωμα αυτό. Τρίτον, ο Αρχιμήδης δηλώνει ότι θεωρεί και ο ίδιος –όπως άλλωστε και οι περισσότεροι γεωμέτρες της εποχής του– ότι οι αποδείξεις που χρησιμοποιούν το αξίωμα της συνέχειας (σε οποιαδήποτε εκδοχή του) δεν υπολείπονται σε εγκυρότητα έναντι των συνήθων γεωμετρικών αποδείξεων που διεκπεραιώνονται χωρίς τη χρήση του εν λόγω αξιώματος. Στο πλαίσιο μιας τέτοιας προβληματικής ο Αρχιμήδης παραθέτει στο κυρίως μέρος της πραγματείας του δύο τρόπους πραγμάτευσης του τετραγωνισμού του παραβολικού χωρίου, μία μηχανική και μία αμιγώς γεωμετρική, τις οποίες ονομάζει «αποδείξεις» και οι οποίες χρησιμοποιούν, και οι δύο, το αξίωμα της συνέχειας. Λαμβάνοντας υπόψη όλα τα παραπάνω καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο Αρχιμήδης περιέλαβε στον *Τετραγωνισμό παραβολής* τη μηχανική πραγμάτευση ως μία απολύτως νόμιμη απόδειξη του θεωρήματος για τον τετραγωνισμό

υπονοώντας τον Εύδοξο και τα θεωρήματα του Βιβλίου XII των *Στοιχείων* που χρησιμοποιούν την εκδοχή X, 1 του αξιώματος. Όμως η αντιδιαστολή που κάνει ο Αρχιμήδης είναι άλλη: αντιδιαστέλλει τα θεωρήματα που αποδεικνύονται με την παραδοχή του αξιώματος της συνέχειας (στην ευδόξεια-ευκλείδεια ή στην αρχιμήδεια εκδοχή του) προς τα θεωρήματα για την απόδειξη των οποίων δεν απαιτείται η παραδοχή αυτού του αξιώματος. Κατά τον Αρχιμήδη αμφότερα τα είδη αποδείξεων έχουν τον ίδιο βαθμό εγκυρότητας.

του παραβολικού χωρίου, για την οποία το μόνο που διεκδικεί είναι να θεωρείται εξίσου έγκυρη όπως η αμιγώς γεωμετρική απόδειξη ή οι αποδείξεις του Ευδόξου που περιέχονται στο δωδέκατο Βιβλίο των *Στοιχείων* του Ευκλείδη. Όσον αφορά, τέλος, τον τετραγωνισμό της *Μεθόδου*, συντασσόμαστε και εμείς με τη θέση του Dijksterhuis, ότι δηλαδή στη χρήση των αδιαιρέτων και όχι στα μηχανικά χαρακτηριστικά της οφείλεται το έλλειμμα αυστηρότητας και ότι αυτός είναι ο λόγος που ο Αρχιμήδης θεωρεί τη μέθοδο ευρετική και όχι αποδεικτική.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αρχιμήδης, 1970–1974. *Αρχιμήδους Άπαντα*, 3 τόμοι. Αρχαίο κείμενο, μετάφραση, σχόλια Ε. Σ. Σταμάτης. Αθήνα: Τεχνικό Επιμελητήριο της Ελλάδος.

Becker, O. 1957. Βιβλιοκριτική της αγγλικής έκδοσης του *Archimedes* του Dijksterhuis. *Gnomon* 29: 329–332.

Becker, O. & Hofmann, J. E. 1956. *Histoire des mathématiques*, tr. R. Jouan. Paris: Lamarre. Το βιβλίο αποτελείται από δύο μέρη. Ο Becker έγραψε το πρώτο (Histoire des mathématiques antiques) και ο Hofmann το δεύτερο μέρος (Histoire des mathématiques occidentales et orientales).

Dijksterhuis, E. J. 1987. *Archimedes*, tr. C. Dikshoorn (with a new bibliographic essay by Wilbur R. Knorr). Princeton, NJ: Princeton University Press. Ανατύπωση της πρώτης αγγλικής έκδοσης του 1956. Στο βιβλίο είναι συγκεντρωμένες μια σειρά μελέτες του Dijksterhuis, οι οποίες είχαν δημοσιευτεί αρχικώς στα ολλανδικά κατά τα έτη 1938–1944.

Knorr, W. R. 1978. «Archimedes and the *Elements*: Proposal for a Revised Chronological Ordering of the Archimedean Corpus». *Archive for History of Exact Sciences* 19: 211–290.

Knorr, W. R. 1982. «Infinity and continuity: The interaction of mathematics and philosophy in antiquity». Στο: N. Kretzmann (ed.), *Infinity and continuity in ancient and medieval thought*. Ithaca, N.Y.: Cornell University Press, 112–145.

Knorr, W. R. 1993. *The Ancient Tradition of Geometric Problems*. New York: Dover. Ανατύπωση της πρώτης έκδοσης του 1986.

Knorr, W. R. 1996. «The Method of Indivisibles in Ancient Geometry». Στο: R. Calinger (ed.), *Vita Mathematica. Historical research and integration with teaching*. The Mathematical Association of America, 67–86.

Netz, R. 1998. «The First Jewish Scientist?» *Scripta Classica Israelica* 17: 27–33.

Netz, R., Saito, K., Tchernetska, N. 2001: «A New Reading of *Method* Proposition 14: Preliminary Evidence from the Archimedes Palimpsest (Part 1)». *Sciamus* 2: 9–29. Βλ. στην παρούσα έκδοση, σ. 23-60.

Netz, R., Acerbi, F., Wilson, N. 2005. «Towards a Reconstruction of Archimedes' *Stomachion*». *Sciamvs* 5: 67–99. Βλ. στην παρούσα έκδοση, σ. 93–154.

Saito, K. 2006. «Between Magnitude and Quantity: Another Look at Archimedes' Quadrature». *Sugaku Expositions* 19 (1): 35–52.

Schneider, I., 1979. *Archimedes: Ingenieur, Naturwissenschaftler und Mathematiker*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Vitrac, B., 1992. «A propos de la chronologie des œuvres d'Archimède». *Mathématiques dans l'Antiquité*, éd. J.-Y. Guillaumin, 59–93. Saint-Étienne: Publications de l'Université de Saint-Étienne.