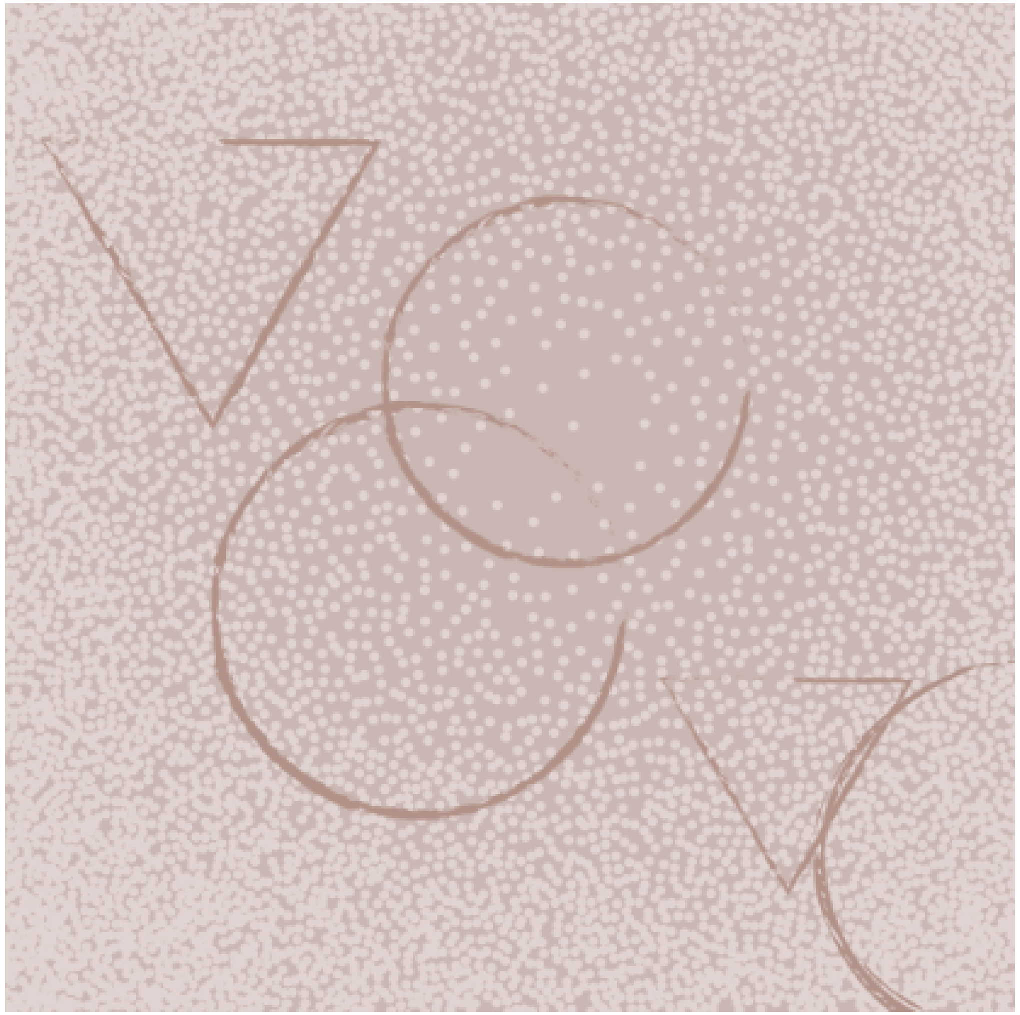


Το μεταπτυχιακό μάθημα

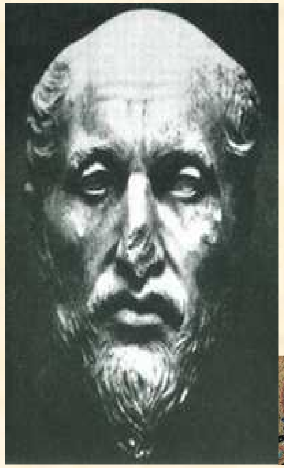
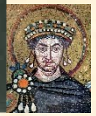
Ιστορία των Μαθηματικών (Υ16)

(Τετ. 18:00 - 21:00, Αίθ. Β)

προσφέρει μια επισκόπηση των πιο επιδραστικών μαθηματικών ιδεών που αναπτύχθηκαν από την αρχαιότητα έως και τους νεωτερικούς χρόνους στον ευρύτερο χώρο της Μεσογείου. Παράλληλα, εξετάζει τον ρόλο που διαδραμάτισαν οι κοινωνικοί, θεσμικοί και πολιτισμικοί παράγοντες στην εξέλιξη της μαθηματικής σκέψης και, αντιστρόφως, τους τρόπους με τους οποίους οι μαθηματικές ιδέες επηρέασαν την κοινωνία και τον πολιτισμό. Σε ιστοριογραφικό επίπεδο, στόχος του μαθήματος είναι να βοηθήσει τις φοιτήτριες και τους φοιτητές του ΙΦΕΤ να αναπτύξουν κριτική σκέψη ως προς τους τρόπους με τους οποίους κατανοείται και καταγράφεται η ιστορία των Μαθηματικών.

Μ. Σιάλαρος (msialaros@phs.uoa.gr)

https://en-uoa-gr.academia.edu/MichalisSialaros
https://www.ancientscienceportal.com
https://www.instagram.com/ancient_science_portal


~1600 π.Χ. ~600 π.Χ. ~300 π.Χ. 529-534 μ.Χ. 1629 μ.Χ.

Μεθοδολογικό ερώτημα:

Σύμφωνα με την παράδοση, οι απαρχές των ελληνικών μαθηματικών εντοπίζονται κατά τον 6ο αιώνα π.Χ. Το πρώτο, ωστόσο, σωζόμενο κείμενο είναι τα Στοιχεία του Ευκλείδη, το οποίο γράφεται περίπου τρεις αιώνες μετά. Πώς μπορούμε να αντλήσουμε πληροφορίες για το ενδιάμεσο διάστημα;

Τον 5ο αιώνα μ.Χ., ο Πρόκλος γράφει σχόλια στο πρώτο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη. Σε αυτό το έργο, περιέχεται μια ενότητα (η οποία υποτίθεται ότι βασίζεται σε παλαιότερους συγγραφείς) που περιγράφει την εξέλιξη των μαθηματικών από τον Θαλή μέχρι τον Ευκλείδη (64.16 – 70.18)

Ο Θαλής ήταν ο πρώτος ο οποίος, αφού ήλθε στην Αίγυπτο, μετέφερε τη θεωρία αυτή στην Ελλάδα· ο ίδιος ανακάλυψε πολλά πράγματα, και παρέδωσε τις αρχές πολλών άλλων στους νεωτέρους του, εφαρμόζοντας σε άλλες περιπτώσεις μέθοδο περισσότερο γενική και σε άλλες περισσότερο εμπειρική. Μετά από αυτόν ο Μάμερκος,[a] ο αδελφός του ποιητή Στησιχόρου, μνημονεύεται ότι επέδειξε ενδιαφέρον για τη μελέτη της γεωμετρίας και ο Ιππίας ο Ηλείος έγραψε για αυτόν ότι απέκτησε φήμη ως γεωμέτρης. Μετά από αυτούς ο Πυθαγόρας μετέτρεψε τη φιλοσοφία της [γεωμετρίας] σε μια μορφή ελεύθερης παιδείας, αναλογιζόμενος τις πρώτες αρχές της εκ των άνω, και διερευνώντας τα θεωρήματα αΰλως και νοερώς· αυτός ανακάλυψε επίσης τη θεωρία των αρρήτων[b] και τη σύσταση των κοσμικών σχημάτων. Μετά από αυτόν με πολλά [προβλήματα] της γεωμετρίας καταπιάστηκε ο Αναξαγόρας από τις Κλαζομενές, και ο Οινοπίδης ο Χίος, ο οποίος ήταν λίγο νεώτερος του Αναξαγόρα, και ο Πλάτων αναφέρει στους *Αντεραστές* ότι [αμφότεροι] απέκτησαν φήμη στα Μαθηματικά.

Μετά από αυτούς επιφανείς στη γεωμετρία έγιναν ο Ιπποκράτης ο Χίος, ο οποίος ανακάλυψε πώς τετραγωνίζεται ο μηνίσκος, και ο Θεόδωρος ο Κυρηναίος· ο Ιπποκράτης, μάλιστα, είναι ο πρώτος από τους προαναφερόμενους που συνέγραψε *Στοιχεία*. Ο Πλάτων, ο οποίος ακολουθεί μετά από αυτούς, συνέβαλε ώστε να λάβουν μεγάλη ανάπτυξη και οι λοιπές μαθηματικές επιστήμες και η γεωμετρία με τον ζήλο [που επέδειξε] για αυτές, ο οποίος είναι κατά κάποιον τρόπο εμφανής, αφού και τα συγγράμματά του τα έχει γεμίσει με μαθηματικούς συλλογισμούς και με κάθε ευκαιρία διεγείρει τον θαυμασμό προς αυτά όσων αφοσιώνονται στη φιλοσοφία. Την ίδια εποχή έζησαν επίσης ο Λεωδάμας από τη Θάσο, ο Αρχύτας ο Ταραντίνος και ο Θεαίτητος ο Αθηναίος, οι οποίοι αύξησαν τον αριθμό των θεωρημάτων και συνέβαλαν στην επιστημονικότερη συγκρότησή τους.

Νεώτερος του Λεωδάμαντος ήταν ο Νεοκλείδης, και ο μαθητής αυτού Λέων, οι οποίοι πρόσθεσαν πολλά σε όσα [είχαν επιτύχει] οι προγενέστεροί τους· έτσι, ο Λέων μπόρεσε να συντάξει τα *στοιχεία* με μεγαλύτερη επιμέλεια ως προς το πλήθος και τη χρήση των αποδεικνυόμενων [προτάσεων], και να βρει διορισμούς[a] για το πότε το ζητούμενο πρόβλημα είναι δυνατό και πότε αδύνατο. Ο Εύδοξος από την Κνίδο, λίγο νεώτερος του Λέοντος, αφού συνδέθηκε με τους κύκλους του Πλάτωνα, ήταν ο πρώτος ο οποίος αύξησε το πλήθος των λεγόμενων γενικών θεωρημάτων, στις τρεις αναλογίες πρόσθεσε άλλες τρεις, και προήγαγε τις σχετικές με την «τομή» [έρευνες] που είχε αρχίσει ο Πλάτων, χρησιμοποιώντας σε αυτές και τη μέθοδο της ανάλυσης.[b] Ακόμη περισσότερο τελειοποίησαν τη γεωμετρία ο Αμύκλας από την Ηράκλεια, ένας από τους εταίρους του Πλάτωνα, ο Μέναιχμος, ο οποίος ήταν μαθητής του Ευδόξου και συνδέθηκε με τον Πλάτωνα, και ο αδελφός αυτού Δεινόστρατος. Ο Θεύδιος από τη Μαγνησία φαίνεται, επίσης, ότι διακρίθηκε τόσο στα μαθηματικά όσο και στην υπόλοιπη φιλοσοφία· διότι και τα *στοιχεία* συνέταξε καλώς και γενίκευσε πολλά από τα επιμέρους[c] [θεωρήματα]. Και βεβαίως ο Αθήναιος από την Κύζικο, ο οποίος έζησε κατά την ίδια εποχή, έγινε επιφανής και στους άλλους κλάδους των μαθηματικών και, ιδιαιτέρως, στη γεωμετρία. Αυτοί ζούσαν όλοι μαζί στην Ακαδημία και διεξήγαγαν τις έρευνές τους από κοινού. Ο Ερμότιμος από την Κολοφώνα προήγαγε περισσότερο αυτά που είχαν επιτύχει ο Εύδοξος και ο Θεαίτητος, ανακάλυψε πολλά [από τα περιεχόμενα] στα *Στοιχεία* και συνέγραψε ορισμένα περί [γεωμετρικών] τόπων. Ο Φίλιππος από τη Μένδη, ο οποίος ήταν μαθητής του Πλάτωνα, και εκείνος τον προέτρεψε να ασχοληθεί με τα μαθηματικά, έκανε τις έρευνές του σύμφωνα με τις υποδείξεις του Πλάτωνα, ανέλαβε δε να κάνει όσα νόμιζε ότι συμβάλλουν στη φιλοσοφία του Πλάτωνα.

Μέχρι αυτού [του σημείου], λοιπόν, αφηγούνται την εξέλιξη αυτής της επιστήμης όσοι συνέγραψαν ιστορίες. Δεν είναι δε πολύ νεώτερος αυτών ο Ευκλείδης, ο οποίος συγκέντρωσε τα *στοιχεία*, έβαλε σε τάξη πολλά [θεωρήματα] του Ευδόξου, τελειοποίησε πολλά [θεωρήματα] του Θεαιτήτου, και προσέφερε αψεγάδιαστες αποδείξεις σε όσα οι προγενέστεροί του είχαν αποδείξει με τρόπο λιγότερο αυστηρό. Αυτός ο άνδρας έζησε την εποχή του Πτολεμαίου του πρώτου· διότι ο Αρχιμήδης, ο οποίος ακολουθεί αμέσως μετά τον πρώτο [Πτολεμαίο], μνημονεύει τον Ευκλείδη, και, ακόμη, λέγεται ότι ο Πτολεμαίος τον ρώτησε κάποτε αν υπάρχει τρόπος για [να μάθει κανείς] τη γεωμετρία πιο σύντομος από τη *Στοιχείωση* και εκείνος απάντησε ότι δεν υπάρχει «βασιλική οδός» προς τη γεωμετρία. Είναι, λοιπόν, νεώτερος από τους [μαθητές] του Πλάτωνα, αλλά πρεσβύτερος του Ερατοσθένη και του Αρχιμήδη. Διότι αυτοί ήταν σύγχρονοι, όπως αναφέρει κάπου ο Ερατοσθένης. Όσον αφορά τις προθέσεις του ήταν Πλατωνικός και φιλικά διακείμενος προς τη φιλοσοφία αυτή· για αυτόν τον λόγο άλλωστε έθεσε ως τελικό σκοπό της *Στοιχειώσεως* την κατασκευή των λεγόμενων πλατωνικών σχημάτων. Υπάρχουν και πολλά άλλα μαθηματικά συγγράμματα αυτού του άνδρα, θαυμαστά ως προς την ακρίβειά τους και μεστά επιστημονικών διερευνήσεων. Διότι τέτοια είναι τα *Οπτικά* και τα *Κατοπτρικά*, η *Μουσική στοιχείωσις*, και επίσης

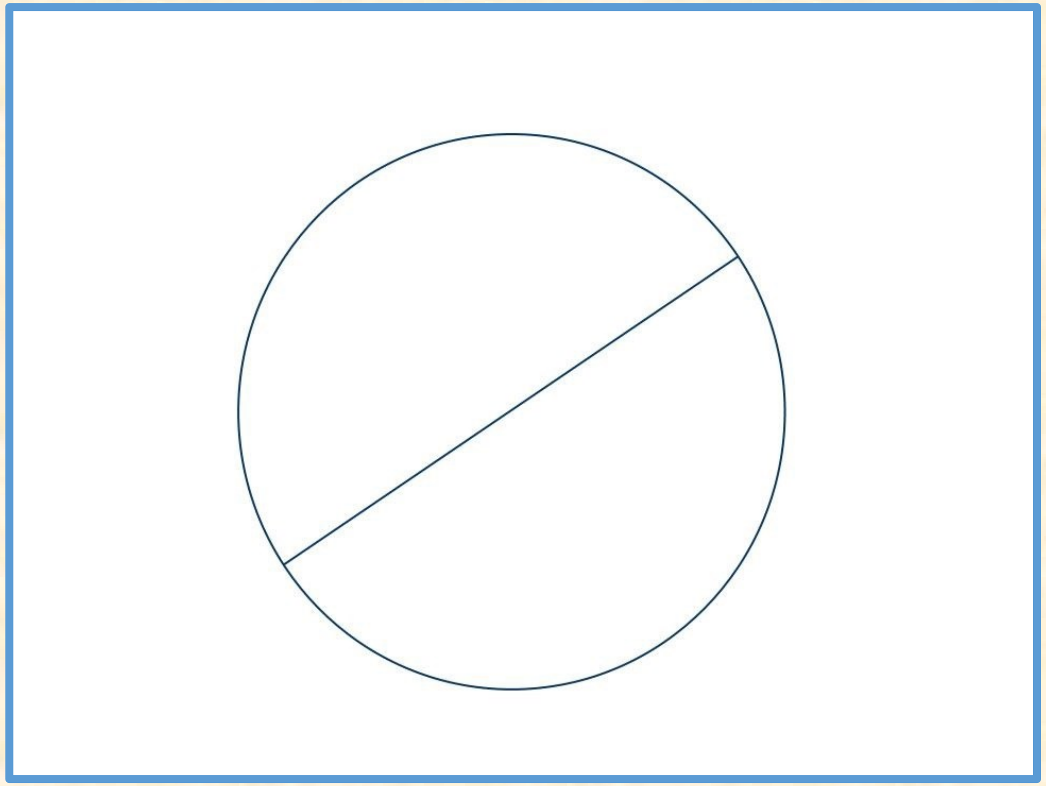
Προκαταβολικά:
Οι βασικές καινοτομίες των πρώιμων ελληνικών μαθηματικών

- Η ιδέα ότι πίσω από τα αισθητά πράγματα υπάρχουν κρυμμένες αριθμητικές αναλογίες.
- Η εμφάνιση της απόδειξης.
- Η στροφή στις αποδείξεις «διά των γραμμών».
- Η προσπάθεια συγκρότησης των μαθηματικών σε αξιωματική και παραγωγική βάση.

Οι μαθηματικές προτάσεις που αποδίδονται στον Θαλή

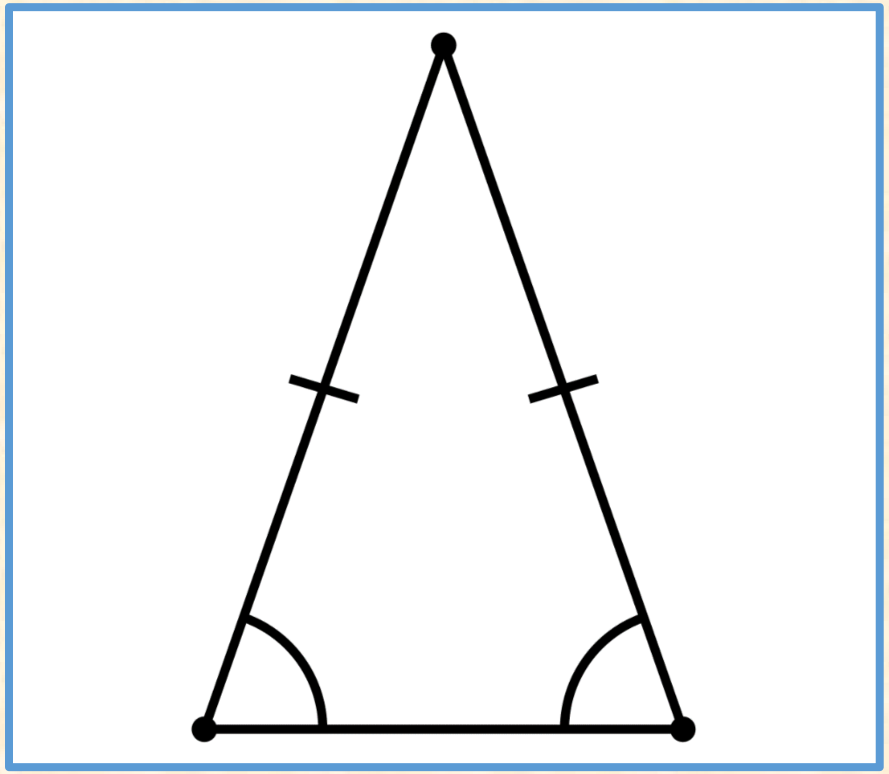
«Λέγεται (φασιν) ότι πρώτος ο Θαλής απέδειξε (ἀποδεῖξαί) ότι η διάμετρος διχοτομεί τον κύκλο»

Πρόκλος, *Εις Ευκλ.* 157.10

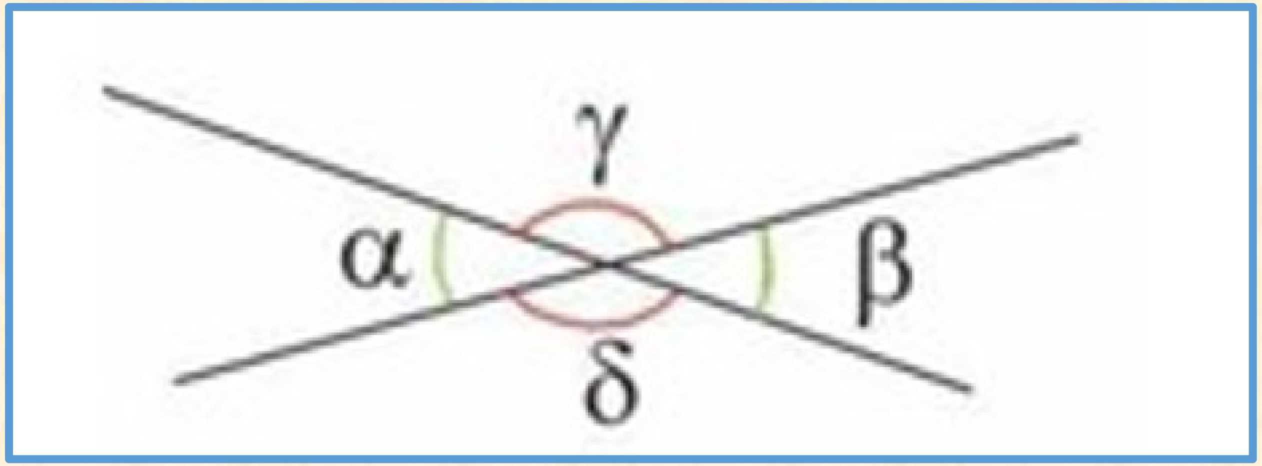


«Λέγεται ότι πρώτος εκείνος επεσήμανε και είπε (ἐπιστῆσαι καὶ εἰπεῖν) ότι οι γωνίες της βάσης κάθε ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες. Μάλιστα τις ίσες γωνίες τις αποκαλούσε, κατά το αρχαϊκώτερον, «όμοιες».»

Πρόκλος, *Εις Ευκλ.* 250.20

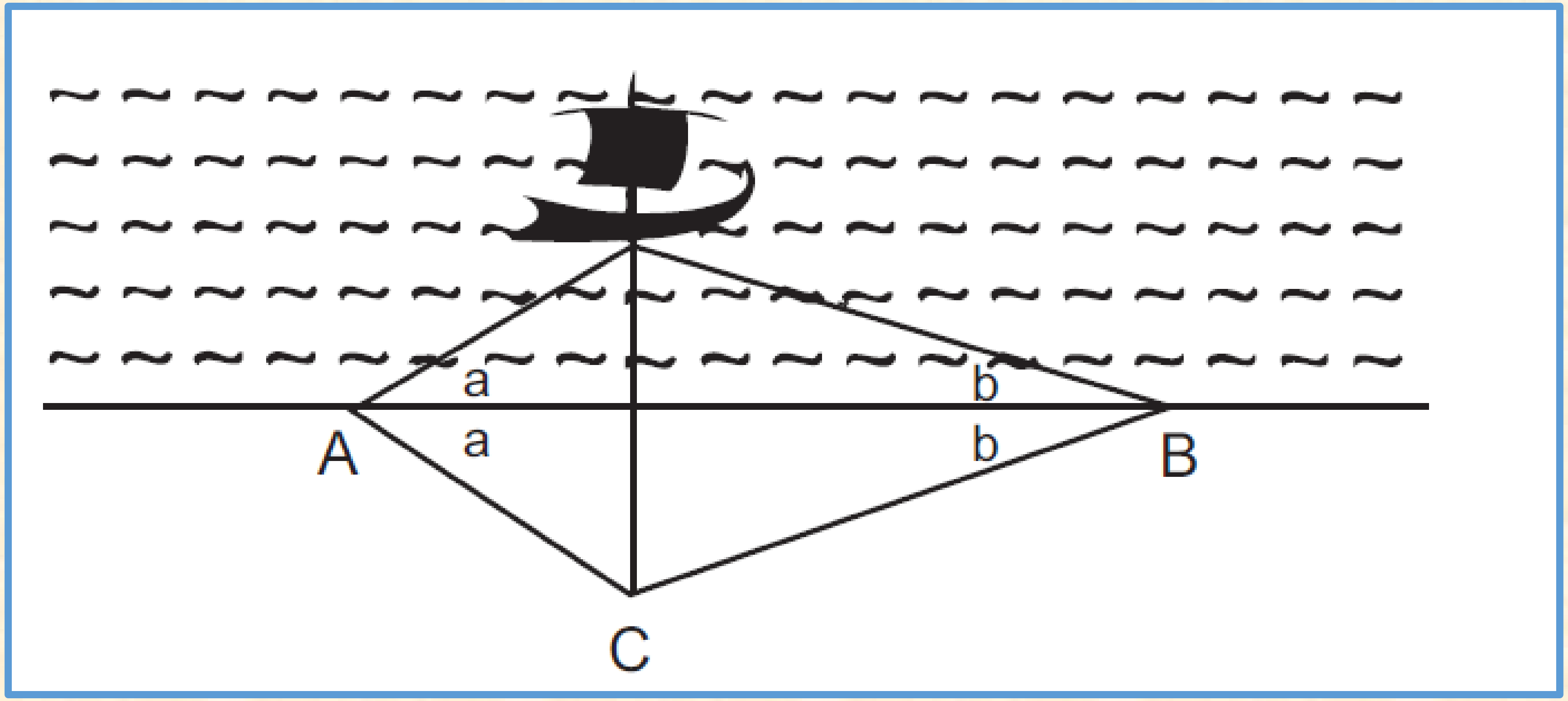


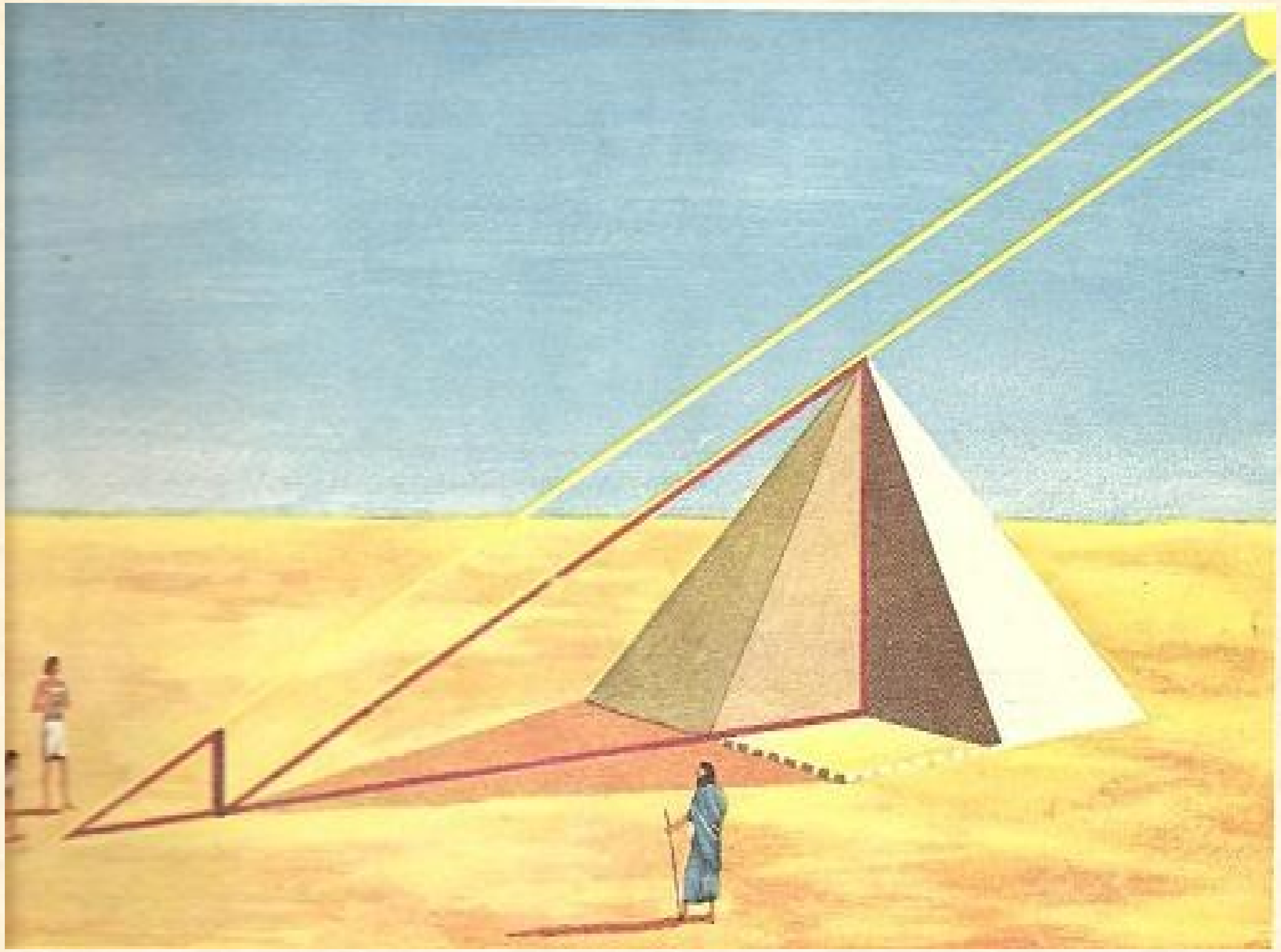
«Όπως αναφέρει ο Εύδημος, ο Θαλής βρήκε πρώτος το θεώρημα ότι οι κατά κορυφήν γωνίες είναι ίσες. Την επιστημονική απόδειξη (ἐπιστημονικῆς ἀποδείξεως), όμως, την έδωσε ο Στοιχειωτής.»
Πρόκλος, *Εις Ευκλ.* 299.1



Επίσης το θεώρημα ισότητας τριγώνων Γ-Π-Γ αποδίδεται στον Θαλή. «Λένε μάλιστα ότι το χρησιμοποίησε για να μετρήσει την απόσταση ενός πλοίου στη θάλασσα»

Πρόκλος, *Εις Ευκλ.* 352.14-8





Διογένης Λαέρτιος Ι, 27:

Ὁ Ἱερώνυμος μάλιστα λέει ὅτι (ὁ Θαλῆς) μέτρησε τὸ ὕψος τῶν πυραμίδων ἀπὸ τὴ σκιά τους, κάνοντας τὶς παρατηρήσεις του τὴ στιγμὴ τῆς μέρας ποὺ ἡ σκιά μας εἶναι ἴση μὲ τὸ ὕψος μας.

Πλίνιος (1ος αι. μ.Χ.) ***N. H.* xxxvi. 12 (17)**:

Ο Θαλής ανακάλυψε πως να υπολογίζει το ύψος των πυραμίδων και άλλων παρόμοιων αντικειμένων μετρώντας τη σκιά του αντικειμένου την ώρα που το σώμα έχει ίδιο μήκος με τη σκιά του

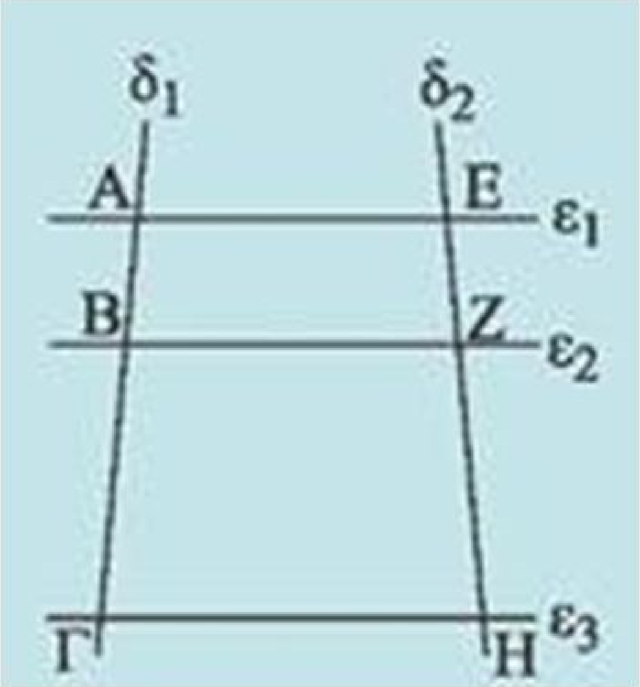
Πλούταρχος (1ος αι. μ.Χ.) **(*Conv. Sept. sap.* 2, 147A)**:

Ανάμεσα στα πολλά σου κατορθώματα, ο Αμάσις ήταν ιδιαίτερα ευχαριστημένος για την μέτρησή σου της πυραμίδας. Γιατί, χωρίς κόπο ή τη βοήθεια ενός οργάνου και απλά τοποθετώντας ένα ξύλο στην άκρη της σκιάς της πυραμίδας – δημιουργώντας έτσι δύο τρίγωνα με τις ακτίνες του ήλιου -, έδειξες ότι η πυραμίδα έχει ως προς το ξύλο τον ίδιο λόγο που έχει η μια σκιά με την άλλη.

Το θεώρημα του Θαλή:

Θεώρημα

Αν τρεις τουλάχιστον παράλληλες ευθείες τέμνουν δυο άλλες ευθείες, ορίζουν σε αυτές τμήματα ανάλογα.



Αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$, τότε $\dfrac{AB}{EZ} = \dfrac{B\Gamma}{ZH} = \dfrac{A\Gamma}{EH}$

Ποια είναι εν κατακλείδι η συμβολή του Θαλή στην ιστορία της γεωμετρίας;

• Οι προτάσεις που αποδίδονται στον Θαλή αφορούν σχεδόν στην ολότητά τους σε σχήματα με συμμετρία. Μπορούμε λοιπόν να εικάσουμε ότι ο Θαλής μελέτησε ιδιότητες τέτοιων σχημάτων.

• Η μεγάλη συνεισφορά, καθώς φαίνεται, έγκειται στο ότι ο Θαλής προσέδωσε στο γεωμετρικό σχήμα έναν τελείως νέο ρόλο: **για πρώτη φορά στην ιστορία το σχήμα γίνεται αντικείμενο μελέτης και μαθηματικού στοχασμού** (thématisation de la figure).

• Η **χάραξη του σχήματος**, η παρατήρηση των **ιδιοτήτων του** και στη συνέχεια η **δικαιολόγηση του ισχυρισμού** (σε ό,τι αφορά τις ιδιότητες) προς τον «άλλο», τον συνομιλητή –δικαιολόγηση η οποία έχει τη μορφή ενός *λόγου* (discours) ο οποίος συνδυάζει τη μία με την άλλη τις ξεχωριστές ιδιότητες–, αυτά είναι μερικά από <u>τα αρχικά στάδια της εξέλιξης της γεωμετρίας</u> που μπορούμε ως ένα βαθμό να τα αποδώσουμε στον Θαλή και ευρύτερα στη σχολή της Ιωνίας· και αυτή είναι, ίσως, η σημαντικότερη συνεισφορά της σχολής αυτής στην ιστορία των Μαθηματικών.

Οι «πρώτες αρχές»

Οι περισσότεροι από τους πρώτους φιλόσοφους πίστευαν ότι οι υλικές αρχές είναι οι μόνες αρχές των πάντων. Γιατί αυτό από το οποίο προέρχονται όλα όσα υπάρχουν… και στο οποίο αποσυντίθενται σε τελευταία ανάλυση… αυτό λένε ότι είναι το «στοιχείο»… Γιατί πρέπει να υπάρχει μια φυσική ουσία, μία ή περισσότερες, από την οποία γίνονται τα άλλα πράγματα ενώ αυτή διατηρείται. Αλλά σ' ότι αφορά το πλήθος και τη μορφή αυτής της πρώτης αρχής δεν συμφωνούν όλοι…

Αριστοτέλης, *Μετ.* Α 3, 983 β 6

«Οι ούτω καλούμενοι Πυθαγόρειοι ήταν οι πρώτοι που ασχολήθηκαν με τη μελέτη των μαθηματικών επιστημών, κάνοντας μεγάλη πρόοδο σε αυτές. Έχοντας εξοικειωθεί με αυτές, ο Πυθαγόρας άρχισε να θεωρεί ότι οι αρχές τους είναι οι αρχές όλων των πραγμάτων.»
Αριστοτέλης, *Μτφ.* 985 b 23

Ο Πυθαγόρας τίμησε την μελέτη των αριθμών περισσότερο από κάθε άλλον. Έκανε μεγάλη πρόοδο σε αυτή, ξεφεύγοντας από τους πρακτικούς υπολογισμούς των εμπόρων.
Αριστόξενος

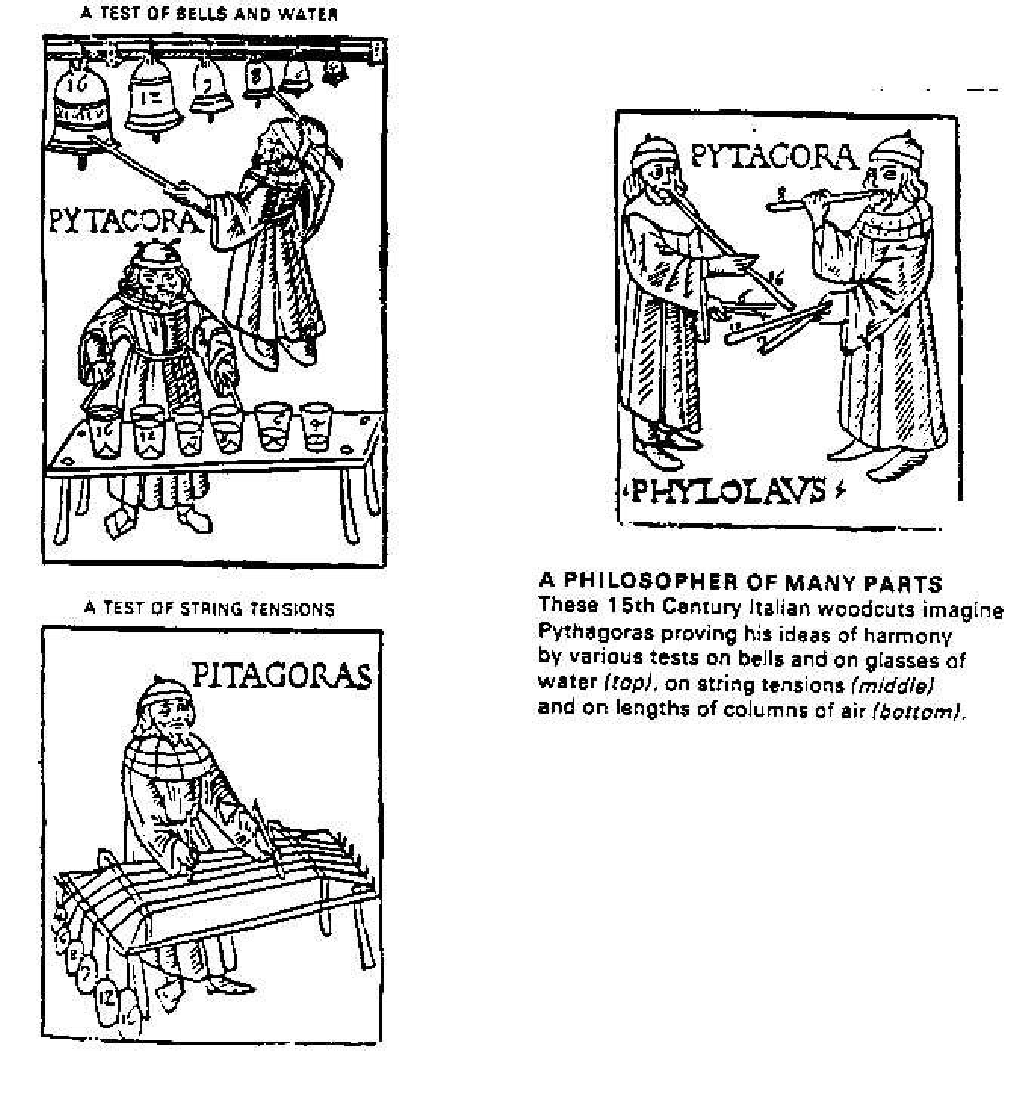
Ο Πυθαγόρας μεταμόρφωσε την φιλοσοφία της γεωμετρίας… μελετώντας θεωρητικά τις αρχές της και εξετάζοντας τα θεωρήματα σε νοητικό και άυλο επίπεδο. Ανακάλυψε την θεωρία των αναλογιών και την κατασκευή των κοσμικών στερών.
Έύδημος, απ. 133

Η προέλευση του όρου «μαθηματικός»

Ὑπάρχουν δύο παραλλαγὲς τῆς ἰταλικῆς φιλοσοφίας ποὺ ἀποκαλεῖται πυθαγορική. Γιατὶ ὅσοι τὴν ἀσκοῦν ἀνήκουν καὶ αὐτοὶ σὲ δύο ὁμάδες, τοὺς «ἀκουσματικοὺς» καὶ τοὺς «μαθηματικούς». Οἱ «ἀκουσματικοὶ» ἀναγνωρίζονταν ὡς πυθαγόρειοι ἀπὸ τὴν ἄλλη ὁμάδα, ἀλλὰ οἱ ἴδιοι δὲν δέχονταν ὅτι οἱ «μαθηματικοὶ» ἦταν πυθαγόρειοι καὶ πίστευαν ὅτι οἱ φιλοσοφικὲς ἀναζητήσεις τους δὲν ξεκινοῦσαν ἀπὸ τὸν Πυθαγόρα, ἀλλὰ ἀπὸ τὸν Ἵππασο. Γι' αὐτὸν τὸν Ἵππασο ἄλλοι λένε ὅτι ἦταν Κροτωνιάτης καὶ ἄλλοι ὅτι ἦταν Μεταποντῖνος. Ὅσοι ὅμως ἀπὸ τοὺς πυθαγόρειους καταγίνονται μὲ τὶς ἐπιστῆμες παραδέχονται ὅτι οἱ «ἀκουσματικοὶ» εἶναι πυθαγόρειοι, ἀλλὰ ἰσχυρίζονται ὅτι οἱ ἴδιοι εἶναι ἀκόμη περισσότερο καὶ ὅτι ὅσα λένε εἶναι ἡ ἀλήθεια.

280 Ἰάμβλιχος, *Περὶ τῆς κοινῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης*, σ. 76, 16-77, 2

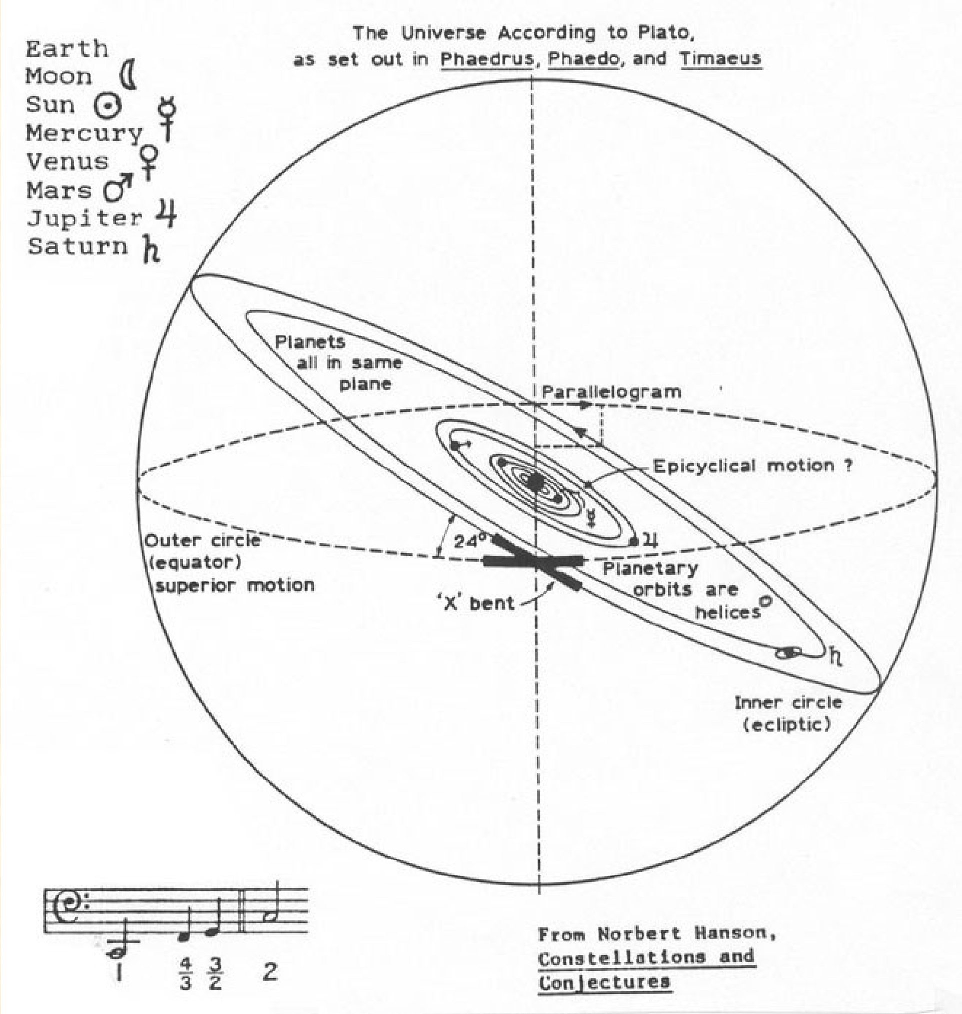
Τι μαθηματικά αποδίδονται στους Πυθαγόρειους;



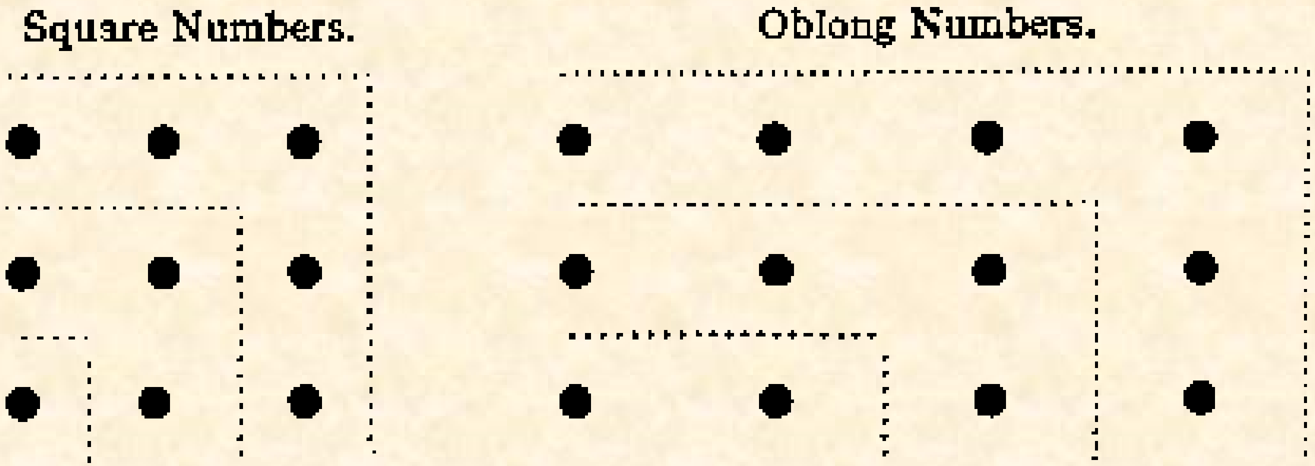
253 Πλάτων, *Πολιτεία* 530 d (DK 47 b 1): *Κινδυνεύει, ἔφην, ὡς πρὸς ἀστρονομίαν ὄμματα πέπηγεν, ὡς πρὸς ἐναρμόνιον φορὰν ὦτα παγῆναι, καὶ αὗται ἀλλήλων ἀδελφαί τινες αἱ ἐπιστῆμαι εἶναι, ὡς οἵ τε Πυθαγόρειοί φασι καὶ ἡμεῖς, ὦ Γλαύκων, συγχωροῦμεν.*

Φαίνεται, εἶπα, ὅτι ὅπως τὰ μάτια εἶναι φτιαγμένα γιὰ τὴν ἀστρονομία, ἔτσι καὶ τ' αὐτιὰ εἶναι φτιαγμένα γιὰ τὴν ἁρμονία, καὶ αὐτὲς οἱ δύο ἐπιστῆμες εἶναι ἀδελφές, ὅπως λένε οἱ πυθαγόρειοι καὶ συμφωνοῦμε κι ἐμεῖς, Γλαύκων.

Τίμαιος και Κοσμογονία



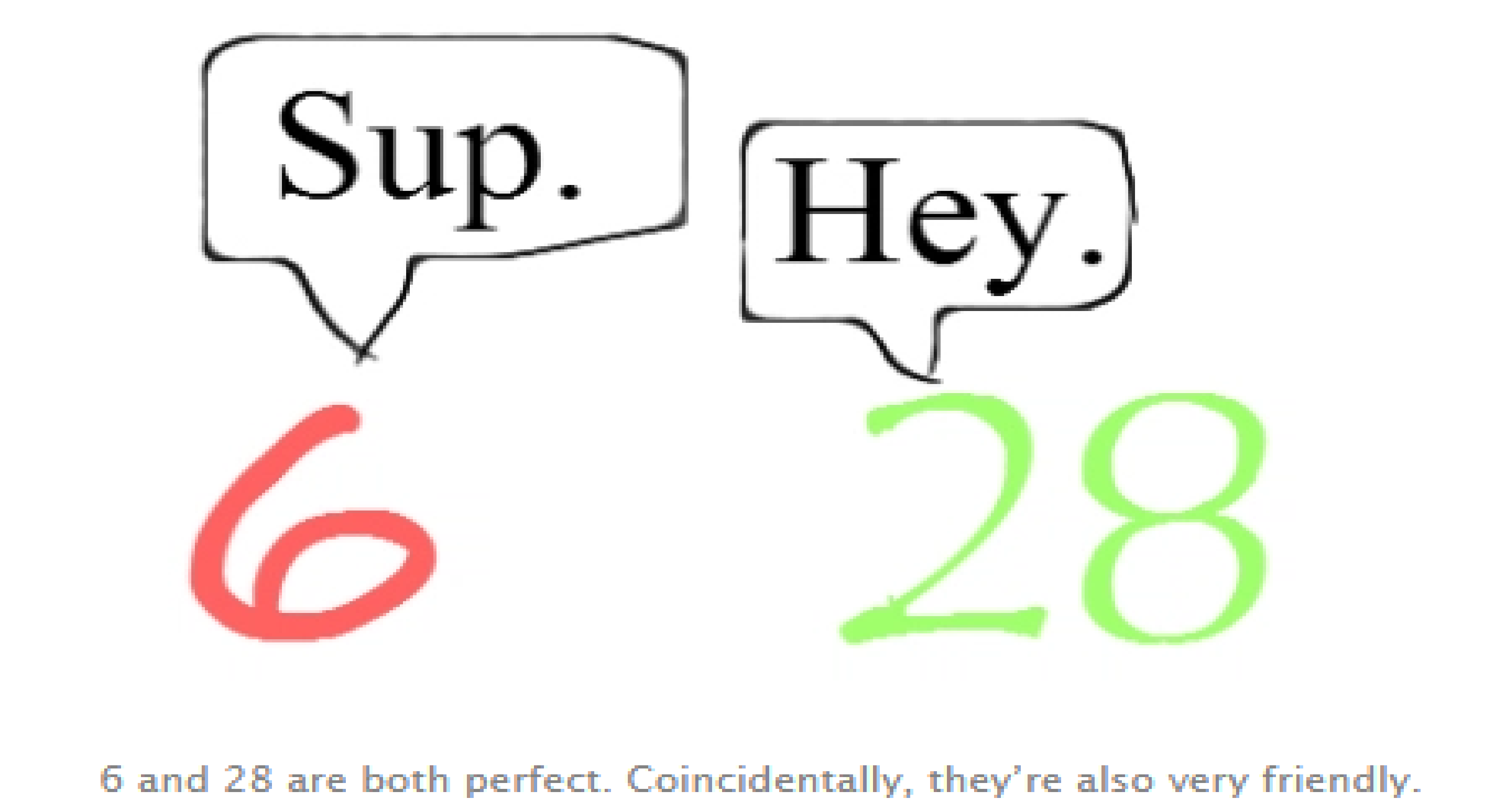
Η Γεωμετρικοποίηση της Αριθμητικής



Σημαντικά θέματα:

1. Μετατροπές χωρίων
2. Εύρεση διαιρετών
3. Ταξινομήσεις αριθμών

Τέλειοι Αριθμοί



1 + 2 + 3 = 6.

1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28.

Φίλιοι Αριθμοί

Αθρ. διαιρ. του 220 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284
Αθρ. διαιρ. του 284 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220


ΤΟ ΜΥΑΛΟ ΒΡΙΣΚΕΙ ΤΙΣ ΛΥΣΕΙΣ
ΟΤΑΝ ΠΑΨΕΙ ΝΑ ΣΚΕΦΤΕΤΑΙ
ΕΤΕΡΟΣ ΕΓΩ
ΜΙΑ ΤΑΙΝΙΑ ΤΟΥ ΣΩΤΗΡΗ ΤΣΑΦΟΥΛΙΑ

Μελέτη των άρτιων και περιττών αριθμών

Αποτελέσματα: τα παρακάτω θεωρήματα των Στοιχείων του Ευκλείδη

Α. Θεωρήματα για το άθροισμα αριθμών:

IX.21: Το άθροισμα οσωνδήποτε άρτιων αριθμών είναι άρτιος.

IX.22: Το άθροισμα άρτιου πλήθους περιττών αριθμών είναι άρτιος.

IX.23: Το άθροισμα περιττού πλήθους περιττών αριθμών είναι περιττός.

Β. Θεωρήματα για τη διαφορά αριθμών:

IX.24 & IX.26: Η διαφορά μεταξύ δύο αριθμών της αυτής αρτιότητας είναι άρτιος.

IX.25 & IX.27: Η διαφορά μεταξύ δύο αριθμών αντίθετης αρτιότητας είναι περιττός.

Γ. Θεωρήματα για το γινόμενο αριθμών:

IX.28: Το γινόμενο περιττού αριθμού με άρτιο είναι άρτιος.

IX.29: Το γινόμενο περιττού αριθμού με περιττό είναι περιττός.

Πορίσματα:

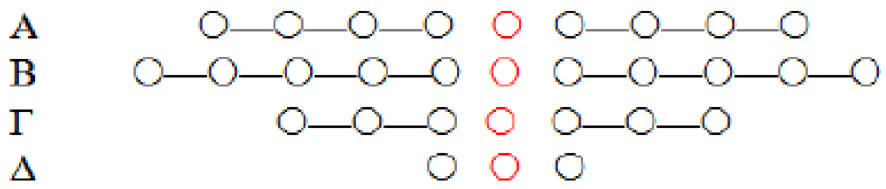
1) Το τετράγωνο ενός άρτιου αριθμού είναι άρτιος αριθμός

2) Το τετράγωνο ενός περιττού αριθμού είναι περιττός αριθμός.

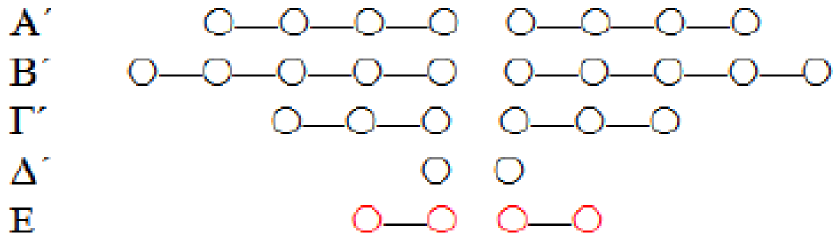
Ένα παράδειγμα μιας πιθανής «απόδειξης» με «ψήφους»

Θεώρημα IX.22

Έστω ότι προσθέτουμε τους περιττούς αριθμούς Α, Β, Γ, Δ που απεικονίζονται παρακάτω



Αν αποσπάσουμε από τον κάθε αριθμό την κεντρική μονάδα, τότε σχηματίζονται οι αριθμοί Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄ οι οποίοι είναι άρτιοι και, καθώς το πλήθος τους είναι άρτιο, μπορούμε να συγκεντρώσουμε τις μονάδες που αποσπάσαμε ώστε να σχηματισθεί ο αριθμός Ε ο οποίος εξ υποθέσεως είναι άρτιος. Σχηματίζονται έτσι οι αριθμοί



Το άθροισμα των αριθμών Α, Β, Γ, Δ είναι εκ κατασκευής ίσο με το άθροισμα των Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄, Ε και οι αριθμοί αυτοί είναι όλοι άρτιοι. Από το προηγούμενο θεώρημα όμως (IX.21), γνωρίζουμε ότι το άθροισμα οσωνδήποτε άρτιων αριθμών είναι άρτιος αριθμός. Άρα, το άθροισμα των αριθμών Α, Β, Γ και Δ είναι άρτιος αριθμός.

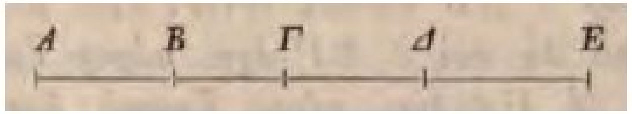
Το ίδιο θεώρημα (IX.22) όπως αποδεικνύεται στον Ευκλείδη

κβ'.

Ἐὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσιν, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν ἄρτιον ᾖ, ὁ ὅλος ἄρτιος ἔσται.

Συγκείσθωσαν γὰρ περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁσοιδηποτοῦν ἄρτιοι τὸ πλῆθος οἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ· λέγω, ὅτι ὅλος ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ἕκαστος τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ περιττός ἐστιν, ἀφαιρεθείσης μονάδος ἀφ' ἑκάστου ἕκαστος τῶν λοιπῶν ἄρτιος ἔσται· ὥστε καὶ ὁ συγκείμενος ἐξ αὐτῶν ἄρτιος ἔσται. ἔστι δὲ καὶ τὸ πλῆθος τῶν μονάδων ἄρτιον. καὶ ὅλος ἄρα ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



κα'.

Ἐὰν ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσιν, ὁ ὅλος ἄρτιός ἐστιν.

Συγκείσθωσαν γὰρ ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν οἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ· λέγω, ὅτι ὅλος ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ἕκαστος τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ ἄρτιός ἐστιν, ἔχει μέρος ἥμισυ· ὥστε καὶ ὅλος ὁ ΑΕ ἔχει μέρος ἥμισυ. ἄρτιος δὲ ἀριθμός ἐστιν ὁ δίχα διαιρούμενος· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΕ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

☞ Σε τι διαφέρει η απόδειξη του Ευκλείδη από την «απόδειξη» στο πλαίσιο της ψηφοφορίας;

(e) The Irrational

Schol. i. in Eucl. *Elem.* x., Eucl. ed. Heiberg v. 415. 7–417. 14

Ἦλθον δὲ τὴν ἀρχὴν ἐπὶ τὴν τῆς συμμετρίας ζήτησιν οἱ Πυθαγόρειοι πρῶτοι αὐτὴν ἐξευρόντες ἐκ τῆς τῶν ἀριθμῶν κατανοήσεως. κοινοῦ γὰρ ἁπάντων ὄντος μέτρου τῆς μονάδος καὶ ἐπὶ τῶν μεγεθῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν οὐκ ἠδυνήθησαν. αἴτιον δὲ τὸ πάντα μὲν καὶ ὁποιονοῦν ἀριθμὸν καθ' ὁποιασοῦν τομὰς διαιρούμενον μόριόν τι καταλιμπάνειν ἐλάχιστον καὶ τομῆς ἀνεπίδεκτον, πᾶν δὲ μέγεθος ἐπ' ἄπειρον διαιρούμενον μὴ καταλιμπάνειν μόριον, ὃ διὰ τὸ εἶναι ἐλάχιστον τομὴν οὐκ ἐπιδέξεται, ἀλλὰ καὶ ἐκεῖνο ἐπ' ἄπειρον τεμνόμενον ποιεῖν ἄπειρα μόρια, ὧν ἕκαστον ἐπ' ἄπειρον τμηθήσεται, καὶ ἁπλῶς τὸ μὲν μέγεθος κατὰ μὲν τὸ μερίζεσθαι μετέχειν τῆς τοῦ ἀπείρου ἀρχῆς, κατὰ δὲ τὴν ὁλότητα τῆς τοῦ πέρατος, τὸν δὲ ἀριθμὸν κατὰ μὲν τὸ μερίζεσθαι τῆς τοῦ πέρατος,

κατὰ δὲ τὴν ὁλότητα τῆς τοῦ ἀπείρου . . . τῶν γὰρ Πυθαγορείων λόγος τὸν πρῶτον τὴν περὶ τούτων θεωρίαν εἰς τοὐμφανὲς ἐξαγαγόντα ναυαγίῳ περιπεσεῖν.

Η ανακάλυψη της ασυμμετρίας

Μαρτυρίες

Πάππος

ἦλθον δὲ τὴν ἀρχὴν ἐπὶ τὴν τῆς συμμετρίας ζήτησιν οἱ Πυθαγόρειοι πρῶτοι αὐτὴν ἐξευρόντες ἐκ τῆς τῶν ἀριθμῶν κατανοήσεως. κοινοῦ γὰρ ἁπάντων ὄντος μέτρου τῆς μονάδος καὶ ἐπὶ τῶν μεγεθῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν οὐκ ἠδυνήθησαν. αἴτιον δὲ τὸ πάντα μὲν καὶ

ὅτι δὲ χρήσιμος ἡ τούτων θεωρία, μὴ καὶ περιττὸν λέγειν. τῶν γὰρ Πυθαγορείων λόγος τὸν πρῶτον τὴν περὶ τούτων θεωρίαν εἰς τοὐμφανὲς ἐξαγαγόντα ναυαγίῳ περιπεσεῖν, καὶ ἴσως ᾐνίττοντο, ὅτι πᾶν τὸ ἄλογον ἐν τῷ παντὶ καὶ ἄλογον καὶ ἀνείδεον κρύπτεσθαι φιλεῖ.

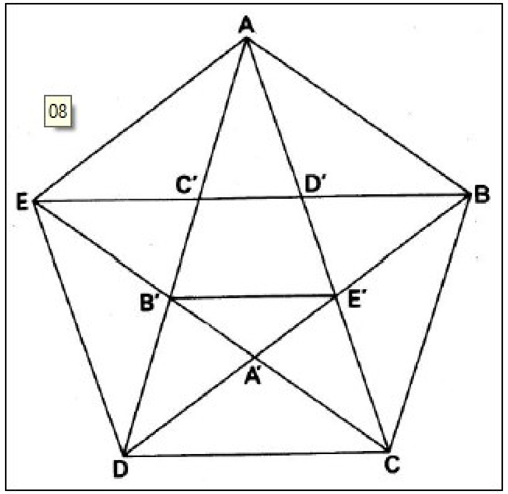
Πρόκλος

γεωμετρίᾳ δόξαν αὐτοῦ λαβόντος. ἐπὶ δὲ τούτοις Πυθαγόρας τὴν περὶ αὐτὴν φιλοσοφίαν εἰς σχῆμα παιδείας ἐλευθέρου μετέστησεν, ἄνωθεν τὰς ἀρχὰς αὐτῆς ἐπισκοπούμενος καὶ ἀΰλως καὶ νοερῶς τὰ θεωρήματα διερευνώμενος, ὃς δὴ καὶ τὴν τῶν ἀλόγων πραγματείαν καὶ τὴν τῶν κοσμικῶν σχημάτων σύστασιν ἀνεῦρεν. μετὰ δὲ τοῦτον Ἀναξαγόρας ὁ Κλαζο-

Ιάμβλιχος

Iambl. *De Vita Pythag.* 18. 88, ed. Deubner 52. 2-8

Περὶ δ' Ἱππάσου μάλιστα, ὡς ἦν μὲν τῶν Πυθαγορείων, διὰ δὲ τὸ ἐξενεγκεῖν καὶ γράψασθαι πρώτως σφαῖραν τὴν ἐκ τῶν δώδεκα πενταγώνων ἀπώλετο κατὰ θάλατταν ὡς ἀσεβήσας, δόξαν δὲ λάβοι ὡς εὑρών, εἶναι δὲ πάντα ἐκείνου τοῦ ἀνδρός·



Αριθμοί

α΄. Μονάς ἐστιν, καθ᾽ ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται.
β΄. Ἀριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος.

Σύμμετρα/Ασύμμετρα Μεγέθη

Αριθμητική & Γεωμετρία

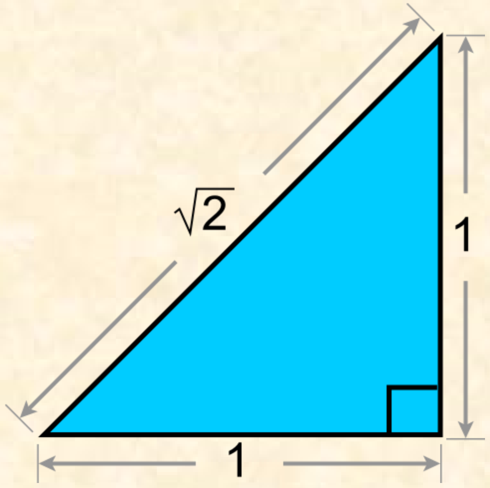
α΄. Σύμμετρα μεγέθη λέγεται τὰ τῷ αὐτῷ μέτρῳ μετρούμενα, ἀσύμμετρα δέ, ὧν μηδὲν ἐνδέχεται κοινὸν μέτρον γενέσθαι.

Η αρχαιότερη σωζόμενη απόδειξη της ασυμμετρίας

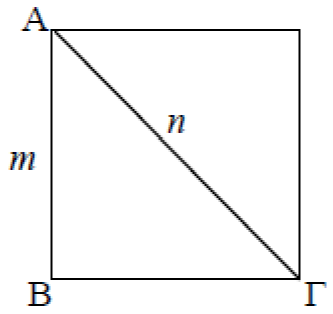
Αριστοτέλης, *Αναλυτικά πρότερα* 41a23–30

πάντες γὰρ οἱ διὰ τοῦ ἀδυνάτου περαίνοντες τὸ μὲν ψεῦδος συλλογίζονται, τὸ δ’ ἐξ ἀρχῆς ἐξ ὑποθέσεως δεικνύουσιν, ὅταν ἀδύνατόν τι συμβαίνῃ τῆς ἀντιφάσεως τεθείσης, **οἷον ὅτι ἀσύμμετρος ἡ διάμετρος διὰ τὸ γίνεσθαι τὰ περιττὰ ἴσα τοῖς ἀρτίοις συμμέτρου τεθείσης.** τὸ μὲν οὖν ἴσα γίνεσθαι τὰ περιττὰ τοῖς ἀρτίοις συλλογίζεται, τὸ δ’ ἀσύμμετρον εἶναι τὴν διάμετρον ἐξ ὑποθέσεως δείκνυσιν, ἐπεὶ ψεῦδος συμβαίνει διὰ τὴν ἀντίφασιν.

Διότι όλοι όσοι συμπεραίνουν δια του αδυνάτου συνάγουν κατόπιν συλλογισμού ένα ψευδές συμπέρασμα, και αποδεικνύουν αυτό που εξ υποθέσεως είχαν διατυπώσει στην αρχή, όταν, από την υπόθεση του αντιθέτου, προκύπτει κάτι αδύνατο, **παραδείγματος χάριν, ότι η διαγώνιος [ενός τετραγώνου] είναι ασύμμετρη [προς την πλευρά], διότι εάν υποτεθεί ότι είναι σύμμετρη, οι άρτιοι αριθμοί γίνονται ίσοι με τους περιττούς**. Συνάγεται λοιπόν κατόπιν συλλογισμού ότι οι περιττοί αριθμοί γίνονται ίσοι με τους άρτιους, και αποδεικνύεται από την υπόθεση ότι η διαγώνιος είναι ασύμμετρη, επειδή, εάν υποτεθεί το αντίθετο, το συμπέρασμα που προκύπτει είναι ψευδές.



Υπόθεση: Μια ανακατασκευή της απόδειξης



Η διαγώνιος ΑΓ και η πλευρά ΑΒ ή είναι σύμμετρες ή είναι ασύμμετρες. Έστω ότι είναι σύμμετρες. Τότε θα υπάρχει ένα μοναδιαίο μήκος με βάση το οποίο η ΑΓ θα είναι n μονάδες και η ΑΒ θα είναι m μονάδες, όπου n και m ακέραιοι αριθμοί και μάλιστα οι ελάχιστοι δυνατοί. Τούτο σημαίνει ότι οι n και m δεν έχουν κοινούς διαιρέτες διαφορετικούς από τη μονάδα. Αφού το τετράγωνο με πλευρά την ΑΓ είναι διπλάσιο του τετραγώνου με πλευρά την ΑΒ, θα έχουμε $n^2 = 2m^2$. Από τη σχέση αυτή συνάγεται ότι ο αριθμός n^2 είναι άρτιος, άρα και ο n θα είναι άρτιος. Τότε όμως ο m θα πρέπει να είναι περιττός, επειδή οι n και m δεν έχουν άλλον κοινό διαιρέτη εκτός από τη μονάδα. Επειδή ο n είναι άρτιος μπορούμε να θέσουμε $n = 2p$, οπότε το τετράγωνό του θα είναι $(2p)^2$ και αυτό ισούται προς $2m^2$. Έχουμε λοιπόν $(2p)^2 = 2m^2$, και επομένως $2p^2 = m^2$. Από εδώ προκύπτει ότι ο m^2, κατά συνέπεια και ο m, είναι άρτιος αριθμός. Γνωρίζουμε όμως ήδη ότι ο m είναι περιττός. Άρα ο m είναι ταυτόχρονα άρτιος και περιττός, το οποίο είναι άτοπο.

Ιστοριογραφικό ερώτημα:
Είναι «νόμιμες» οι ανακατασκευές;

Χαρακτηριστικό παράδειγμα ανακατασκευών:

Knorr, Wilburn R. (2022), *Η Αρχαία παράδοση των γεωμετρικών προβλημάτων*, μτφ. Τ. Μιχαηλίδης, (Ηράκλειο: ΠΕΚ, *The Ancient Tradition of Geometric Problems* 1986).

Για μια κριτική σε αυτή την προσέγγιση, διαβάστε αυτό:

Saito, Ken. "Mathematical Reconstructions Out, Textual Studies In: 30 Years in the Historiography of Greek Mathematics." *Revue d'histoire des mathématiques* 4.1 (1998): 131-142.

V.1 και X.2

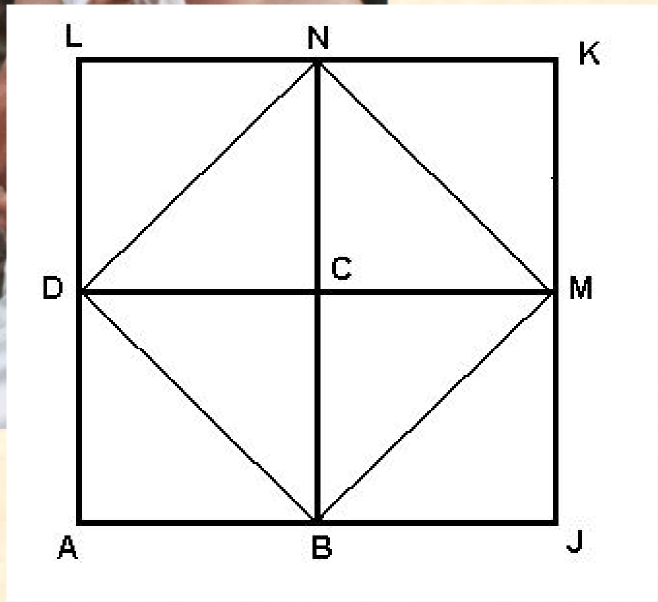
1.

Ἐὰν δοθῶσι δύο ἄνισοι ἀριθμοί, ἀνθυφαιρῆται δὲ πάντοτε ὁ μικρότερος ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου, ἐὰν ὁ λειπόμενος οὐδέποτε καταμετρῇ τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, μέχρις ὅτου ὑπολειφθῇ μονάς, οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ θὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

2.

Ἐὰν δοθῶσι δύο ἄνισα μεγέθη καὶ ἀνθυφαιρεῖται πάντοτε τὸ μικρότερον ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου, τὸ ἑκάστοτε δὲ ὑπόλοιπον οὐδέποτε καταμετρῇ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ, τὰ μεγέθη θὰ εἶναι ἀσύμμετρα.

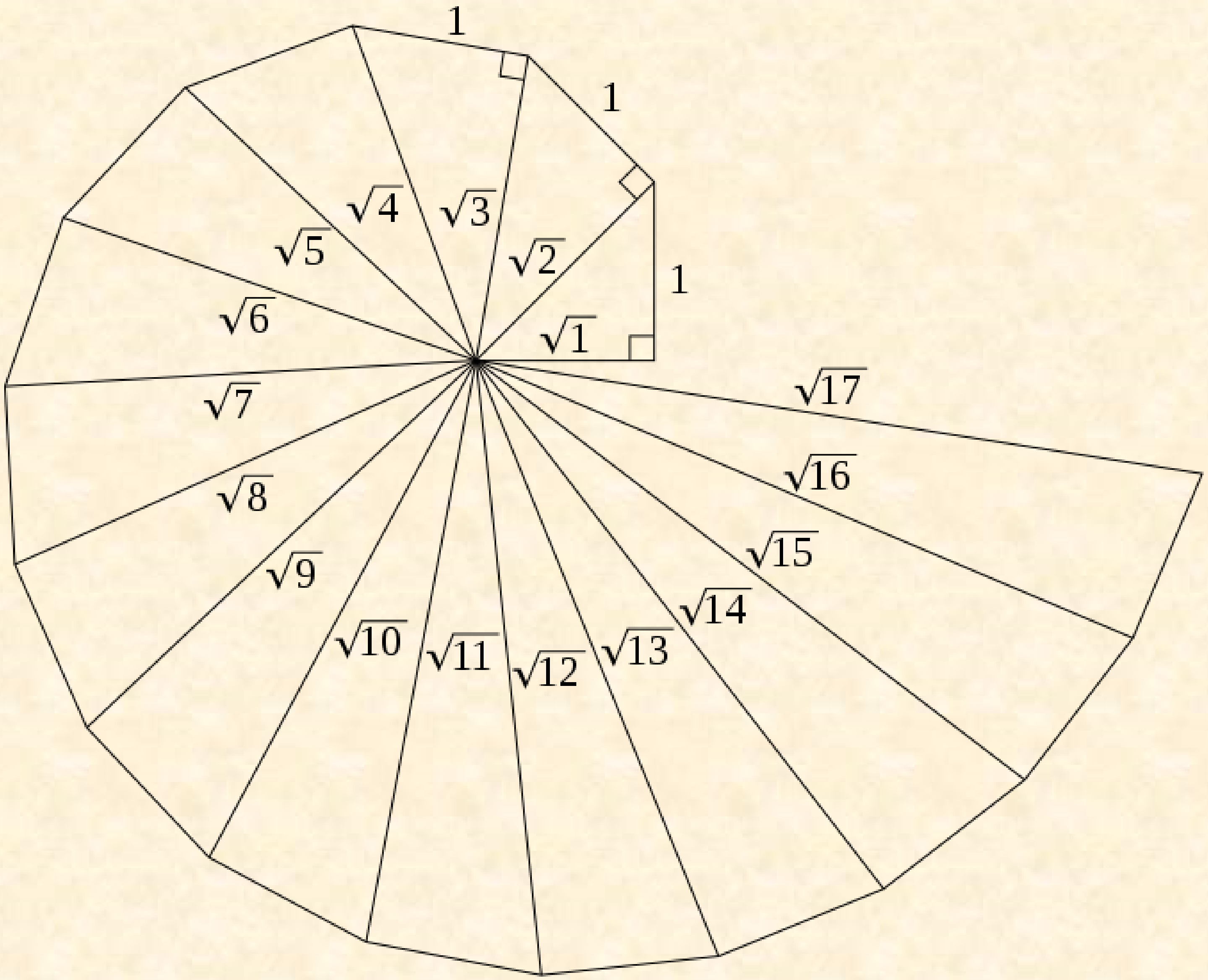
Το μάθημα γεωμετρίας στον *Μένωνα* του Πλάτωνα



Θεαίτητος

Plato, *Theaetetus* 147 D–148 B

ΘΕΑΙ. Ο Θεόδωρος αυτός εδώ μας έκανε κάποιο διάγραμμα σχετικά με τις δυνάμεις, γι' αυτές των τριών ποδών και των πέντε ποδών, αποδεικνύοντας ότι στο μήκος είναι ασύμμετρες με αυτή του ενός πόδα, και συνέχισε με τον τρόπο αυτό παίρνοντας καθεμιά μέχρι τη δύναμη των δεκαεπτά ποδών· σ' αυτή διέκοψε κάπως. Έτσι, επειδή οι δυνάμεις φαίνονταν άπειρες στο πλήθος, ήλθε στον νου μας τέτοια σκέψη, να προσπαθήσουμε να τις συλλάβουμε σε ένα πράγμα, με το οποίο να ονομάσουμε όλες αυτές τις δυνάμεις.


1
1
1
$\sqrt{1}$
$\sqrt{2}$
$\sqrt{3}$
$\sqrt{4}$
$\sqrt{5}$
$\sqrt{6}$
$\sqrt{7}$
$\sqrt{8}$
$\sqrt{9}$
$\sqrt{10}$
$\sqrt{11}$
$\sqrt{12}$
$\sqrt{13}$
$\sqrt{14}$
$\sqrt{15}$
$\sqrt{16}$
$\sqrt{17}$

Νόμοι

γελοίαν τε καὶ αἰσχρὰν ἄγνοιαν ἐν τοῖς ἀνθρώποις πᾶσιν, ταύτης ἀπαλλάττουσιν.

Οι Πυθαγόρειοι ήταν τόσο εξαγριωμένοι μαζί του που του έχτισαν ένα τάφο ενόσω αυτός ήταν ακόμα εν ζωή. Λέγεται ότι ο Ίππασος πέθανε σε ένα ναυάγιο τιμωρημένος από την οργή των Θεών.

Απόσπασμα DK[18] A4 (Ιάμβλιχος)