ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ιστορία των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών είναι ο αρχαιότερος κλάδος όχι μόνο της ιστορίας των Μαθηματικών αλλά της ιστορίας των επιστημών συνολικά. Η νεότερη ιστορία της αρχίζει περί τα μέσα του 19ου αιώνα[1] και από τότε μέχρι σήμερα έχει αποτελέσει πεδίο ερευνητικής ενασχόλησης μερικών από τους πρωτεργάτες της ιστορίας των επιστημών, όπως είναι ο Paul Tannery (1843-1904), ο Hieronymus Georg Zeuthen (1839-1920), ο Johann Ludwig Heiberg (1854-1928), ο Thomas Little Heath (1861-1940), ο Otto Neugebauer (1899-1990), ο Bartel Leentert van der Waerden (1903-1996), ο Wilbur Richard Knorr (1945-1997), ο Árpád Szabó (1913-2001) κ.ά. Σκοπός μας δεν είναι να κάνουμε εδώ μία λεπτομερή περιοδολόγηση της ιστορίας της Ιστορίας των Μαθηματικών ούτε να παρουσιάσουμε συστηματικά τις κύριες τάσεις σύμφωνα με τις οποίες αναπτύχθηκε έως τώρα ο κλάδος στη διάρκεια των τελευταίων 150 χρόνων. Λίγα λόγια, όμως, πρέπει να αναφερθούν για τις τάσεις της ιστοριογραφίας ειδικά των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών, προκειμένου να γίνει καλύτερα κατανοητό το υπόβαθρο επάνω στο οποίο αναπτύχθηκε η διαμάχη για τη «γεωμετρική άλγεβρα» και, γενικότερα, για την ερμηνεία των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών, που είναι το θέμα αυτής της συλλογής.

Η νεότερη ιστορία της ιστορίας των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών αρχίζει, όπως αναφέρθηκε, περί τα μέσα του 19ου αιώνα, εποχή κατά την οποία εγκαινιάσθηκε στην Ευρώπη ένα μεγάλο πρόγραμμα κριτικών εκδόσεων όλων των σωζόμενων έργων της αρχαίας ελληνικής γραμματείας, συμπεριλαμβανομένων και των έργων των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών και αστρονόμων. Μερικά από τα έργα αυτά είχαν ήδη εκδοθεί κατά το παρελθόν σε μη κριτικές εκδό-

1. Αναφερόμαστε στη νεότερη περίοδο της ιστορίας των Μαθηματικών διότι, υπό μία έννοια, κείμενα για την ιστορία των Μαθηματικών υπάρχουν ήδη από την εποχή ακόμη της ελληνικής αρχαιότητας. Συγκεκριμένα, ο μαθητής του Αριστοτέλη Εύδημος ο Ρόδιος είχε γράψει στα τέλη του 4ου π.Χ. αιώνα ιστορίες της γεωμετρίας και της αστρονομίας, ενώ πληροφορίες για τη ζωή και το έργο γνωστών μαθηματικών της αρχαιότητας περιέχονται σε πολλά κείμενα της σχολιαστικής παράδοσης των πρώτων μεταχριστιανικών και των βυζαντινών χρόνων, σε έργα Αράβων μαθηματικών και σχολιαστών, καθώς και σε ανθολόγια και εγκυκλοπαίδειες που γράφηκαν κατά την περίοδο του Μεσαίωνα στην Ευρώπη. Παρά το γεγονός ότι ορισμένες από τις πληροφορίες που περιέχουν αυτά τα κείμενα είναι έγκυρες και σε μερικές περιπτώσεις πολύτιμες για την ανασυγκρότηση κάποιων επεισοδίων της ιστορίας των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών, τα ίδια τα κείμενα αποτελούν μάλλον σχόλια ποικίλων ειδών για τα Μαθηματικά του παρελθόντος παρά *Ιστορία* με την αυστηρή σημασία του όρου.

σεις, άλλα όμως ήσαν ανέκδοτα και σώζονταν είτε σε χειρόγραφη μορφή είτε σε αραβικές, λατινικές και άλλες μεταφράσεις. Το έργο των νέων εκδόσεων ανέλαβε, κυρίως, ο εκδοτικός οίκος Teubner της Λειψίας και σε αυτό συμμετείχαν διάσημοι λόγιοι: ο H. Diels, ο J.L. Heiberg, ο F. Hultsch, ο P. Tannery, ο R. Hoche, ο G. Friedlein, ο H. Schöne, ο H. Pistelli και άλλοι διακεκριμένοι ελληνιστές και ιστορικοί των Μαθηματικών. Καρπός του μεγαλόπνοου αυτού προγράμματος είναι οι δεκάδες τόμοι με τις στερεότυπες, όπως χαρακτηρίζονται, εκδόσεις των έργων των Ελλήνων μαθηματικών και αστρονόμων της αρχαιότητας, που έχουν συμπεριληφθεί στην περίφημη Bibliotheca Scriptorum Graecorum et Romanorum Teubneriana (Τοϋβνεριανή Βιβλιοθήκη Ελλήνων και Ρωμαίων συγγραφέων), και αποτέλεσαν την πιο σημαντική «πρώτη ύλη» της ιστορικής έρευνας για τα ελληνικά Μαθηματικά που αναπτύχθηκε σε όλον τον 20ό αιώνα.

Το έργο της κριτικής έκδοσης των κειμένων που άρχισε τον 19ο συνεχίστηκε στη διάρκεια του 20ού αιώνα, με μερικά πολύ σημαντικά αποτελέσματα, όπως είναι η δεύτερη, συμπληρωμένη έκδοση των έργων του Αρχιμήδη (1910-1915) από τον Heiberg, που έγινε μετά την ανακάλυψη του παλίμψηστου κώδικα της Κωνσταντινούπολης (1906), η μνημειώδης μελέτη και έκδοση του συνόλου της αραβικής και λατινικής παράδοσης των κειμένων του Αρχιμήδη από τον M. Clagett (1964-1984), η ανακάλυψη και έκδοση των αραβικών μεταφράσεων μερικών κειμένων των οποίων έχει χαθεί το ελληνικό πρωτότυπο, όπως είναι το *Περί πυρίων* του Διοκλή από τον G.J. Toomer (1976) και τα βιβλία 4-7 των *Αριθμητικών* του Διοφάντου από τους J. Sesiano (1982) και R. Rashed (1984), η έκδοση παπυρικών κειμένων μαθηματικού, αστρονομικού και αστρολογικού περιεχομένου, προερχόμενων από την Αίγυπτο της ελληνιστικής και ελληνορρωμαϊκής περιόδου, από τον R.A. Parker (1972), τον A. Jones (1999), κ.ά. Σήμερα, επίσης, είναι σε εξέλιξη ένα πρόγραμμα καινούργιας έκδοσης των έργων του Αρχιμήδη, βασισμένης σε μια νέα ανάγνωση των χειρογράφων και ιδίως του παλίμψηστου κώδικα της Κωνσταντινούπολης, με την αξιοποίηση των δυνατοτήτων που παρέχει η σύγχρονη τεχνολογία αυτή τη φορά. Η έρευνα και η έκδοση των κειμένων, λοιπόν, αποτέλεσε και εξακολουθεί να αποτελεί μόνιμη συνιστώσα της έρευνας για την ιστορία των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών.

Παράλληλα με τις εκδόσεις των κειμένων άρχισε ήδη από τα τέλη του 19ου αιώνα μια συστηματική προσπάθεια μελέτης, κατανόησης και ερμηνείας του περιεχομένου τους. Τα κείμενα που δημοσιεύονται σε αυτήν τη συλλογή εντάσσονται στην παράδοση των ερευνών αυτής της κατηγορίας και απηχούν τα δύο κύρια μεθοδολογικά ρεύματα που έχουν διαμορφωθεί στο πλαίσιο αυτής της παράδοσης. Πράγματι, στις αφηγήσεις της ιστορίας των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών –και γενικά των Μαθηματικών της αρχαιότητας– διακρίνουμε δύο κύριες μεθοδολογικές τάσεις. Στη μία τάση ανήκουν όλες εκείνες οι αφηγήσεις που προσεγγίζουν τα αρχαία Μαθηματικά πρωτίστως από τη σκοπιά του μαθηματικού και δευτερευόντως από τη σκοπιά του ιστορικού. Στην άλλη τάση ανήκουν όσες αφηγήσεις προσεγγίζουν τα αρχαία Μαθηματικά από τη σκοπιά του ιστορικού. Για λόγους συντομίας θα ονομάζουμε το είδος της ιστορίας των Μαθηματικών που ανήκει στην πρώτη τάση «παραδοσιακή ιστορία των Μαθηματικών» και το είδος της ιστορίας των Μαθηματικών που ανήκει στη δεύτερη τάση «νέα ιστορία των Μαθηματικών». Όπως είναι αντιληπτό, οι ονομασίες αυτές απηχούν την ηλικία των δύο τάσεων. Πράγματι, αν και κάποιες διαφοροποιήσεις από το κυρίαρχο «παραδοσιακό» ρεύμα ανιχνεύονται ήδη στα τέλη του 19ου[2] και σε μερικές σποραδικές μελέτες που δημοσιεύθηκαν σε διάφορες περιόδους του 20ού αιώνα,[3] η νέα ιστοριογραφία εμφανίζεται στο προσκήνιο με όλη της τη δυναμική μόλις το τελευταίο τέταρτο του 20ού αιώνα. Προβάλλει αιφνιδιαστικά, με τη μορφή της ρήξης προς την παραδοσιακή ιστοριογραφία, αρχικά με αφορμή το θέμα της αλγεβρικής ερμηνείας ενός σημαντικού μέρους των Μαθηματικών της κλασικής και της ελληνιστικής εποχής και, στη συνέχεια, με τη διατύπωση διαφορετικών αναγνώσεων σε άλλα κεφάλαια της ιστορίας όχι μόνο των ελληνικών αλλά και των βαβυλωνιακών Μαθηματικών, καθώς και για μεθοδολογικά ζητήματα για την ιστοριογραφία των Μαθηματικών γενικά.

Σε αυτήν τη συλλογή δημοσιεύονται τα κείμενα μέσω των οποίων διεξήχθη η πρώτη και πιο σημαντική διαμάχη ανάμεσα στα δύο ιστοριογραφικά ρεύματα, διαμάχη η οποία ανέδειξε και νομιμοποίησε σε μεγάλο βαθμό τη νέα ιστοριογραφία. Η διαμάχη αυτή επικεντρώθηκε μεν σε ένα αρκετά ειδικό θέμα –στον υποτιθέμενο, κατά την παραδοσιακή ιστοριογραφία, αλγεβρικό χαρακτήρα ενός τμήματος των Μαθηματικών της κλασικής και ελληνιστικής περιόδου (δηλαδή των Μαθηματικών του Ευκλείδη, του Απολλωνίου και σε μικρότερο βαθμό του Αρχιμήδη)–, ουσιαστικά όμως αποτέλεσε την αφορμή να διατυπωθεί με σαφήνεια η νέα ιστοριογραφική άποψη για το πώς πρέπει να μελετούμε *ως ιστορικοί των Μαθηματικών* τα μαθηματικά κείμενα του παρελθόντος. Χάριν συντομίας, αλλά και για άλλους λόγους που θα γίνουν κατανοητοί αμέσως πιο κάτω, θα αναφερόμαστε στο εξής σε αυτήν τη συγκεκριμένη διαμάχη χρησιμοποιώντας την έκφραση «διαμάχη για τη "γεωμετρική άλγεβρα"».[4]

2. Βλ. J. Lützen, W. Parket: «Conflicting Tendencies in the Historiography of Mathematics: M. Cantor and H. G. Zeuthen». Περιέχεται στη συλλογή *The History of Modern Mathematics*, επιμ. E. Knobloch, D.E. Rowe, τ. 3, Boston, Academic Press, 1994, σ. 1-42.

3. Μνημονεύονται στο κείμενο του S. Unguru «Για την ανάγκη να ξαναγραφεί η ιστορία των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών», που δημοσιεύεται σε αυτήν τη συλλογή.

4. Μια περιεκτική επισκόπηση των ιστοριογραφικών τάσεων που διαμορφώθηκαν στην ιστορία των Μαθηματικών τις τελευταίες δεκαετίες του 20ού αιώνα περιέχεται στο κείμενο του D.E. Rowe «New Trends and Old Images in the History of Mathematics», που δημοσιεύθηκε

Το ιστορικό της διαμάχης

Η παραδοσιακή ερμηνεία για τον χαρακτήρα του εν λόγω μέρους των κλασικών και ελληνιστικών Μαθηματικών, η οποία διαμορφώθηκε από μελέτες που έγιναν αρχικά στα τέλη του 19ου και στις αρχές του 20ού αιώνα και εν συνεχεία στις δεκαετίες 1930-1950, βασίζεται σε μια σειρά παραδοχές, οι πιο ουσιαστικές από τις οποίες είναι οι εξής:

1. Ένα μέρος από την ύλη των *Στοιχείων* και των *Δεδομένων* του Ευκλείδη φαίνεται σαν να μην παρουσιάζει κάποιο ουσιαστικό γεωμετρικό περιεχόμενο, δεν φαίνεται να είναι αρμονικά ενταγμένο στα δύο αυτά έργα και γι' αυτό πιστεύεται ότι προέρχεται από ένα προγενέστερο, ξένο προς την ελληνική γεωμετρία, σώμα μαθηματικών γνώσεων και τεχνικών.
2. Αυτό το προγενέστερο σώμα μαθηματικών γνώσεων και τεχνικών ήταν κατ' ουσίαν αλγεβρικό,
3. και εντοπίζεται στη βαβυλωνιακή μαθηματική παράδοση.
4. Οι Έλληνες μαθηματικοί της προ του Ευκλείδη περιόδου (συγκεκριμένα οι Πυθαγόρειοι) άντλησαν ευρέως από αυτήν την, υποτιθέμενη αλγεβρική, βαβυλωνιακή παράδοση (η οποία ήταν διατυπωμένη στη γλώσσα της αριθμητικής) και βασιζόμενοι σε αυτήν ανέπτυξαν μια δική τους άλγεβρα, η οποία δεν διαφέρει ουσιαστικά από την, υποτιθέμενη, άλγεβρα των Βαβυλωνίων παρά μόνον κατά το ότι είναι διατυπωμένη στη γλώσσα της γεωμετρίας (από όπου και η ονομασία «γεωμετρική άλγεβρα»).
5. Το αίτιο που οδήγησε τους Έλληνες μαθηματικούς να διατυπώσουν τη βαβυλωνιακή άλγεβρα στη γλώσσα της γεωμετρίας υπήρξε η ανακάλυψη της ασυμμετρίας, που έγινε στη διάρκεια του 5ου π.Χ. αιώνα. Ως συνέπεια αυτού του κρίσιμου γεγονότος οι Έλληνες μαθηματικοί συνειδητοποίησαν τη διχοτομία μεταξύ διακριτών αριθμών και συνεχών γεωμετρικών μεγεθών και υπό το πρίσμα αυτής της διχοτομίας υποχρεώθηκαν να επανεξετάσουν τις, υποτιθέμενες, αλγεβρικές τεχνικές που είχαν κληρονομήσει από τους Βαβυλωνίους και ήσαν διατυπωμένες στη γλώσσα της αριθμητικής. Αποτέλεσμα αυτής της επανεξέτασης ήταν η επαναδιατύπωση των τεχνικών σε γεωμετρική γλώσσα αυτήν τη φορά και, εν τέλει, η δημιουργία μιας «γεωμετρικής άλγεβρας», στο πλαίσιο της οποίας τα γεωμετρικά μεγέθη, π.χ. το ευθύγραμμο τμήμα, το τετράγωνο, το ορθογώνιο κ.λπ., κατανοούνται ως *γενικά* μεγέθη, αποκτούν αριθμητική υπόσταση (λ.χ. το ευθύγραμμο τμήμα αποκτά μήκος, το τετράγωνο και το ορθογώνιο αποκτούν εμβαδόν κ.λπ.) και υπόκεινται σε αριθμητικούς χειρισμούς (λ.χ. η εύρεση του γινομένου δύο ευθύγραμμων τμημάτων επιτυγχάνεται με την κατασκευή του ορθογωνίου που σχηματίζεται με πλευρές τα δύο ευθύγραμμα τμήματα).

Η «γεωμετρική άλγεβρα», λοιπόν, είναι μια ερμηνευτική άποψη για τα αρχαία ελληνικά Μαθηματικά, που πρεσβεύει ότι πίσω από ένα σημαντικό μέρος της ελληνικής γεωμετρίας κρύβεται μια αλγεβρική ερευνητική «ατζέντα», την οποία κληρονόμησαν και ανέπτυξαν οι Έλληνες μαθηματικοί ήδη από τον 5ο π.Χ. αιώνα. Βασίζεται δε αυτή η άποψη στα παραπάνω πέντε σημεία, τα οποία, ωστόσο –πρέπει να το υπογραμμίσουμε– είναι απλές παραδοχές, δηλαδή υποθέσεις, και δεν αποτελούν τεκμηριωμένα γεγονότα στην ιστορία των Μαθηματικών. Έτσι, δεν έχουμε καμία ένδειξη ότι στη διάρκεια του 5ου π.Χ. αιώνα έχουμε συστηματική και μαζική μεταφορά μαθηματικών γνώσεων από τη Μεσοποταμία στην Ελλάδα.[5] Επίσης, ο αλγεβρικός χαρακτήρας των βαβυλωνιακών Μαθηματικών δεν είναι, και αυτός, τίποτε περισσότερο από ένα ερμηνευτικό σχήμα που σκοπό έχει να εξηγήσει τους αλγορίθμους με βάση τους οποίους έχουν συνταχθεί μία σειρά αριθμητικοί πίνακες που περιέχονται σε πολλές πινακίδες σφηνοειδούς γραφής.[6] Οι ίδιοι αλγόριθμοι, όμως, είναι δυνατόν να εξηγηθούν και με άλλα, μη αλγεβρικά, ερμηνευτικά σχήματα.[7] Τέλος, ο ακριβής

στον συλλογικό τόμο *Vita Mathematica*, επιμ. R. Calinger, Washington, The Mathematical Association of America, 1996, σ. 3-16. Μια πιο πρόσφατη μελέτη σχετική με το θέμα είναι το άρθρο του A. Bernard «Ancient Rhetoric and Greek Mathematics. A Response to a Modern Historiographical Dilemma», *Science in Context*, τ. 15 (2003), σ. 391-412. Χρήσιμη, τέλος, είναι η παρουσίαση της διαμάχης για τη «γεωμετρική άλγεβρα» που κάνουν οι Γ. Θωμαΐδης και Ν. Καστάνης στην εργασία τους «Ο όρος γεωμετρική άλγεβρα στο στόχαστρο μιας σύγχρονης επιστημολογικής διαμάχης» (δημοσιεύθηκε στον τόμο *Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά: Κείμενα Ιστορίας και Φιλοσοφίας*, επιμ. Δ. Α. Αναπολιτάνος, Β. Καρασμάνης, Αθήνα, Τροχαλία, 1993, σ. 27-52).

5. Αντίθετα, υπάρχουν σαφείς ενδείξεις ότι τέτοια μεταφορά έγινε πράγματι, αλλά πολύ αργότερα, κατά την ελληνιστική και την ελληνορρωμαϊκή περίοδο.

6. Όπως αναφέρει εύστοχα ο M.S. Mahoney, «Όλα όσα περιέχουν τα βαβυλωνιακά κείμενα είναι μια σειρά από αριθμητικές πράξεις που (συνήθως) οδηγούν σε σωστά αποτελέσματα. Τα υπόλοιπα είναι ερμηνείες του ιστορικού. Οι Βαβυλώνιοι διατυπώνουν το πρόβλημα και υπολογίζουν τη λύση· η εξαγωγή αυτής της λύσης είναι έργο του ιστορικού και μπορεί να διερωτηθεί κανείς κατά πόσον η εξαγωγή της λύσης μάς αποκαλύπτει περισσότερα για τις μαθηματικές γνώσεις του ιστορικού παρά για τα Μαθηματικά των ίδιων των Βαβυλωνίων» [«Babylonian Algebra: Form vs. Content», *Studies in History and Philosophy of Science*, τ. 1 (1970-71), σ. 369-380, στη σ. 375].

7. Ο Δανός ιστορικός των Μαθηματικών και διαπρεπής σύγχρονος μελετητής των προελληνικών Μαθηματικών Jens Høyrup, σε μια σειρά από μελέτες του των τελευταίων δεκαπέντε ετών, αναπτύσσει μια εναλλακτική ερμηνεία των βαβυλωνιακών αλγορίθμων, η οποία βασίζεται σε απλές γεωμετρικές κατασκευές (ο όρος που χρησιμοποιεί ο Høyrup είναι «cut-and-paste κατασκευές» και θα μπορούσε να αποδοθεί ως «*διελεῖν και συντιθέναι* κατασκευές»). Οι κατασκευές αυτές εκτελούνταν, από τις αρχές της δεύτερης π.Χ. χιλιετίας και μετά, από πρακτικούς ανθρώπους (πεδιομέτρες, τοπογράφους, επόπτες κ.λπ.), αρχικά στην αρχαία Μεσοποταμία και στη συνέχεια σε πολλές περιοχές του τότε γνωστού κόσμου. Για μια ολοκληρωμένη παρουσίαση των μελετών του J. Høyrup παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο πρόσφατο βιβλίο του

ρόλος που έπαιξε η ανακάλυψη της ασυμμετρίας στην περαιτέρω πορεία των ελληνικών Μαθηματικών είναι ένα ζήτημα που εξακολουθεί ακόμη και σήμερα να προβληματίζει τους ιστορικούς της επιστήμης.

Προκύπτει, λοιπόν, ότι η «γεωμετρική άλγεβρα» είναι μια ερμηνευτική άποψη που δεν βασίζεται σε πραγματικά ιστορικά στοιχεία αλλά μόνο σε υποθέσεις.[8] Εν τούτοις, αυτή η ερμηνευτική άποψη έχει το «πλεονέκτημα» ότι «εξηγεί» με μεγάλη συνέπεια, απλότητα και ευκολία πολλές σελίδες των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών και, πιο ειδικά, παρέχει ένα πολύ ελκυστικό, ιδίως για τους μαθηματικούς, πλαίσιο «εξήγησης» του κινήτρου που ώθησε τον Ευκλείδη να γράψει εκείνα τα τμήματα από τα *Στοιχεία* που, όπως υποστηρίζουν οι οπαδοί της εν λόγω ερμηνευτικής άποψης, δεν φαίνεται να έχουν κανένα ουσιαστικό γεωμετρικό περιεχόμενο. Και το πλαίσιο αυτό, υποστηρίζουν, δεν είναι άλλο από τον αλγεβρικό τρόπο τού σκέπτεσθαι. Έτσι, οι δέκα πρώτες προτάσεις του δεύτερου βιβλίου των *Στοιχείων* είναι δυνατόν τώρα να ιδωθούν ως μια απλή σειρά στοιχειωδών αλγεβρικών ταυτοτήτων. Παραδείγματος χάριν, η πρόταση II.1, που στο κείμενο του Ευκλείδη είναι διατυπωμένη με μορφή που θα μπορούσε συνοπτικά να γραφεί $Ορθ.\ (a,\ b+c+d) = Ορθ.\ (a,\ b) + Ορθ.\ (a,\ c) + Ορθ.\ (a,\ d)$, ως ισοδύναμη μαθηματικά με την $a(b+c+d) = ab+ac+ad$, «εμπεριέχει» την ιδέα της επιμεριστικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση, ενώ η πρόταση II.4, που είναι διατυπωμένη στα *Στοιχεία* με τη μορφή $T(a+b) = T(a) + T(b) + 2\ Ορθ.\ (a,\ b)$, ως ισοδύναμη μαθηματικά με την ταυτότητα $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$, «εμπεριέχει» τη γνώση αυτής της αλγεβρικής ταυτότητας.[9] Άλλα αποτελέσματα επίσης, όπως οι προτάσεις II.11 και VI.27-29 είναι δυνατόν, με βάση τις τεχνικές της «γεωμετρικής άλγεβρας», να ερμηνεύονται ως γεωμετρικές μέθοδοι για την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώ-

Lengths, Widths, Surfaces: A Portrait of Old Babylonian algebra and its kin, New York, Springer, 2002.

8. Αναφέρεται μερικές φορές ότι ως ιστορικό στοιχείο θα μπορούσε να θεωρηθεί η επιβίωση στην άλγεβρα όρων γεωμετρικής προέλευσης, π.χ. τετράγωνος, κύβος, δύναμις, διτετράγωνος κ.ά. Οι ονομασίες αυτές, σύμφωνα με τον πρωτεργάτη της αλγεβρικής ερμηνείας των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών H.G. Zeuthen, φανερώνουν ότι η άλγεβρα, η οποία από την εποχή του F. Viète και μετά χρησιμοποιεί τον εγγράμματο συμβολισμό για να παραστήσει τα γενικά μεγέθη, χρησιμοποιούσε κατά το παρελθόν γεωμετρικό συμβολισμό. [Βλ. H.G. Zeuthen: «Sur l'origine de l'algèbre», *Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskbab, Mathematisk-fysiske Meddelelser*, τ. 2/4 (1919), σ. 2-70, στη σ. 5.] Η γνώμη των συγγραφέων αυτής της Εισαγωγής, ωστόσο, είναι ότι η αλγεβρική χρήση όλων αυτών των γεωμετρικής προέλευσης όρων δεν τεκμηριώνεται, όσον αφορά τα αρχαία ελληνικά Μαθηματικά, σε εποχές παλαιότερες της εποχής του Ήρωνος και του Διοφάντου και, ιδίως, δεν απαντά στα έργα του Ευκλείδη, του Αρχιμήδη και του Απολλωνίου, των τριών δηλαδή κορυφαίων μορφών της αρχαίας ελληνικής γεωμετρίας.

9. Το σύμβολο *Ορθ. (a, b)* αποτελεί συντομογραφία της έκφρασης «Ορθογώνιο με πλευρές *a*, *b*». Ομοίως, το σύμβολο *T (a)* αποτελεί συντομογραφία της έκφρασης «Τετράγωνο από πλευράς *a*».

σεων. Παρέχοντας όλα αυτά και πολλά άλλα «πλεονεκτήματα», η ανάγνωση των ελληνικών Μαθηματικών μέσω της οπτικής της «γεωμετρικής άλγεβρας» έγινε πολύ γρήγορα κυρίαρχη και υιοθετήθηκε επί έναν σχεδόν αιώνα από τους ιστορικούς των Μαθηματικών, έστω και αν δεν έλειψαν εντελώς σε αυτό το διάστημα κάποιες κριτικές φωνές που εγέρθηκαν κατά καιρούς από λίγους ιστορικούς των Μαθηματικών, π.χ. τους Jacob Klein, Abel Rey, Michael S. Mahoney και, ιδίως, τον Árpád Szabó. Αυτές οι φωνές, όμως, δεν ήσαν ικανές να δημιουργήσουν κανένα ουσιαστικό πρόβλημα στην ορθοδοξία που είχε καθιερωθεί, δεν μπόρεσαν να αμφισβητήσουν τις πεποιθήσεις που είχαν παγιωθεί.

Αυτή η κατάσταση, ωστόσο, δεν επρόκειτο να κρατήσει για πάντα. Το 1975 δημοσιεύθηκε στο επιστημονικό περιοδικό *Archive for History of Exact Sciences* μια σαρωτική κριτική από τον ιστορικό των Μαθηματικών Sabetai Unguru εναντίον του συνόλου της καθιερωμένης αφήγησης της ιστορίας των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών που είχαν διαμορφώσει έως τότε οι σημαντικότεροι ιστορικοί των Μαθηματικών. Τα περισσότερα πυρά της επίθεσής του ο Unguru τα κατηύθυνε εναντίον της ιδέας περί «γεωμετρικής άλγεβρας», ιδέας την οποία κατήγγειλε ως σκέτη φαντασία, ως λογική και ιστορική αδυνατότητα, ως ένα τερατώδες, υβριδικό, αντιφατικό δημιούργημα που κατασκευάστηκε από μαθηματικούς οι οποίοι δεν είχαν καμία αίσθηση της ιστορίας. Αυτή η κατά μέτωπο επίθεση, όπως αναμενόταν, δεν έμεινε αναπάντητη. Προκάλεσε αμέσως τις αντιδράσεις, από τις σελίδες του ίδιου επιστημονικού περιοδικού, ενός επιφανούς εκπροσώπου της παραδοσιακής ιστοριογραφικής σχολής, του B.L. van der Waerden, και δύο διακεκριμένων μαθηματικών, του μαθηματικού του Princeton André Weil (1906-1998) και του H. Freudenthal (1905-1990). Στις απαντήσεις των τριών ανταπάντησε ο Unguru με ένα δεύτερο άρθρο που δημοσιεύθηκε αυτή τη φορά στο επιστημονικό περιοδικό *Isis*, διότι ο εκδότης του *Archive for History of Exact Sciences* δεν δέχθηκε να το φιλοξενήσει στις στήλες του περιοδικού του. Τα επιχειρήματα που ανταλλάχθηκαν από τα δύο στρατόπεδα μπορεί να τα μελετήσει και να τα κρίνει ο αναγνώστης διαβάζοντας αυτό το βιβλίο, στις σελίδες του οποίου φιλοξενούνται τα πέντε κείμενα μέσω των οποίων διεξήχθη η αντιπαράθεση.

Το βαθύτερο περιεχόμενο της διαμάχης

Αν και το θέμα της διαμάχης που διεξήχθη με τα πέντε αυτά κείμενα είναι η «γεωμετρική άλγεβρα», η ουσία της δεν βρίσκεται εκεί αλλά στις βαθύτερες μεθοδολογικές διαφορές που χωρίζουν την παραδοσιακή από τη νέα ιστοριογραφία. Και η αφετηρία αυτών των διαφορών εντοπίζεται στο πώς αντιλαμβάνονται το αντικείμενο της ιστορίας των Μαθηματικών και το έργο του ιστορικού των Μαθηματικών οι εκπρόσωποι των δύο σχολών. Οι εκπρόσωποι της παραδοσιακής ιστοριογραφίας, οι οποίοι είναι κατά κανόνα εν ενεργεία ή πρώην μαθηματικοί με ερευνητικό έργο στα Μαθηματικά, αντιλαμβάνονται τα μαθηματικά κείμενα του παρελθόντος ως ουδέτερα, διαχρονικά, αυτάρκη φυσικά αντικείμενα, μέσα στα οποία είναι ενσωματωμένες ρητά ή σιωπηρά όλες οι ιδέες, τα μηνύματα και τα διδάγματα που εν δυνάμει τούς προσήκουν. Αυτές οι ιδέες και τα μηνύματα, αν και εμφανίζονται σε κείμενα διαφόρων εποχών με τη μία ή την άλλη μορφή, τελικώς δεν αντιπροσωπεύουν παρά διαφορετικές εκφάνσεις των ίδιων αναλλοίωτων μαθηματικών Ιδεών οι οποίες είναι απρόσβλητες στην ιστορική διαδρομή, καθώς διαπερνούν τα πολιτισμικά και ιστορικά περιβάλλοντα μέσα στα οποία αναδύονται. Έτσι, το περιεχόμενο ενός αρχαίου μαθηματικού κειμένου και η μορφή υπό την οποία εμφανίζεται αποτελούν, για τους οπαδούς της παραδοσιακής σχολής, δύο τρόπον τινά ανεξάρτητες μεταξύ τους μεταβλητές. Ο «επιδέξιος» ιστορικός των Μαθηματικών (που έχει διατελέσει ερευνητής μαθηματικός) μπορεί να τις διαχωρίσει, να εξοβελίσει τη συγκεκριμένη απαρχαιωμένη μορφή και να επενδύσει το περιεχόμενο με μία νέα, κατανοητή στον σύγχρονο αναγνώστη μορφή (δηλαδή, στην προκειμένη περίπτωση, να το μεταφράσει στη συμβολική αλγεβρική γλώσσα). Με τον τρόπο αυτό, πιστεύουν ότι δεν αλλοιώνεται ούτε καταστρέφεται ούτε κατ' ελάχιστον ο αληθινός χαρακτήρας, η ιστορικότητα, η ταυτότητα και η ακεραιότητα του κειμένου.

Υπό το πρίσμα μιας τέτοιας οντολογίας για τα μαθηματικά αντικείμενα, ο σκοπός της ιστορίας των Μαθηματικών συνίσταται στη διερεύνηση αυτού που θα ονομάζουμε στο εξής «νομοθετική» πλευρά των Μαθηματικών, στη μελέτη δηλαδή των καθολικών συστατικών του μαθηματικού περιεχομένου των κειμένων. Το έργο, λοιπόν, του ιστορικού των αρχαίων Μαθηματικών είναι να αντλήσει αυτό το περιεχόμενο από το αρχαίο περιτύλιγμα (δηλαδή τη μορφή) στο οποίο είναι συσκευασμένο, να το συλλάβει στην απόλυτη καθαρότητά του και κατόπιν να το παραδώσει, συσκευασμένο σε νέο περιτύλιγμα (σε νέα μορφή), στον σύγχρονο αναγνώστη. Έτσι, το έργο του ιστορικού των Μαθηματικών περιορίζεται στην αναγνώριση των αναλλοίωτων, τελικώς, παρά την ποικιλία των ιστορικών τους εκφάνσεων, μαθηματικών Ιδεών, που εμφανίζονται στο έργο του κάθε συγγραφέα του παρελθόντος, και η απονομή της δέουσας τιμής στον μαθηματικό ο οποίος έδωσε πρώτος έκφραση σε μια από αυτές τις Ιδέες, σε εκείνον που πρώτος την κατέβασε από το πλατωνικό βασίλειο στον κόσμο της ανθρώπινης συνείδησης. Στην ακραία της εκδοχή, αυτή η αντίληψη οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η ιστορία των Μαθηματικών πρέπει να γράφεται από τους επαγγελματίες μαθηματικούς και να απευθύνεται, βασικά, στους συναδέλφους τους. Για όλους τους άλλους η ιστορία των Μαθηματικών είναι ένα είδος απαγορευμένης ζώνης. Στην είσοδό της είναι χαραγμένη με κεφαλαία γράμματα η επιγραφή «ΜΗΔΕΙΣ ΑΜΥΗΤΟΣ (ΣΤΑ ΣΥΓΧΡΟΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ) ΕΙΣΙΤΩ».

Οι ιστορικοί που υιοθετούν τη νέα ιστοριογραφία των Μαθηματικών, από την πλευρά τους, θεωρούν ότι η παραπάνω προσέγγιση δεν μπορεί να γίνει δε-

κτή ως ιστορική προσέγγιση και, ως εκ τούτου, πρέπει να απορριφθεί. Τα μαθηματικά κείμενα του παρελθόντος δεν είναι μόνο τα αυτάρκη, καλώς ορισμένα φυσικά αντικείμενα για τα οποία μπορεί ένας σύγχρονος αναγνώστης να προσδιορίσει ποιες μοντέρνες μαθηματικές ιδέες λανθάνουν μέσα τους και ποιες όχι. Ταυτόχρονα, χαρακτηρίζονται από τοπικότητα, είναι προϊόντα μιας προσδιορισμένης στον χώρο και στον χρόνο ανθρώπινης δραστηριότητας, η οποία είναι συμφυώς προθεσιακή, εκφράζει τη βούληση, τις προθέσεις, τις επιθυμίες, τους στόχους, τις στρατηγικές και τις τεχνικές του εκάστοτε συγγραφέα, και υποστασιοποιούνται με μια εννοιολογία που μεταφέρει μαζί της την «αποβλεπτικότητα» των εννοιών της εποχής της. Κατά συνέπεια, το περιεχόμενο ενός μαθηματικού κειμένου και η μορφή υπό την οποία αυτό αποκτά έκφραση δεν μπορεί να αποτελούν δύο ανεξάρτητες μεταβλητές τις οποίες μπορεί κανείς αυθαίρετα και με το αζημίωτο να διαχωρίζει μεταξύ τους. Η επένδυση του μαθηματικού περιεχομένου ενός αρχαίου κειμένου με μια ξένη για τον συγγραφέα του μορφή, συγκεκριμένα η ελεύθερη μετάφρασή του στη συμβολική γλώσσα της σύγχρονης άλγεβρας, επιφέρει ανεπανόρθωτη ζημιά στην ορθή (από ιστορική άποψη) κατανόησή του. Ουσιαστικά καθιστά το κείμενο ανιστορικό, καθώς η χρήση σύγχρονου συμβολισμού μεταφέρει αναπόφευκτα μαζί της ολόκληρο αυτό το «στρώμα» της σύγχρονης «αποβλεπτικότητας» που αντιστοιχεί στον σημερινό τρόπο χρήσης των εννοιών, έναν τρόπο που είναι εντελώς ξένος προς την αρχαία σκέψη.[10] Όπως το θέτει ο M.S. Mahoney, «τα σύμβολα και οι όροι των σύγχρονων Μαθηματικών είναι φορείς των δικών τους εννοιών και μεθόδων. Η εφαρμογή τους σε ιστορικό υλικό εγκυμονεί πάντοτε τον κίνδυνο να προσδοθεί σε αυτό το υλικό ένα περιεχόμενο που στην πραγματικότητα δεν έχει».[11]

Εστιάζοντας, λοιπόν, την προσοχή της στη «νομοθετική» πλευρά, στο καθολικό, «καθαρό» μαθηματικό περιεχόμενο των κειμένων του παρελθόντος, η παραδοσιακή ιστοριογραφία παραβλέπει το σπουδαιότερο καθήκον που πρέπει να επιτελεί η ιστορία των Μαθηματικών και το οποίο είναι η μελέτη των τοπικοτήτων, η ανασυγκρότηση των «ιδιοσυγκρασιακών» πλευρών της δραστηριότητας του κάθε μαθηματικού τού παρελθόντος. «Η ιστορία, πριν απ' όλα», γράφει ο Unguru, «ενδιαφέρεται κυρίως για το γεγονός *υπό την ιδιότητά του ως* ιδιαίτε-

10. Η έννοια της «αποβλεπτικότητας» προέρχεται από τη φιλοσοφική σχολή του E. Husserl. Για τη χρήση της έννοιας αυτής στην ιστορία της επιστήμης βλ. J. Klein: *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*, μτφρ. από τα γερμανικά E. Brann, New York, Dover, 1992. Το βιβλίο του Klein δημοσιεύθηκε αρχικά ως δύο διαδοχικά άρθρα στο περιοδικό *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*, Abt. B: *Studien*, τ. 3/1 (1934), σ. 18-105, τ. 3/2 (1936), σ. 122-235.

11. M.S. Mahoney: *The Mathematical Career of Pierre de Fermat (1601-1665)*, Princeton, N.J., Princeton University Press, 1973, σ. xii-xiii.

ρου γεγονότος,[12] για το συγκεκριμένο συμβάν, για την αλλαγή από ένα αναγνωρίσιμο, ατομικό χαρακτηριστικό σε ένα άλλο αναγνωρίσιμο, ατομικό χαρακτηριστικό. Η ιστορία δεν (ή πρωτίστως δεν) επιδιώκει να στριμώχνει τα γεγονότα, να τα ομαδοποιεί, να τα συνωστίζει κάτω από την ίδια επικεφαλίδα, αποστραγγίζοντάς τα από τις ατομικότητές τους. Αντίθετα, η ιστορία είναι προσπάθεια κατανόησης κάθε γεγονότος του παρελθόντος αυτοτελώς. Οπότε, χώρος της ιστορίας είναι ο χώρος του ιδιοσυγκρασιακού (idiosyncratic)».[13]

Υπό αυτήν την έννοια, ο σκοπός του ιστορικού των Μαθηματικών δεν μπορεί να περιοριστεί στο να βλέπει τα Μαθηματικά του παρελθόντος απλώς και μόνον ως προαγγέλους των σύγχρονων Μαθηματικών, στο να διερευνά κάθε φορά ποιες σύγχρονες μαθηματικές ιδέες μπορεί να αναγνωρίσει στο ένα ή στο άλλο κείμενο του παρελθόντος. Η κύρια προσπάθειά του πρέπει να κατευθύνεται στο να κατανοεί τα μαθηματικά κείμενα του παρελθόντος *ιστορικά*, να λαμβάνει υπ' όψιν του το ιστορικό και πολιτισμικό πλαίσιο στο οποίο εντάσσονται, να προσπαθεί να ανασυγκροτεί, όσο αυτό είναι δυνατόν, τις αυθεντικές προθέσεις του κάθε ιστορικού προσώπου, να απορρίπτει τις ανιστορικές ερμηνείες, να αποκαλύπτει τί *δεν* θα μπορούσε να είχε στον νου του ο Α ή ο Β ιστορικός συγγραφέας όταν έγραφε το ένα ή το άλλο κείμενο, να δείχνει τελικά σε ποιον βαθμό οι παρελθούσες ιδέες ήταν *διαφορετικές* από τις σύγχρονες. Ο χώρος της ιστορίας των Μαθηματικών, λοιπόν, είναι πρωτίστως η μελέτη του ιδιοσυγκρασιακού, και για τη μελέτη αυτή ο επαγγελματίας μαθηματικός όχι μόνο δεν πλεονεκτεί, αντίθετα μειονεκτεί, καθώς η φύση του έργου του, οι δεξιότητες που έχει αποκτήσει από την άσκηση του επαγγέλματός του, προέρχονται από την ενασχόληση με το «νομοθετικό», με τις αιώνιες, άχρονες και, τελικά, ανιστορικές μαθηματικές αλήθειες. «Η ιστορία των Μαθηματικών», γράφει και πάλι ο Unguru, «είναι ιστορία, όχι Μαθηματικά. Είναι η μελέτη των ιδιοσυγκρασιακών πλευρών της δραστηριότητας των μαθηματικών, οι οποίοι ασχολούνται οι ίδιοι με τη μελέτη του νομοθετικού, δηλαδή αυτού που ισχύει δια

12. Πρβλ. το εδάφιο (1451*b*6-11) από το *Περὶ ποιητικῆς* του Αριστοτέλη, που παρατίθεται στη σελ. vii αυτού του βιβλίου.

13. S. Unguru: «Ιστορία των αρχαίων Μαθηματικών: Ορισμένες σκέψεις για την τρέχουσα κατάσταση του κλάδου», βλ. στην ανά χείρας έκδοση, σ. 126-127. Το ίδιο, βεβαίως, ισχύει γενικότερα στην ιστορία των επιστημών. Όπως γράφει ο Κ. Γαβρόγλου, «Η Ιστορία των Επιστημών ... δεν ξεκινάει από τη μελέτη γενικών και απροσδιόριστων κατηγοριών (όπως ο πολιτισμός και η κοινωνία ή ακόμη και οι επιστημονικές ιδέες) αλλά από τους συγκεκριμένους επιστήμονες και το έργο τους που σχετίζεται με τα θέματα που θέλουμε να διερευνήσουμε». (Κ. Γαβρόγλου: *Το παρελθόν των επιστημών ως ιστορία*, Ηράκλειο, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2004, σ. 117.) Επίσης: «Η ανάδειξη της πρακτικής σε μια από τις σημαντικότερες κατηγορίες για την Ιστορία των Επιστημών άρχισε να υπογραμμίζει τη σημασία της τοπικότητας στη μελέτη των επιστημών, ενώ μέχρι τότε θεωρούσαμε ότι τις χαρακτηρίζει αποκλειστικά η καθολικότητα του λόγου τους» (*ό.π.*, σ. 216).

νόμου. Αν πρόκειται να γράψει κανείς την ιστορία των Μαθηματικών, και όχι τα Μαθηματικά της ιστορίας, αυτός ο συγγραφέας οφείλει να προσέξει ώστε να μην υποκαταστήσει το ιδιοσυγκρασιακό με το νομοθετικό, δηλαδή, να μην πραγματευθεί τα Μαθηματικά του παρελθόντος σαν να μην είχαν τα Μαθηματικά παρελθόν, πέραν των τετριμμένων διαφορών στην εξωτερική εμφάνιση ενός κατά βάσιν αναλλοίωτου σκληρού περιεχομένου».[14]

Από την ανάλυση που προηγήθηκε προκύπτει ότι η διαμάχη για τη «γεωμετρική άλγεβρα» άπτεται του προβλήματος του αναχρονισμού και του κινδύνου που αυτός αντιπροσωπεύει για την ιστορία των Μαθηματικών, ενός κινδύνου που είναι πάντοτε υπαρκτός και δόλιος. Αλλά το πρόβλημα του αναχρονισμού δεν είναι το μόνο θέμα που εγείρεται από τη διαμάχη για τη «γεωμετρική άλγεβρα». Ο S. Unguru θέτει ουσιαστικά, με τις απόψεις που διατυπώνει, και ένα δεύτερο θέμα πολύ πιο λεπτό, που αγγίζει τα βαθύτερα γνωρίσματα που πρέπει, κατά τη γνώμη του, να χαρακτηρίζουν τη μεθοδολογία της αληθινής ιστορικής έρευνας. Συγκεκριμένα, ο Unguru φτάνει μέχρι του σημείου να αρνείται εντελώς τη νομιμότητα αφηγήσεων της ιστορίας των αρχαίων Μαθηματικών που εκκινούν από τη σύγχρονη μαθηματική πρακτική. Οι μαθηματικές και οι ιστορικές αφηγήσεις, υποστηρίζει, είναι τελείως ασύμβατες μεταξύ τους.[15] Τον λόγο τον εξηγεί σε ένα πρόσφατο –και επομένως πιο ώριμο των απόψεών του– βιβλίο, που δημοσίευσε μαζί με τον συνεργάτη του Michael N. Fried:[16]

> Όταν βρίσκεται αντιμέτωπος με ένα αρχαίο μαθηματικό κείμενο, ο σύγχρονος ερμηνευτής έχει να κάνει μια αρχική επιλογή: Κατ' αρχάς μπορεί να ακολουθήσει τη μαθηματική προσέγγιση. Αυτή περιλαμβάνει δύο βήματα: (1) να προσπαθήσει να ανακαλύψει πώς θα μπορούσε ο ίδιος να το χειριστεί (να λύσει το πρόβλημα, να αποδείξει την πρόταση, να εκτελέσει την κατασκευή κ.λπ.) και κατόπιν (2) υπό το φως της απάντησής του στο βήμα (1) να επιχειρήσει να κατανοήσει την αρχαία πρακτική. Αντ' αυτής της κατ' εξοχήν μαθηματικής προσέγγισης, ωστόσο, ο σύγχρονος ερμηνευτής μπορεί να απορρίψει την προσφυγή σε σύγχρονες μεθόδους για την αποκρυπτογράφηση του κειμένου και να χρησιμοποιήσει μόνον αρχαίες μεθόδους που ήσαν προσιτές στον συγγραφέα του κειμένου. Αυτή είναι η ιστορική προσέγγιση. Είναι περιττό να επαναλάβουμε ότι τα λάφυρα της ερμηνείας διαφέρουν ανάλογα με την προσέγγιση που θα έχει ακολουθήσει.

14. S. Unguru: «Ιστορία των αρχαίων Μαθηματικών: Ορισμένες σκέψεις για την τρέχουσα κατάσταση του κλάδου», βλ. στην ανά χείρας έκδοση, σ. 127-128.

15. Βλ. A. Bernard: «Ancient Rhetoric and Greek Mathematics. A Response to a Modern Historiographical Dilemma», σ. 394.

16. M.N. Fried, S. Unguru: *Apollonius of Perga's* Conica: *Text, Context, Subtext*. Leiden, Boston, Köln, Brill, 2001, σ. 406.

Η απόρριψη κάθε προσφυγής στη μαθηματική πρακτική, προκειμένου να εξαχθούν από αυτήν ιστορικά συμπεράσματα για τον τρόπο του σκέπτεσθαι των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών, είναι μια θέση που δεν βρίσκει σύμφωνους πολλούς σύγχρονους ιστορικούς των Μαθηματικών. Μάλιστα, δεν βρίσκει σύμφωνους ιστορικούς οι οποίοι, κατά τα άλλα, συμμερίζονται την ίδια με τον Unguru ανησυχία για τους κινδύνους και τις στρεβλώσεις που ελλοχεύουν στην αναχρονιστική ανάγνωση των Μαθηματικών του παρελθόντος.[17] Η άρνηση της προσφυγής στη μαθηματική πρακτική προκειμένου να συναχθεί μια ερμηνεία ενός αρχαίου κειμένου, υποστηρίζουν, μετατρέπει την ιστορία των Μαθηματικών σε απλή φιλολογική μελέτη του κειμένου, σε μελέτη εκ των έξω, η οποία, παρ' όλα τα οφέλη που μπορεί να προσφέρει, δεν είναι σε θέση να οδηγήσει στην αληθινή και ολοκληρωμένη κατανόηση της μαθηματικής παράδοσης στην οποία εντάσσεται το εν λόγω κείμενο.[18]

Η διαμάχη για τη «γεωμετρική άλγεβρα» αποτέλεσε το θέμα ενός μεταπτυχιακού σεμιναρίου που διοργανώθηκε στο Τμήμα Μεθοδολογίας, Ιστορίας και Θεωρίας της Επιστήμης του Πανεπιστημίου Αθηνών κατά το ακαδημαϊκό έτος 2002-2003 από τους επιμελητές αυτής της συλλογής. Ευχαριστούμε όλους τους μεταπτυχιακούς φοιτητές και τους υποψήφιους διδάκτορες που συμμετείχαν στο σεμινάριο και συνέβαλαν στο να συζητηθούν σε βάθος οι ιστοριογραφικές απόψεις που εξέφρασαν οι πρωταγωνιστές της διαμάχης. Ιδιαίτερα ευχαριστούμε την Ιωάννα Σκούρα, τη Βιβή Μπατσούλη, τον Γιώργο Μαυρομμάτη και τον Φίλιππο Γεωργιάδη που μετέφρασαν τα κείμενα, καθώς και τον καθηγητή του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων Γεώργιο Ακρίβη, ο οποίος μετέφρασε τα εκτενή γερμανικά αποσπάσματα που περιείχαν τα κείμενα. Ευχαριστούμε επίσης τον Κώστα Δημητρακόπουλο, με τον οποίο συζητήσαμε διάφορα μεταφραστικά προβλήματα. Τέλος, ευχαριστούμε τον Κώστα Γαβρόγλου, ο οποίος διάβασε το χειρόγραφο και έκανε χρήσιμα σχόλια στο κείμενο της εισαγωγής.

Αθήνα, Νοέμβριος 2004

ΓΙΑΝΝΗΣ ΧΡΙΣΤΙΑΝΙΔΗΣ
ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΔΙΑΛΕΤΗΣ

17. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι ο David H. Fowler (1937-2004), ο οποίος συχνά στα έργα του χρησιμοποιούσε σε μεγάλο βαθμό τις μαθηματικές του δεξιότητες προκειμένου να αντλήσει ιστορικά συμπεράσματα. Το ίδιο ισχύει επίσης για τον Wilbur R. Knor, ο οποίος θεωρούσε ότι η χρήση της μαθηματικής πρακτικής για τις ιστορικές ερμηνείες των αρχαίων μαθηματικών κειμένων είναι επιβεβλημένη, καθώς η ιστορική πορεία των αρχαίων Μαθηματικών πρέπει να εξετάζεται εκ των έσω.

18. Βλ. A. Bernard: «Ancient Rhetoric and Greek Mathematics. A Response to a Modern Historiographical Dilemma», σ. 395-396.

ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΑΓΚΗ ΝΑ ΞΑΝΑΓΡΑΦΕΙ Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΑΡΧΑΙΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

SABETAI UNGURU

Η ιστορία είναι η πιο θεμελιώδης επιστήμη, διότι καμία ανθρώπινη γνώση δεν μπορεί να διατηρήσει τον επιστημονικό της χαρακτήρα αν ξεχαστούν οι συνθήκες από τις οποίες προέκυψε, τα ερωτήματα στα οποία απάντησε και η λειτουργία για την εκτέλεση της οποίας δημιουργήθηκε. Ένα μεγάλο μέρος του μυστικισμού και της προκατάληψης των μορφωμένων ανθρώπων έχει τις ρίζες του σε γνώση που έχει αποκοπεί από τις ιστορικές της καταβολές.

Benjamin Farrington[1]

Ο σύγχρονος μαθηματικός, ο οποίος χρησιμοποιεί αλγεβρικά σύμβολα, θα ήταν αδύνατον να καταλάβει ότι ένας τύπος γεωμετρικής προόδου [δηλ., 1, 2, 4, 8] θα μπορούσε να είναι πιο τέλειος ή περισσότερο άξιος του ονόματός του από κάποιον άλλο. Γι' αυτόν τον λόγο δεν θα έπρεπε να καταφεύγουμε σε αλγεβρικά σύμβολα προκειμένου να ερμηνεύσουμε ένα χωρίο όπως το δικό μας [δηλ., Πλάτων, Τίμαιος, *32A, B].*

Francis M. Cornford[2]

Κάθε ιστορικός των Μαθηματικών, ο οποίος έχει επίγνωση των κινδύνων και των παγίδων της αναχρονιστικής ιστορίας, ανακαλύπτει σύντομα ότι η μετάφραση των Μαθηματικών του παρελθόντος σε σύγχρονο συμβολισμό και σύγχρονη ορολογία αντιπροσωπεύει τον μέγιστο των κινδύνων. Τα σύμβολα και οι όροι των σύγχρονων Μαθηματικών είναι φορείς των δικών τους εννοιών και μεθόδων. Η εφαρμογή τους σε ιστορικό υλικό εγκυμονεί πάντοτε τον κίνδυνο να προσδοθεί σε αυτό το υλικό ένα περιεχόμενο το οποίο, στην πραγματικότητα, δεν έχει.

Michael S. Mahoney[3]

Είναι απολύτως βέβαιο ότι τα αποσπάσματα που μόλις παραθέσαμε *δεν* απεικονίζουν τους τρόπους με τους οποίους έχει γραφεί κατά το παρελθόν η ιστορία των Μαθηματικών. Ούτε καν οι ίδιοι οι συγγραφείς των αποσπασμάτων έχουν εφαρμόσει πάντοτε αυτά που κατά καιρούς διακήρυσσαν.[4] Στην πραγματικότη-

1. *Greek Science Its Meaning For Us*, Harmondsworth, Penguin Books, 1953, σ. 311.
2. *Plato's Cosmology*, New York, The Liberal Arts Press, 1957, σ. 49.
3. *The Mathematical Career of Pierre de Fermat (1601-1665)*, Princeton, N.J., Princeton University Press, 1973, σ. xii-xiii.
4. Κατά ειρωνικό τρόπο, τα ίδια τα έργα των Farrington και Mahoney που αναφέραμε προηγουμένως, είναι περιπτώσεις του πολύ διαδεδομένου συνδρόμου στο οποίο ο Heine αναφέρεται με την εξής φράση: «Ενώ δημοσίως θέλουν τους άλλους να πίνουν νερό, οι ίδιοι στα

τα, ο κλάδος είναι υπέρ το δέον πλούσιος σε έργα που έχουν γραφεί σαν να επρόκειτο να αποτελέσουν ζωντανά παραδείγματα της προτροπής του P.W. Bridgman:

> ... το παρελθόν έχει νόημα μόνον με όρους του παρόντος. Η αμερόληπτη ανάπλαση του παρελθόντος, ανεπηρέαστη από τις επιδράσεις του παρόντος, θεωρείται επαγγελματικό ιδεώδες, και ο βαθμός στον οποίο προσεγγίζει κανείς αυτό το ιδεώδες αποτελεί κριτήριο τεχνικής ικανότητας. Πιστεύω ότι αυτός ο ιδεατός στόχος είναι αδύνατον να επιτευχθεί, ακόμη και να μορφοποιηθεί, χωρίς να περιπέσουμε σε άνευ νοήματος λεκτικά σχήματα.[5]

Η κατάσταση είναι σκανδαλώδης ιδίως στην περίπτωση της ιστορίας των αρχαίων και μεσαιωνικών Μαθηματικών. Είναι πράγματι θλιβερό και λυπηρό όταν ένας μελετητής του πολιτισμού και των ιδεών της Αρχαιότητας ή του Μεσαίωνα πρέπει πρώτα να εξοικειωθεί με τις έννοιες και τις πράξεις των *μοντέρνων* Μαθηματικών προκειμένου να συλλάβει το νόημα και την πρόθεση των σύγχρονων σχολιαστών που ασχολούνται με τα αρχαία και μεσαιωνικά μαθηματικά κείμενα. Με πολύ λίγες και αξιοσημείωτες εξαιρέσεις, η αναχρονιστική ιστορία *είναι ιστορία* στο πεδίο της ιστορίας των Μαθηματικών· πράγματι, αυτό το είδος ιστορίας είναι ακόμη, γενικά, το καθιερωμένο, το αποδεκτό, το σεβαστό, το «φυσιολογικό» είδος, που εξακολουθεί να εμφανίζεται σε επαγγελματικά περιοδικά και σε επιστημονικές μονογραφίες. Αυτός είναι *ο* τρόπος που γράφεται η ιστορία των Μαθηματικών. Και εφόσον αυτό συμβαίνει, εάν κάποιος ενδιαφέρεται για την *ιστορική* ερμηνεία των *προ-μοντέρνων* Μαθηματικών, θα βρεθεί στη δυσάρεστη κατάσταση να πρέπει να μάθει τη γλώσσα, τις τεχνικές και τους τρόπους έκφρασης του μοντέρνου *μαθηματικού* (τυπικά του παραγωγού των «ιστορικών» μελετών)· διότι είναι γεγονός ότι το αντιπροσωπευτικό ακροατήριο του μαθηματικού που παράγει τις «ιστορικές» μελέτες αποτελείται περισσότερο από ιστορικούς (ή από ανθρώπους που αυτοπροσδιορίζονται ως ιστορικοί) παρά από μαθηματικούς. Οι τελευταίοι στρέφουν το βλέμμα τους συγκαταβατικά προς τους (συνήθως πρεσβύτερους) συναδέλφους τους, στη νέα και κάπως περίεργη υπόστασή τους, η οποία φαίνεται να υποδεικνύει στον επαγγελματία μαθηματικό μια σιωπηρή αλλά δημόσια ομολογία επαγγελματικής (δηλαδή μαθηματικής) ανεπάρκειας.

Όσο για τον σκοπό αυτών των αυτοαποκαλούμενων «ιστορικών» μελετών, μπορεί εύκολα να διατυπωθεί με μία πρόταση: να δειχθεί πώς οι μαθηματικοί του παρελθόντος έκρυβαν τις μοντέρνες ιδέες και τεχνικές τους κάτω από τον άχαρο, *αδέξιο* και στενόχωρο μανδύα απαρχαιωμένων και ξεπερασμένων τρόπων έκφρασης· με άλλα λόγια, σκοπός του ιστορικού των Μαθηματικών είναι να επεξηγήσει και να αποσαφηνίσει μαθηματικά κείμενα του παρελθόντος και να τα μεταγράψει στη σύγχρονη μαθηματική γλώσσα, καθιστώντας τα με τον τρόπο αυτό προσιτά στον κάθε ενδιαφερόμενο.

Εάν η προηγούμενη περιγραφή φαίνεται μη πειστική και γραμμένη από έναν απερίσκεπτο θιασώτη της υπερβολής, το υπόλοιπο αυτής της εργασίας θα πρέπει να διορθώσει αυτήν την εσφαλμένη εντύπωση. Πράγματι, σκοπός αυτής της εργασίας είναι να δείξει τί είναι ιστορικά λανθασμένο στον παραδοσιακό τρόπο με τον οποίο έχει γραφεί η ιστορία των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών και να κάνει έκκληση στη νέα γενιά των ιστορικών των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών να ξαναγράψει αυτήν την ιστορία επάνω σε νέα και ιστορικά υγιή βάση.

I

Μία από τις κεντρικές έννοιες για την κατανόηση των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών είθισται να είναι, τουλάχιστον από την εποχή των Paul Tannery και Hieronymus Georg Zeuthen, η έννοια της «γεωμετρικής άλγεβρας».[6] Η έννοια

κρυφά πίνουν κρασί». Η διαφορά όμως σε αυτήν την περίπτωση είναι ότι τόσο το κήρυγμα όσο και η οινοποσία γίνονται ανοιχτά, στον δημόσιο χώρο. Για μια ανάλυση του έργου του Farrington, βλ., Ludwig Edelstein: «Recent Trends in the Interpretation of Ancient Science», *Roots of Scientific Thought. A Cultural Perspective*, επιμ. P.P. Wiener & A. Noland, New York, Basic Books, 1957, σ. 90-121. Όσο για το βιβλίο του Mahoney, θα ασχοληθώ με αυτό σε ένα μελλοντικό άρθρο στο περιοδικό *FRANCIA-Forschungen zur westeuropäischen Geschichte* του *Γερμανικού Ιστορικού Ινστιτούτου* των Παρισίων.

5. «Impertinent Reflections on the History of Science», *Philosophy of Science*, 17 (1950), σ. 63-73, στη σ. 64. Στο ίδιο άρθρο επίσης ο Bridgman αναφέρει (μεταξύ άλλων): «Πιστεύω ότι η τόσο συνεπής αφοσίωση στην ιστορική άποψη εγκυμονεί έναν πολύ υπαρκτό κίνδυνο ...» (*ό.π.*, σ. 72). Δεν αρνούμαστε τα σοβαρά φιλοσοφικά προβλήματα που πηγάζουν από την ανακατασκευή του παρελθόντος και αποδεχόμαστε το προφανές συμπέρασμα ότι «η ανεπηρέαστη από το παρόν ανάπλαση του παρελθόντος» κ.λπ. είναι πράγματι ανέφικτος ιδεατός στόχος· αυτό, όμως, δεν σημαίνει ότι η αμετάκλητη εγκατάλειψη του ανεπίτευκτου αυτού στόχου ισοδυναμεί με την εγκατάλειψη της ιστορικής μεθόδου. Πράγματι, για να επαναλάβω μια κοινοτοπία, το γεγονός, που ο ιστορικός το γνωρίζει, ότι είναι κατ' αρχήν αδύνατον να ξαναζήσει το παρελθόν και ότι η ανακατασκευή που κάνει είναι εγγενώς ατελής και ανεπαρκής, αντιπροσωπεύει γι' αυτόν την υπέρτατη πρόκληση *να προσπαθήσει* να κοιτάξει το παρελθόν με βλέμμα συμπάθειας και κατανόησης και να επιτύχει μια ανακατασκευή η οποία δεν θα παραβιάζει ανοιχτά αυτό που είναι προς ανακατασκευή. Το γεγονός ότι υπάρχει κάτι προς ανακατασκευή και κατανόηση λαμβάνεται ως δεδομένο από κάθε πνευματικά υγιή ιστορικό που αξίζει τον τίτλο του.

6. Πρβλ., λ.χ., Paul Tannery: *Mémoires Scientifiques*, 1: *Sciences Exactes dans l'Antiquité*, επιμ. J.L. Heiberg & H.G. Zeuthen, Toulouse, Edouard Privat & Paris, Gauthier-Villars, 1912, σ. 254-280. Ο τίτλος της μελέτης του είναι χαρακτηριστικός: «Για τη γεωμετρική επίλυση των προβλημάτων δευτέρου βαθμού πριν από τον Ευκλείδη»! Βλ., επίσης, *Mémoires Scientifiques*, 3 (1915), σ. 158-187 και σ. 244-250. Για τις απόψεις του Zeuthen βλ. τα έργα του *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*, Hildesheim, Georg Olms, 1966 (που είναι φωτογραφική ανατύ-

αυτή ισοδυναμεί με την άποψη ότι τα αρχαία ελληνικά Μαθηματικά, ιδίως μετά την ανακάλυψη της «αρρητότητας» από τη σχολή των Πυθαγορείων, είναι *άλγεβρα* μεταμφιεσμένη, κυρίως για λόγους αυστηρότητας, με γεωμετρικό ένδυμα. Ο τρόπος τού συλλογίζεσθαι στα αρχαία ελληνικά Μαθηματικά, ο τρόπος αντιμετώπισης των ποικίλων προβλημάτων, οι λύσεις που δίδονταν σε αυτά τα προβλήματα κ.λπ., όλα είναι κατ' ουσίαν *αλγεβρικά*, αν και, βέβαια, για λόγους που δεν έχουν ποτέ διευκρινιστεί πλήρως, ενδεδυμένα με γεωμετρικά ρούχα. Έτσι, όχι μόνον έχουμε το δικαίωμα να αναζητούμε το «υποκείμενο» (ούτως ειπείν) αλγεβρικό περιεχόμενο κάθε γεωμετρικής απόδειξης, αλλά είναι πράγματι σοφό (ιστορικά!) να μεταγράφουμε πάντοτε το γεωμετρικό περιεχόμενο κάθε πρότασης στη συμβολική γλώσσα της σύγχρονης άλγεβρας, ειδικά όταν η πρόταση αυτή είναι εξαιρετικά δύστροπη και ακατάληπτη, ενώ η προσφυγή στην άλγεβρα κάνει πάντοτε τη λογική δομή της απόδειξης σαφή και πειστική, χωρίς με αυτόν τον τρόπο να χάνει τίποτα όχι μόνο σε γενικότητα αλλά και ως προς οποιαδήποτε ενδεχομένως *ιδιάζοντα* χαρακτηριστικά της αρχαίας μαθηματικής πρακτικής.[7]

πωση της έκδοσης της Κοπεγχάγης, 1886), σ. 1-38 και *Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter*, Copenhagen, Andr. Fred. Höst & Sön, 1896, σ. 32-64.

Οι P. Tannery και H.G. Zeuthen δεν ήσαν οι επινοητές της έννοιας της «γεωμετρικής άλγεβρας». Την αμφίβολη τιμή για αυτήν την επινόηση φαίνεται ότι την δικαιούται ο Pierre de la Ramée. Αυτός ήταν, καθώς φαίνεται, εκείνος που «διέκρινε» ότι κάτω από ορισμένα μέρη των *Στοιχείων* του Ευκλείδη (Βιβλία II και VI) και, ίσως, κάτω και από την ανάλυση των αρχαίων Ελλήνων, πρέπει να βρίσκεται η αλγεβρική τέχνη. (Πρβλ. Michael S. Mahoney: «Die Anfänge der algebraischen Denkweise im 17. Jahrhundert», *Rete*, 1 (1971), σ. 15-31, ιδίως στη σ. 25.)

Είναι αρκετά ενδιαφέρον (και θα αποτελέσει αργότερα ισχυρή βάση ενός επιχειρήματος αυτού του άρθρου) ότι, πρακτικά, όλοι οι δημιουργοί των νεότερων Μαθηματικών (Viète, Descartes και Fermat) υιοθέτησαν την πεποίθηση του Ramus ότι στη ρίζα της αρχαίας ελληνικής ανάλυσης βρίσκεται η άλγεβρα! Αξίζει να σημειωθεί ότι και ο William Oughtred, τον δέκατο έβδομο αιώνα, στο *Clavis mathematicae*, το γνωστότερο μαθηματικό του εγχειρίδιο, εκφράζει την άποψη ότι η άλγεβρα μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μέσον για την κατανόηση δύσκολων προβλημάτων που υπάρχουν στον Ευκλείδη, στον Αρχιμήδη, στον Απολλώνιο και στον Διόφαντο (πρβλ. *ό.π.*, σημ. 49, 28). Οι ιστορικοί των Μαθηματικών του δέκατου ένατου και του εικοστού αιώνα μπορούν οπωσδήποτε να είναι υπερήφανοι για την τόσο μακρινή και αριστοκρατική μαθηματική καταγωγή τους· έκαναν πράγματι τη «διορατικότητα» του Oughtred θεμέλιο της μεθοδολογικής και ερμηνευτικής τους προσέγγισης!

7. Τάδε έφη Tannery: «Θέλω να μιλήσω για ολόκληρο το δέκατο βιβλίο του Ευκλείδη και για τη θεωρία των αρρήτων που περιέχει ... Δεν είναι τίποτε λιγότερο από τη λεπτομερή γεωμετρική επίλυση της διτετράγωνης εξίσωσης και από την αρχή της επίλυσης της εξίσωσης έκτου βαθμού, μαζί με την επινόηση μιας ορολογίας που σκοπό έχει να αναπληρώσει την έλλειψη συμβόλων» (*ό.π.*, 1, σ. 263). Σε ένα ιστορικό παράρτημα που έγραψε για το βιβλίο *Notions de Mathématiques* (Paris, Ch. Delagrave, 1903) του αδελφού του (Jules), ο Paul υπογραμμίζει: «Αν και οι τρόποι αφήγησής τους [δηλαδή των αρχαίων] παρουσίαζαν πάντοτε ουσιαστικές διαφορές σε σύγκριση με τους δικούς μας, η ζητητική τους μέθοδος ήταν κατά βάθος πολύ πιο κοντά στη δική μας από όσο θα πίστευε κανείς στην αρχή. Ενώ ο αλγεβρικός τους συμβολι-

Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει τίποτε το μοναδικό και (οντολογικά) ιδιοσυγκρασιακό, όσον αφορά τον τρόπο με τον οποίο οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματι-

---

σμός [*sic!*] αναπτυσσόταν μετά κόπου, είχαν διαμορφώσει ήδη από τον 4ο π.Χ. αιώνα έναν συμβολισμό για τη γεωμετρία ... Αυτή η γλώσσα παρουσίαζε ταυτόχρονα όλα τα πλεονεκτήματα που έχει η χρήση των γραμμάτων στην ανάλυση του Viète [!], τουλάχιστον για τη δεύτερη και την τρίτη δύναμη. *Μπόρεσαν από τότε, πιθανόν από την εποχή των πρώτων Πυθαγορείων, να κατασκευάσουν μια αληθινή γεωμετρική άλγεβρα για τις πρώτες δυνάμεις, έχοντας πλήρη συναίσθηση ότι αντιστοιχούσε επακριβώς σε αριθμητικές πράξεις*» (*ό.π.*, 3, σ. 167, η υπογράμμιση δική μου). Και συνεχίζει: «Αν και [οι αρχαίοι Έλληνες] δεν έφτασαν ... στη γενική έννοια των συντεταγμένων, ο τρόπος με τον οποίο εξέταζαν τις κωνικές τομές είναι εντελώς ανάλογος με αυτόν της δικής μας αναλυτικής γεωμετρίας [!] ... *Η εξίσωση που βρίσκουν* [!] αντιστοιχεί στη σύγχρονη γενική μορφή: $y^2 = px \pm \frac{p}{a}x^2$...

Οι μέθοδοι μετασχηματισμού των συντεταγμένων των αρχαίων είναι ατελείς, εξαιτίας της έλλειψης μιας γενικής αντίληψης του προβλήματος ... Αλλά αυτές οι μέθοδοι υπήρχαν» (*ό.π.*, σ. 168, η υπογράμμιση δική μου). Τέτοια παραδείγματα είναι δυνατόν να πολλαπλασιάζονται *μέχρι λιποθυμίας*.

Ο H.G. Zeuthen εξέθεσε τις απόψεις του επανειλημμένως και σε διάφορα έργα του. Αλλά οι πιο εύγλωττες και ολοκληρωμένες δηλώσεις του εμφανίζονται στα δύο έργα που αναφέραμε στην προηγούμενη υποσημείωση. Έτσι, ο Zeuthen, τιτλοφορεί το πρώτο κεφάλαιο του βιβλίου του *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum* «Προϋποθέσεις και βοηθητικά μέσα: Αναλογίες και γεωμετρική άλγεβρα» (*ό.π.*, σ. 1). Εκεί, σε μια παράγραφο αξιοπρόσεκτη για τις ανακολουθίες της, ο Zeuthen αναφέρει ότι οι αρχαίοι Έλληνες, αν και δεν είχαν την έννοια του συστήματος συντεταγμένων, χρησιμοποιούσαν παρ' όλα αυτά «ορθογώνιες και πλαγιογώνιες συντεταγμένες»· και αν και η άλγεβρα τούς ήταν άγνωστη, ο ιστορικός οφείλει να ανασυγκροτήσει αυτό που χρησιμοποιούσαν στη θέση της (*ό.π.*, σ. 2)! Συνεχίζει λέγοντας ότι η ελληνική θεωρία των αναλογιών «περιείχε προτάσεις, οι οποίες παρέχουν τη δυνατότητα εκτέλεσης των σημαντικότερων αλγεβρικών πράξεων» (*ό.π.*, σ. 4) και «Κατ' αυτόν τον τρόπο έχει κανείς στη διάθεσή του εργαλεία, με τη βοήθεια των οποίων μπορεί να εκφράσει τη σύνθεση αλγεβρικών μεγεθών» (*ό.π.*). Επίσης, μετά την ανακάλυψη της ασυμμετρίας από τον Πυθαγόρα ή από κάποιον μαθητή του, «... παρεμποδίστηκε η άμεση εφαρμογή αριθμών και αναλογιών που εκφράζονται με αριθμούς στη γεωμετρία, η οποία θα όφειλε να επιτρέψει να εγερθούν απαιτήσεις αυστηρότητας ... Εν τούτοις, στην πράξη δεν θα ήταν δυνατόν να απουσιάσουν οι προσπάθειες χρησιμοποίησης αριθμών και αναλογιών στη γεωμετρία, αν και υπήρχε η συναίσθηση τού ότι τα κατ' αυτόν τον τρόπο επιτευχθέντα αποτελέσματα, προκειμένου να αναγνωρισθούν, θα έπρεπε εκ των υστέρων [!] να αποδειχθούν διαφορετικά» (*ό.π.*, σ. 5).

Αλλά ο σύγχρονος τρόπος χειρισμού των αναλογιών είναι άμεσο φυσικό αποτέλεσμα της ύπαρξης μιας συμβολικής μαθηματικής γλώσσας στην οποία γίνονται πράξεις με τα ίδια τα σύμβολα. Εξ άλλου, «η Αρχαιότητα όμως δεν είχε καμία φορμαλιστική γλώσσα, αλλά κανείς κατείχε το βοηθητικό μέσο *της αναπαράστασης τέτοιων και άλλων πράξεων μέσω γεωμετρικής παραστάσεως και γεωμετρικού χειρισμού γενικών μεγεθών, καθώς και πράξεων με αυτά τα μεγέθη*» (*ό.π.*, σ. 6). Και τώρα ακολουθεί η βαρυσήμαντη δήλωση:

Κατ' αυτόν τον τρόπο αναπτύχθηκε μια γεωμετρική άλγεβρα, όπως μπορεί να την αποκαλέσει κανείς, αφού η ίδια ως άλγεβρα κατά ένα μέρος χειρίζεται γενικά μεγέθη, τόσο άρρητα όσο και ρητά, και κατά ένα μέρος χρησιμοποιεί μέσα όπως, π.χ., την συνήθη γλώσσα για να καταστήσει κατανοητή τη μέθοδό της και να την αποτυπώσει στη μνήμη. Αυτή η γεωμετρική άλγεβρα είχε φτάσει κατά την εποχή του Ευκλείδη σε τέτοιο σημείο ανάπτυξης, ώκοί χειρίζονταν τις αποδείξεις τους, το οποίο θα μπορούσε να χαθεί κατά τη διαδικασία της μετάφρασης από τη γεωμετρική στην αλγεβρική γλώσσα· και ο κύριος λόγος για αυτό είναι ότι οι συλλογισμοί και οι δομές των αρχαίων Μαθηματικών *είναι* στην πραγματικότητα κατ' ουσίαν αλγεβρικοί. Όπως το έθεσε ο B.L.van der Waerden:

> Ο Θεαίτητος και ο Απολλώνιος ήσαν κατά βάθος αλγεβριστές, σκέπτονταν αλγεβρικά, παρ' ότι περιέβαλλαν τους συλλογισμούς τους με γεωμετρικό ένδυμα.
>
> Η ελληνική άλγεβρα ήταν γεωμετρική άλγεβρα, θεωρία ευθύγραμμων τμημάτων και χωρίων, όχι αριθμών. Και αυτό ήταν αναπόφευκτο, στον βαθμό που ήταν σεβαστές οι απαιτήσεις της αυστηρής λογικής. Διότι «αριθμοί» ήταν οι ακέραιοι ή, το πολύ πολύ, οι κλασματικοί, πάντως, οι ρητοί [;], ενώ ο λόγος δύο ασύμμετρων ευθύγραμμων τμημάτων δεν μπορεί να εκφραστεί με ρητούς αριθμούς. Η αδιάλλακτη εμμονή σε μια τέτοια λογική συνέπεια περιποιεί τιμή στα ελληνικά Μαθηματικά.[8]

στε μπόρεσε να επιλύσει *τα ίδια προβλήματα όπως η δική μας άλγεβρα, όσο η τελευταία δεν ξεφεύγει από τον χειρισμό εκφράσεων δευτέρου βαθμού*, μια περιοχή την οποία επίσης ... κάλυψε, εφαρμόζοντάς την στη μελέτη των κωνικών τομών. Μια τέτοια εφαρμογή αντιστοιχεί στην εφαρμογή της δικής μας άλγεβρας στην αναλυτική γεωμετρία (*ό.π.*, σ. 7).

Αφού ασχολήθηκε με την αρχαία θεωρία των αναλογιών, ο Zeuthen περνά στη «γεωμετρική άλγεβρα» αυτή καθ' εαυτή και υποστηρίζει ότι οι αρχαίοι Έλληνες είχαν τον τρόπο να παρουσιάζουν την εξίσωση $ax + \beta y + \gamma z + \ldots = d$ ως εξής:

> ... σε μια ευθεία θεωρούμε διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα, ανάλογα των x, y, z, ... με λόγους α, β, γ, ... Τότε, η απόσταση μεταξύ του αρχικού και του τελικού σημείου των διαδοχικών διαστημάτων θα είναι d. Κατά παρόμοιο τρόπο μπορεί να προχωρήσει κανείς, αν στην εξίσωση [!] εμφανίζονται διαφορετικά πρόσημα. Όπως εμείς, στη συνήθη τώρα παράσταση πρέπει να επεξεργαστούμε στο μυαλό μας τη σημασία καθενός από τα γράμματα που χρησιμοποιούμε, έτσι έπρεπε και οι αρχαίοι να επεξεργαστούν τη σημασία των ευθύγραμμων τμημάτων που χρησιμοποιούσαν· *τότε, όμως, είχαν οι αρχαίοι, όπως και εμείς, μια παράσταση της εξίσωσης* ...
>
> Μέσω μιας τέτοιας παράστασης λύνονται εξισώσεις πρώτου βαθμού με τρόπους, που έχουν πολλά κοινά σημεία με τον δικό μας αλγεβρικό χειρισμό (*ό.π.*, σ. 10, η υπογράμμιση δική μου).

Αρκετά προς το παρόν. Περισσότερα για τις απόψεις των Tannery και Zeuthen περί «γεωμετρικής άλγεβρας» θα έλθουν στο προσκήνιο στη συνέχεια αυτής της μελέτης.

8. B.L. van der Waerden: *Η αφύπνιση της επιστήμης*, μτφρ. Γ. Χριστιανίδης, Ηράκλειο, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2000, σ. 312. [Σημ. των επιμελητών: Οι παραπομπές στις σελ. του βιβλίου του van der Waerden θα αφορούν πάντοτε στην ελληνική έκδοση του βιβλίου.] Και σε αυτήν την περίπτωση, όπως και σε πολλές άλλες (πρβλ. υποσημ. 15), ο van der Waerden επαναλαμβάνει τις απόψεις του Otto Neugebauer για τον αλγεβρικό κατ' ουσίαν χαρακτή-

Ωστόσο, η υιοθέτηση μιας τέτοιας διαδικασίας είχε ως συνέπεια την επιβολή πολύ αυστηρών περιορισμών στο είδος των προβλημάτων που μπορούσε κανείς να λύσει και, επομένως, στα αποτελέσματα στα οποία μπορούσε να φθάσει. Ο van der Waerden, ακολουθώντας τα βήματα των επιφανών προδρόμων του, αλλά προσθέτοντας έμφαση, αιχμηρότητα και δριμύτητα στις (συγκριτικά) ήπιες, μετριοπαθείς και λεπτές ενίοτε δηλώσεις τους, επιμένει να αποδίδει στους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς (και εδώ *δεν* αναφέρεται στον Διόφαντο) την επίλυση «*εξισώσεων*» στις γεωμετρικές τους προτάσεις:

> Οι εξισώσεις πρώτου και δευτέρου βαθμού μπορούν να διατυπωθούν σαφώς στη γλώσσα της γεωμετρικής άλγεβρας όπως, επίσης, αν χρειαστεί, και οι εξισώσεις τρίτου βαθμού. Για να προχωρήσει, όμως, κάποιος πέρα από αυτό το σημείο, πρέπει να καταφύγει στο ενοχλητικό [;] εργαλείο των αναλογιών.
>
> Ο Ιπποκράτης, παραδείγματος χάριν, ανήγαγε την εξίσωση [!] $x^3 = V$ στην αναλογία
>
> $$a : x = x : y = y : b,$$
>
> ενώ ο Αρχιμήδης έγραφε την κυβική εξίσωση [;]
>
> $$x^2(a - x) = bc^2$$
>
> με τη μορφή
>
> $$(a - x) : b = c^2 : x^2.$$
>
> Με τον τρόπο αυτό μπορεί κάποιος να φθάσει [*Ποιος* μπορεί να φθάσει;] σε εξισώσεις τετάρτου βαθμού ... Δεν μπορεί όμως να πάει πιο μακριά. Και, εκτός αυτού, θα πρέπει να είναι κανείς μεγαλοφυής μαθηματικός, πολύ πεπειραμένος στο να μετασχηματίζει αναλογίες με τη βοήθεια γεωμετρικών σχημάτων, για να επιτυγχάνει αποτελέσματα με αυτήν την εξαιρετικά δύσχρηστη μέθοδο [;]. Ο καθένας μπορεί να χρησιμοποιήσει τον συνήθη αλγεβρικό συμβολισμό, αλλά μόνο ένας προικισμένος μαθηματικός μπορεί να τα

ρα των *Κωνικών* του Απολλωνίου. Έτσι, ο Neugebauer πιστεύει ότι «... και στη φαινομενικά αμιγώς γεωμετρική θεωρία των κωνικών τομών βρίσκονται πολλά, τα οποία μας κατατοπίζουν για τη λανθάνουσα, ούτως ειπείν, αλγεβρική συνιστώσα των κλασικών ελληνικών Μαθηματικών» («Apollonius-Studien», σ. 216· για την πλήρη αναφορά βλ. την υποσημ. 15). Αναφερόμενος, εξ άλλου, στη δομή των *Κωνικών*, ο Neugebauer σημειώνει: «Η αντιμετώπιση του προβλήματος της ενειλιγμένης [δηλαδή του προσδιορισμού του γεωμετρικού τόπου των σημείων μιας καμπύλης] χωρίς καμία χρήση μεθόδων απειροστικού λογισμού *αλλά με αμιγώς αλγεβρική θεώρηση*, είναι γενικά ένα ιδιαίτερα λαμπρό συστατικό του όλου έργου. *Επίσης το όλο οπλοστάσιο των ταυτοτήτων και των ανισοτήτων στο Βιβλίο VII ... είναι αμιγώς αλγεβρικής φύσεως*» (*όπ.*, σ. 218, υποσημ. 4, η υπογράμμιση δική μου).

βγάλει πέρα με την ελληνική θεωρία των αναλογιών και τη γεωμετρική άλγεβρα.[9]

9. *Ό.π.*, σ. 312. Είναι σαφές ότι *δεν* «μπορεί ο καθένας να χρησιμοποιήσει τον συνήθη αλγεβρικό συμβολισμό». Για να τον χρησιμοποιήσει κάποιος, πρέπει πριν από όλα να *διαθέτει* έναν τέτοιο συμβολισμό και να ξέρει να τον χρησιμοποιεί. Δηλαδή πρέπει να αντιλαμβάνεται και να γνωρίζει τον αλγεβρικό τρόπο τού σκέπτεσθαι! Η άποψη που εκτίθεται στο παραπάνω απόσπασμα είναι επίσης άποψη (αν και, μάλλον, δεν παρουσιάζεται πάντοτε τόσο απερίφραστα) των Tannery και Zeuthen. Έτσι, ο Tannery αρχίζει τη μελέτη του για τη γεωμετρική επίλυση των προβλημάτων δευτέρου βαθμού προ του Ευκλείδη με την εξής δήλωση: «Εάν πρόκειται να μιλήσουμε για τη γεωμετρική επίλυση των προβλημάτων δευτέρου βαθμού πριν από τον Ευκλείδη, είναι σαφές ότι μόνο στο έργο του τελευταίου [δηλαδή του Ευκλείδη] μπορεί κανείς να βρει την έκθεση αυτής της επίλυσης» (*Mém. Scient.*, 1, σ. 254), ενώ ο Zeuthen, ο οποίος, κατά δική του ομολογία, υιοθετεί την άποψη του Tannery (*Die Lehre*, υποσημ. 1, 5), αναφέρει: «Για ... να κατανοήσουμε πόσο βαθιά ήταν η εξοικείωση των αρχαίων με τις μικτές τετραγωνικές εξισώσεις και την επίλυσή τους δίχως αναγωγή σε αμιγείς τετραγωνικές εξισώσεις, είναι σκόπιμο να εξετάσουμε τη μορφή που έπρεπε να πάρει η τετραγωνική εξίσωση στη γλώσσα της γεωμετρικής άλγεβρας» (*ό.π.*, σ. 15). Ο Zeuthen διακηρύσσει, επίσης, κατηγορηματικά: «Βλέπουμε επίσης ότι οι αρχαίοι επέλυσαν τις εξισώσεις δευτέρου βαθμού όλων των τύπων» (*Gesch. der Math. im Alt. und Mittel.*, σ. 50). Αυτή είναι επίσης η θέση και του Neugebauer στην εργασία του «Apollonius Studien», όταν κάνει άνω-κάτω τις γεωμετρικές προτάσεις του Απολλωνίου, μεταγράφοντας τις ρητορικές τους περιγραφές στη γλώσσα των αλγεβρικών συμβόλων. Υπάρχει πολύ λίγος Απολλώνιος στις μεταγραφές που κάνει ο Neugebauer, όπως θα έδειχνε και μια απλή ματιά στην έκδοση του Heiberg (ή στη μετάφραση του Ver Eecke). «Στην προηγηθείσα περιγραφή των σκέψεων», υποστηρίζει ο Neugebauer, «δεν απέκλινα από το κείμενο του Απολλωνίου με κανέναν άλλο τρόπο, εκτός από την εξωτερική μορφή» (*ό.π.*, σ. 250). Σαν να μην είναι αυτό ακριβώς το υπέρτατο αμάρτημα που μπορεί να διαπράξει ένας ιστορικός των Μαθηματικών! (Περισσότερα για τη σχέση ανάμεσα στη μορφή και στο περιεχόμενο των Μαθηματικών, παρακάτω). Επί πλέον, η δήλωση αυτή δεν είναι καν αληθινή, αφού ο Neugebauer δεν σεβάστηκε, μεταξύ άλλων, τη διαίρεση σε προτάσεις που κάνει ο Απολλώνιος. Ο Neugebauer συνεχίζει: «Θα ήταν αυτονόητα, και με τον ελληνικό τρόπο διατύπωσης των αποδείξεων, δίχως κανένα πρόβλημα [;] εφικτή η εισαγωγή ιδίων συμβολισμών σε ανάλογες αποδείξεις. [Αυτή είναι αναχρονιστική, αναδρομική ιστορία! Για μάς είναι προφανές ότι η χρήση πανομοιότυπου συμβολισμού σε ανάλογες αποδείξεις είναι προτιμότερη από έναν αυθαίρετο συμβολισμό, μόνο και μόνο διότι για μάς το ζήτημα του συμβολισμού είναι κάτι περισσότερο από μια απλή ονοματοδοσία, από ένα βάπτισμα! Εμείς *κάνουμε πράξεις με* τα σύμβολά μας. Για τους αρχαίους Έλληνες αυτό ήταν τελείως αδιανόητο]. «Το ότι τα αρχαία Μαθηματικά έμειναν πλήρως ανεπηρέαστα από αυτόν τον μη συστηματικό τρόπο, ο οποίος μάς είναι πολύ ενοχλητικός, δείχνει ότι πρέπει να είναι κανείς πολύ προσεκτικός, όταν ισχυρίζεται ότι η ασάφεια των αποδείξεων παρεμπόδισε τελικώς την περαιτέρω ανάπτυξη των αρχαίων Μαθηματικών. Προφανώς [;] δεν είχε ληφθεί υπ' όψιν το γεγονός ότι χρησιμοποιούσαν τον τρόπο τους εξίσου αυτονόητα, όπως εμείς σήμερα χρησιμοποιούμε πολύπλοκους τύπους» (*ό.π.*, σ. 250, υποσημ. 28). *Αυτό είναι απίστευτο!* Προϋποθέτει ότι οι τύποι υπάρχουν, τρόπον τινά, ανεξάρτητα από τον πραγματικό, δηλαδή τον *γραπτό*, τρόπο με τον οποίο παρουσιάζονται, και ότι βρίσκονται «κρυμμένοι» μέσα στο ελληνικό συμβολικό χάος, απλώς για να τους αποκαλύψει το διεισδυτικό μάτι του σύγχρονου ιστορικού των Μαθηματικών!

Ποια είναι η βάση για μια τέτοια άποψη και ποιες παραδοχές προϋποθέτει; Ας μου επιτραπεί να δηλώσω ευθύς εξαρχής ότι δεν μπορώ να βρω καμία ικανοποιητική *από ιστορική άποψη* βάση για αυτήν τη γενικά αποδεκτή άποψη. Νομίζω ότι οφείλει εν μέρει την προέλευσή της στο γεγονός ότι εκείνοι που γράφουν τη γενική ιστορία των Μαθηματικών, και την ιστορία των αρχαίων Μαθηματικών (συμπεριλαμβανομένων και των ελληνικών) ειδικότερα, έχουν διατελέσει τυπικά μαθηματικοί, ενήμεροι των σύγχρονων εξελίξεων του κλάδου τους, ανίκανοι σε μεγάλο βαθμό να αφήσουν κατά μέρος την αποκτηθείσα με κόπο μαθηματική δεξιότητα όταν ασχολούνται με περιόδους της ιστορίας προς τις οποίες αυτή η δεξιότητα είναι ιστορικά άσχετη και (τολμώ να πω) τελείως αναχρονιστική. Μια τέτοια προσέγγιση πηγάζει επίσης από την άδηλη υπόθεση ότι τα Μαθηματικά είναι *καθολική επιστήμη*, μια άλγεβρα της σκέψης, που περιέχει καθολικούς τρόπους συμπερασμού, αιώνιες δομές και άχρονα, ιδεατά πρότυπα έρευνας, που είναι δυνατόν να αναγνωρισθούν καθ' όλη τη διάρκεια της ιστορίας της πολιτισμένης ανθρωπότητας και που είναι *εντελώς ανεξάρτητα από τη μορφή με την οποία τυχαίνει να εμφανίζονται σε μια συγκεκριμένη χρονική συγκυρία*. Με άλλα λόγια, μια τέτοια ερμηνεία λαμβάνει ως δεδομένο ότι στα Μαθηματικά η *μορφή* και το *περιεχόμενο* δεν αποτελούν αναπόσπαστα μέρη ενός ενιαίου συνόλου. Ότι, στην πραγματικότητα, το *περιεχόμενο* είναι ανεξάρτητο από τη *μορφή* και επομένως μπορεί κανείς να μεταγράφει ατιμωρητί τα αρχαία μαθηματικά κείμενα με τα μοντέρνα αλγεβρικά σύμβολα, προκειμένου έτσι να εξασφαλίσει μια «βαθιά κατανόηση» τού, ειδάλλως, «δύστροπου» περιεχομένου τους.

Επί πλέον, ακριβώς επειδή αυτό το περιεχόμενο είναι (σαν τα ευγενή αέρια) ουσιαστικά ανεπηρέαστο από το τυπικό περιβάλλον του, η ικανότητα του μοντέρνου μαθηματικού να το αποκαλύψει και να του δώσει μια «αρεστή» (δηλαδή σύγχρονη) μορφή αποτελεί όχι μόνον την καλύτερη *μοντέρνα* ανάγνωση των αρχαίων «ενοχλητικών» και «καταπιεστικών» μαθηματικών κειμένων, αλλά και τη μόνη *ορθή* ανάγνωση και, ταυτόχρονα, *την* απόδειξη ότι αυτό είχε στον νου του και ο αρχαίος μαθηματικός όταν κατέγραφε (με ομολογουμένως περίεργο τρόπο) τις μαθηματικές σκέψεις του για τους μεταγενεστέρους. Οπότε, εάν *εμείς* βλέπουμε δευτεροβάθμιες εξισώσεις σε ορισμένες προτάσεις των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, τότε αυτό είχε και ο Ευκλείδης κατά νουν όταν διατύπωνε και απεδείκνυε αυτές τις προτάσεις γεωμετρικά. Εάν *εμείς* μπορούμε να αναγνωρίσουμε εξισώσεις τετάρτου βαθμού στον Απολλώνιο,[10] αυτό είχε στον νου του και ο Απολλώνιος, αν και αυτή η αναγνώριση του αλγεβρικού πυρήνα της σκέψης του Απολλωνίου δεν είναι πάντοτε εύκολη και απαιτεί, προφανώς, σύγχρονη μαθηματική εκπαίδευση:

10. van der Waerden: *ό.π.*

Η μελέτη μιας απόδειξης του Απολλωνίου, απαιτεί κόπο και προσήλωση. Αντί ενός συνοπτικού αλγεβρικού τύπου, θα βρούμε μια μακροσκελή πρόταση, όπου κάθε ευθύγραμμο τμήμα υποδεικνύεται με δύο γράμματα τα οποία πρέπει να εντοπισθούν στο σχήμα. *Για να καταλάβει κανείς τον τρόπο του σκέπτεσθαι, είναι αναγκασμένος να μεταγράψει αυτές τις προτάσεις σε μοντέρνους συνοπτικούς τύπους.*[11]

Εκτός αυτού, και ως φυσική συνέπεια μιας τέτοιας άποψης, όταν ο μαθηματικός κατορθώνει να δείξει ότι δύο φαινομενικά άσχετα μεταξύ τους μαθηματικά κείμενα, που ανήκουν σε δύο ξένους πολιτισμούς και σε δύο διαφορετικές χρονικές περιόδους, έχουν το ίδιο αλγεβρικό[12] περιεχόμενο, παρά την εντελώς διαφορετική τυπική εξωτερική τους εμφάνιση και το διαφορετικό γενικό τους πλαίσιο –όπως είναι, παραδείγματος χάριν, μια βαβυλωνιακή πινακίδα που περιέχει πίνακες και αριθμητικούς χειρισμούς και οι ελληνικές γεωμετρικές προτάσεις που αναφέρονται στην παραβολή χωρίων–, νομιμοποιείται να διερευνήσει πιθανές επιδράσεις, ζητήματα προτεραιότητας, τρόπους μετάδοσης κ.λπ. Και αυτήν ακριβώς την πορεία ακολούθησε ο Otto Neugebauer στο έργο του *Vorgriechische Mathematik*,[13] που πρόσφατα ανατυπώθηκε, και (με περισσότερες λεπτομέρειες και πιο εύγλωττα) ο van der Waerden στο βιβλίο του *Η αφύπνιση της επιστήμης*,[14] όπου υποστηρίζεται, αποκλειστικά στη βάση μιας τέτοιας λογικής, ότι η ελληνική «γεωμετρική άλγεβρα» δεν είναι παρά «βαβυλωνιακή άλγεβρα» γεωμετρικά ενδεδυμένη![15]

11. *Ό.π.*, σ. 312-313, η υπογράμμιση δική μου.

12. Ο επιθετικός αυτός προσδιορισμός είναι στην ουσία περιττός, αφού, σύμφωνα με την άποψη που εκτίθεται εδώ, το αλγεβρικό είναι το μόνο δυνατό περιεχόμενο.

13. *Vorlesungen über Gescichte der antiken mathematischen Wissenschaften*, Band I: *Vorgriechische Mathematik*, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1969. Αυτή είναι μια μη αναθεωρημένη ανατύπωση ενός βιβλίου που εκδόθηκε για πρώτη φορά το 1934.

14. Πρβλ., *ό.π.*, σ. 86-169.

15. *Ό.π.*, σ. 131-141. Ο van der Waerden, ουσιαστικά, έχει υιοθετήσει εξ ολοκλήρου την προσέγγιση και τις διαπιστώσεις που έκανε ο Neugebauer στις τρεις μελέτες του για την ιστορία της αρχαίας άλγεβρας («Studien zur Geschichte der antiken Algebra»). Η πρώτη μελέτη (I) δημοσιεύθηκε το 1932 στο περιοδικό *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*, 2, Abteilung B: *Studien*, σ. 1-27. Η δεύτερη (II), με τον πρόσθετο τίτλο «Apollonius-Studien», δημοσιεύθηκε στον ίδιο τόμο και στον ίδιο θεματικό τομέα (*Studien*) του ίδιου περιοδικού, σ. 215-254. Και, τέλος, η τρίτη (III), με τίτλο «Zur geometrischen Algebra», δημοσιεύθηκε το 1936 στον τρίτο τόμο του ίδιου περιοδικού και στον ίδιο θεματικό τομέα, σ. 245-259. Ο Neugebauer συνόψισε τις πασίγνωστες απόψεις του περί της ελληνικής «γεωμετρικής άλγεβρας» στο βιβλίο του *The Exact Sciences in Antiquity* (Princeton, N.J., Princeton University Press, 1952) [ελληνική μτφρ. με τον τίτλο *Οι θετικές επιστήμες στην αρχαιότητα*, Αθήνα, ΜΙΕΤ, 1990]. Εγώ χρησιμοποίησα τη δεύτερη έκδοση αυτού του βιβλίου (New York, Dover, 1969). Στο βιβλίο αυτό ο Neugebauer ομολογεί ότι δεν υπάρχουν τεκμηριωμένες μαρτυρίες για την, όπως την ονομάζει, «ανατολική επίδραση» [η ελλ. μτφρ. αναφέρει «ασιατική επίδραση»]

Είναι αυτή αποδεκτή θέση; Ως ιστορικός, πρέπει να απαντήσω σε αυτό το ερώτημα με ένα απερίφραστο «*όχι*»! *Αυτή η θέση*, πιστεύω, *είναι ιστορικά απαράδε-*

στα θεωρητικά ελληνικά Μαθηματικά (σ. 189). Ωστόσο, η «υπόθεση εργασίας» που χρησιμοποιεί είναι ότι: «Η θεωρία των ασύμμετρων μεγεθών και η σχετική θεωρία της ολοκλήρωσης [;] έχουν καθαρά ελληνική προέλευση, αλλά το περιεχόμενο της "γεωμετρικής άλγεβρας" χρησιμοποιεί αποτελέσματα γνωστά στη Μεσοποταμία» (*ό.π.*). Η μοναδική μαρτυρία για αυτήν τη μαθηματικά όμορφη «υπόθεση εργασίας» που ο Neugebauer είναι ικανός να κατασκευάσει είναι το γεγονός ότι τόσο το βαβυλωνιακό αριθμητικό υλικό όσο και ορισμένες ελληνικές γεωμετρικές προτάσεις προσφέρονται μάλλον εύκολα για αλγεβρική απόδοση, η οποία, όταν γίνει, τα εμφανίζει ως ταυτόσημα. Για τον Neugebauer (και για οποιονδήποτε σύγχρονο μαθηματικό) που έχει στη διάθεσή του την αλγεβρική γλώσσα και τους κανόνες μετάφρασης *σε* αυτήν δεν υπάρχει, πραγματικά, καμία αμφιβολία για αυτήν την ταυτοσημία. Το πραγματικό ερώτημα είναι: ήξεραν οι αρχαίοι (Βαβυλώνιοι και Έλληνες) την αλγεβρική γλώσσα και τους κανόνες να *τη* μεταφράζουν είτε σε αριθμητικούς χειρισμούς είτε σε γεωμετρικές προτάσεις; Επισημαίνοντας ότι το πρόβλημα της παραβολής χωρίων, που ο ίδιος αποκαλεί «κεντρικό πρόβλημα» της γεωμετρικής άλγεβρας (σ. 192), είναι «μάλλον δύσκολο να βγει στο προσκήνιο» (*ό.π.*) από άλλο δρόμο παρά μεταφράζοντάς το στη γλώσσα των εξισώσεων (την ίδια διαδικασία που ακολούθησε για τη μεταγραφή και επίλυση των αποκαλούμενων βαβυλωνιακών «προβλημάτων δευτέρου βαθμού»), ο Neugebauer, στην πραγματικότητα, μας λέει κάτι για τα δικά του κίνητρα, για τη δική του ιδιοσυγκρασία και το δικό του υπόβαθρο, παρά κάτι το σημαντικό για τους αρχαίους. Γιατί το πρόβλημα της παραβολής χωρίων είναι ένα «περίεργο γεωμετρικό πρόβλημα» (*ό.π.*, σ. 192); Τί το *περίεργο* έχει; Τί είναι περίεργο για τους αρχαίους Έλληνες; Γιατί χρειάζεται κάποιο κίνητρο; Γιατί η βαβυλωνιακή μέθοδος επίλυσης, με αναγωγή στην «κανονική μορφή», δεν χρειάζεται κανένα κίνητρο; Ο Neugebauer αναγνωρίζει ότι έχουν γίνει προσπάθειες να εξηγηθεί το πρόβλημα της παραβολής χωρίων ανεξάρτητα από αλγεβρικές μεταφράσεις. Ισχυρίζεται, όμως, ότι η αλγεβρική εξήγηση αποτελεί την «απλούστερη και αμεσότερη εξήγηση» (*ό.π.*, σ. 193). Πλήρως ενήμερος για το γεγονός ότι η απλότητα δεν ισοδυναμεί με ιστορική απόδειξη, ο Neugebauer στηρίζει την υπόθεσή του στην αληθοφάνεια της αλγεβρικής ερμηνείας του και στην ιστορική πιθανότητα επαφών ανάμεσα στον βαβυλωνιακό και στον αρχαίο ελληνικό πολιτισμό κατά τους ελληνιστικούς χρόνους (*ό.π.*, σ. 192-193). Ο Neugebauer ασχολήθηκε εκτενώς με το ιστορικό πρόβλημα των υποτιθέμενων σχέσεων ανάμεσα σε Βαβυλώνιους και Έλληνες μαθηματικούς στο «Schlussbemerkungen» [Τελικές παρατηρήσεις], στην τρίτη μελέτη του για την αρχαία άλγεβρα. Εκεί, αφού δηλώσει ότι στην περιοχή της στοιχειώδους γεωμετρίας καθώς και στις περιοχές της θεωρίας των αναλογιών και της θεωρίας των εξισώσεων (!) τα βαβυλωνιακά Μαθηματικά περιέχουν όλο το ουσιαστικό υλικό επάνω στο οποίο εξακολούθησαν να οικοδομούνται τα ελληνικά Μαθηματικά, ο Neugebauer τονίζει ότι, παρά την παντελή έλλειψη ρητών αναφορών των πηγών, αυτός είναι πεπεισμένος για την αναμφισβήτητη επίδραση των βαβυλωνιακών στα ελληνικά Μαθηματικά. Η πεποίθησή του αυτή βασίζεται στα εξής: 1) Στη σαφή μαρτυρία της μεταξύ τους σχέσης (και με αυτό εννοεί την ταυτοσημία τους όταν τα υποβάλλουμε στην ίδια αλγεβρική επεξεργασία)· 2) στο ιστορικό γεγονός ενός ευρέως διαδεδομένου ελληνιστικού πολιτισμού που έφθανε στην «Ανατολή»· και 3) στις πάμπολλες ελληνικές αναφορές για Έλληνες που σπούδασαν στην «Ανατολή» (*ό.π.*, σ. 258). Σύμφωνα με τον Neugebauer, η περίοδος κατά την οποία γίνονταν επαφές ανάμεσα σε Βαβυλώνιους και Έλληνες μαθηματικούς πρέπει να θεωρηθεί η περίοδος από τον Πλάτωνα έως τον Ίππαρχο. Ένα σημαντικό επακόλουθο αυτών των επαφών είναι η ελληνική γεωμετρική άλγεβρα, η οποία αργότερα εφαρμόστηκε στις κωνικές τομές, όπου και επέφερε σημαντικά αποτελέσματα (*ό.π.*). Εγείρονται, φυσικά, ορισμένα ερωτήματα. Εάν οι Έλληνες ή-

κτη. Πέραν των άλλων φανερών μειονεκτημάτων αδυνατεί να απαντήσει στο πλέον αμείλικτο και πασιφανές ερώτημα, δηλαδή γιατί τα ελληνικά Μαθηματικά έμειναν προσκολλημένα καθ' όλη τη διάρκεια της ανάπτυξής τους στη «δύστροπη», «αδέξια», «εξαιρετικά δυσχερή» μέθοδο της «γεωμετρικής άλγεβρας», με την παραβολή χωρίων, τον μετασχηματισμό αναλογιών με τη βοήθεια γεωμετρικών σχημάτων κ.λπ. κ.λπ.; Το ερώτημα αυτό γίνεται ακόμη οξύτερο αν λάβει κανείς υπ' όψιν του ότι οι υπεύθυνοι για τη διατύπωση της άποψης περί «γεωμετρικής άλγεβρας», χωρίς κανέναν ενδοιασμό, θεωρούν ως δεδομένο (είναι βέβαιοι) ότι υπήρχε ένα υποκείμενο αλγεβρικό οικοδόμημα στην ελληνική γεωμετρία, καθ' όλη τη διάρκεια της ανάπτυξής της. Γιατί, τότε, αυτό το αλγεβρικό πλαίσιο παρέμεινε πάντοτε στο βάθος, κρυμμένο, καμουφλαρισμένο, συγκαλυμμένο;

Θα μπορούσε να απαντήσει κανείς ότι ο αρχαίος Έλληνας μαθηματικός δεν μπορούσε να χρησιμοποιήσει τα γράμματα ως αλγεβρικά σύμβολα, αφού τα γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου χρησιμοποιούνταν ήδη για τον συμβολισμό των αριθμών και, έτσι, το «μόνο» που είχε πλέον στη διάθεσή του ήταν οι γεωμετρικές απεικονίσεις. Μια τέτοια απάντηση όμως θα σήμαινε ότι δεν αντιλαμβανόμαστε καθόλου το ερώτημα και ότι το αποφεύγουμε.[16] Εάν αναγκαίο συστατικό του αλγεβρικού τρόπου τού σκέπτεσθαι είναι η ύπαρξη ενός πρό-

ταν τόσο έξυπνοι ώστε να πάρουν τη «βαβυλωνιακή άλγεβρα» και να την γεωμετρικοποιήσουν, τότε γιατί άντλησαν μάλλον επιλεκτικά από τον βαβυλωνιακό «πακτωλό»; Και, συγκεκριμένα, γιατί δεν υιοθέτησαν από τους Βαβυλωνίους το θεσιακό αριθμητικό σύστημα αλλά έμειναν προσκολλημένοι σε ένα τελείως άβολο αριθμητικό σύστημα; Γιατί δεν μπόρεσαν να κατανοήσουν τα μεγάλα «πλεονεκτήματα» της βαβυλωνιακής προσέγγισης στην αστρονομία και επέμεναν αποκλειστικά στα γεωμετρικά μοντέλα, προτιμώντας τα από τις αριθμητικές ακολουθίες; Γιατί δεν χειρίστηκαν τους «αρρήτους» όπως οι Βαβυλώνιοι; (Στην περίπτωση αυτή δεν θα υπήρχε καμία «κρίση λόγω της ασυμμετρίας»!). Και αυτά είναι μόνον μερικά από τα πολλά ενοχλητικά ερωτήματα που πηγάζουν από την υπόθεση του Neugebauer.

16. Αυτή ακριβώς είναι η άποψη που εκφράζει ο Abel Rey στο βιβλίο του *La science dans l'Antiquité*, 3: *La maturité de la pensée scientifique en Grèce*, Paris, Albin Michel, 1939, υποσημ. 1, σ. 391. Στην υποσημείωση αυτή ο Rey φαίνεται να υπονοεί ότι υπήρχε μια «αριθμητική άλγεβρα», οπότε, οι αρχαίοι Έλληνες είχαν μια πραγματική επιλογή ανάμεσα σε αυτήν την άλγεβρα και στον γεωμετρικό συμβολισμό της «γεωμετρικής άλγεβρας» και, επίσης, ότι (φρονίμως ποιούντες) προτίμησαν την τελευταία! Αλλά, εάν όντως είχε συμβεί κάτι τέτοιο, πού βρίσκονται τα ίχνη αυτής της «αριθμητικής άλγεβρας» κατά τη διάρκεια των πρώτων έξι π.Χ. αιώνων; Δεν υπάρχουν τέτοια ίχνη· και αυτό για έναν απλούστατο λόγο που επισημαίνει ο A. Rey σε προηγούμενη σελίδα του βιβλίου του: «Ο αρχαίος Έλληνας μαθηματικός είναι γεωμέτρης. Στην αριθμητική άλγεβρα δεν θα φθάσει παρά μόνον στο τέλος της ελληνορρωμαϊκής περιόδου, τον τέταρτο μ.Χ. αιώνα και, ακόμη και τότε, με αρκετές ατέλειες» (*ό.π.*, σ. 349). Επί πλέον, αυτή η άποψη του A. Rey έρχεται σαφώς σε αντίθεση με όσα αναφέρει σε άλλα σημεία αυτού του έργου (όπως και σε άλλα έργα του), σχετικά με τις εγγενείς θεμελιώδεις διαφορές που υπάρχουν ανάμεσα στη γεωμετρία και στην άλγεβρα, καθώς η τελευταία απαιτεί έναν νέο τρόπο του σκέπτεσθαι, κ.λπ. (Περισσότερα γι' αυτό παρακάτω.)

σφορου για την εκτέλεση πράξεων συμβολισμού (τελεστικός πράξεων συμβολισμός) και εάν οι αρχαίοι Έλληνες σκέπτονταν αλγεβρικά, τότε κατείχαν έναν τέτοιο τελεστικό πράξεων συμβολισμό. Η γραφική μορφοποίηση των συμβόλων είναι άνευ σημασίας· εάν τα γράμματα του αλφαβήτου δεν ήταν δυνατόν να χρησιμοποιηθούν (και αυτό κάθε άλλο παρά είναι αποσαφηνισμένο), τότε κάποια *άλλα* σύμβολα *θα έπρεπε* να χρησιμοποιηθούν για να υλοποιηθεί ο αλγεβρικός τρόπος του σκέπτεσθαι. Τα γεωμετρικά διαγράμματα που συναντούμε στα ελληνικά μαθηματικά κείμενα *δεν* είναι, ασφαλώς, αλγεβρικά σύμβολα με την κυριολεκτική σημασία της λέξης· και, εκτός αυτού, δεν είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν προκειμένου να γίνουν *πράξεις* μεταξύ τους.

Έτσι, το ερώτημα παραμένει αναπάντητο: Εάν το να σκέπτεται κανείς αλγεβρικά απλοποιεί τα πράγματα, όπως ο καθένας θα συμφωνούσε, και εάν οι μεγάλες ελληνικές μαθηματικές διάνοιες ήσαν κατά βάθος αλγεβριστές, τότε γιατί έθεσαν τους σχετικά απλούς αλγεβρικούς συλλογισμούς τους στα άκομψα και άβολα γεωμετρικά καλούπια; Επίσης, εάν σκέπτονταν αλγεβρικά, και αν η πιο βασική διαφορά ανάμεσα στον αλγεβρικό και στον γεωμετρικό τρόπο συλλογισμού βρίσκεται, όπως εγώ νομίζω, στη διάκριση ανάμεσα στο *συμβολικό* και στο *εκτασιακό* μέγεθος (δηλαδή, στο μέγεθος που αναφέρεται στον *χώρο*), τότε γιατί αμελούσαν συστηματικά να χρησιμοποιήσουν κάποιον αλγεβρικό συμβολισμό στα γραπτά τους; Πώς μπορεί να εξηγήσει κανείς λογικά μια τέτοια αμέλεια; Μπορεί η αβάσιμη υπόθεση μιας τέτοιας μαθηματικής σχιζοφρένειας να εξηγηθεί με κάποιον πειστικό ιστορικο-ορθολογικό τρόπο;

II

Στην προηγούμενη ενότητα αναφέρθηκα ακροθιγώς στα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της γεωμετρίας και της άλγεβρας. Ας εξετάσουμε τώρα το θέμα αυτό κάπως εκτενέστερα. Ποια είναι τα πιο θεμελιώδη γνωρίσματα του γεωμετρικού τρόπου του σκέπτεσθαι; Η γεωμετρική σκέψη αφορά τον χώρο και τις ιδιότητές του· επίσης, είναι σκέψη ενσωματωμένη στη (διαπλεκομένη με τη) γραφική, διαγραμματική αναπαράσταση. Αν τα διαγράμματα της γεωμετρίας είναι τα «σύμβολά» της, τότε αυτά τα «γεωμετρικά σύμβολα» παρουσιάζουν ένα χαρακτηριστικό το οποίο απουσιάζει παντελώς από τα αληθινά (αλγεβρικά) σύμβολα: είναι εγγενώς εκτασιακά, διότι ο χώρος τον οποίο παριστάνουν είναι εκτασιακός· απευθύνονται στο μάτι του γεωμέτρη και στην εποπτεία που έχει για τον χώρο· υποστασιοποιούν, πράγματι, κατά έναν πολύ χειροπιαστό τρόπο, την εποπτεία του γεωμέτρη για τον χώρο. Η «αληθινή» γεωμετρία (όχι η αναλυτική γεωμετρία) είναι αδιανόητη χωρίς διαγράμματα και γεωμετρικές κατασκευές. Αυτά τα διαγράμματα είναι οι χαρακτήρες με τους οποίους γράφεται η γεωμετρική γλώσσα: χωρίς διαγράμματα δεν υπάρχει γεωμετρικός τρόπος του σκέπτεσθαι. Αν και είναι αλήθεια ότι αυτά τα διαγράμματα δεν είναι παρά κακά και ατελή αντίγραφα των αληθινών γεωμετρικών αντικειμένων και σχέσεων, ωστόσο μόνο μέσω αυτών ο γεωμέτρης μπορεί να φέρει εις πέρας τους εκτενείς και περίπλοκους συλλογισμούς που συνιστούν το κάλλος και το μεγαλείο της γεωμετρίας.

Αν και τα διαγράμματα αποτελούν ένα ουσιαστικό και αναπόσπαστο μέρος της γεωμετρικής σκέψης, δεν είναι, ωστόσο, το μοναδικό συστατικό της. Πρέπει συνήθως να συνοδεύονται από μια ρητορική συνιστώσα, την απόδειξη, η σημαντικότερη λειτουργία της οποίας είναι να εισαγάγει την παράμετρο του χρόνου, η οποία είναι αναγκαία προκειμένου να ληφθούν τα ολοκληρωμένα, τελειοποιημένα, άψογα διαγράμματα μέσα από όλα τα απαιτούμενα ενδιάμεσα βήματα και χειρισμούς που οδηγούν στο επιθυμητό συμπέρασμα. Με άλλα λόγια, αν υπάρχει μια τελεστική πράξεων, χειριστική πλευρά στη γεωμετρική σκέψη, και νομίζω ότι πράγματι υπάρχει, αυτή πραγματώνεται όχι στο επίπεδο του «γεωμετρικού συμβόλου», του διαγράμματος (τουλάχιστον αυτό δεν συμβαίνει στη γραπτή παράδοση, η οποία είναι και η μόνη που μας απασχολεί εδώ), αλλά στο ρητορικό, περιγραφικό, παραινετικό επίπεδο της πραγματικής απόδειξης. Πιο απλά, αν κάποιος θέλει να αποδώσει καθεστώς συμβόλου στα γεωμετρικά διαγράμματα (και δεν είναι καθόλου βέβαιο ότι αυτή η απόδοση είναι απολύτως νόμιμη), πρέπει κατ' ανάγκην να αντιληφθεί ότι αυτός ο «συμβολισμός» δεν είναι κατά κανέναν τρόπο *τελεστικός πράξεων* συμβολισμός, συγκρινόμενος, ας πούμε, με τον σύγχρονο αλγεβρικό συμβολισμό που είναι γνήσια τελεστικός πράξεων.[17]

Ερχόμαστε έτσι στα χαρακτηριστικά του αλγεβρικού τρόπου του σκέπτεσθαι, όπως αυτά συγκροτήθηκαν κατά την ιστορική πορεία ανάπτυξης της άλ-

17. Πρβλ. τί έχει να πει ο A. Rey όσον αφορά τα χαρακτηριστικά της γεωμετρικής μεθόδου: «Η γεωμετρική κατασκευή ... απαιτεί ... μια διαίσθηση πιο ξεχωριστή από ό,τι οι τύποι της άλγεβρας ... Κατ' αρχάς, απαιτεί μια διαίσθηση συγκεκριμένη. Σε αυτήν, το πνεύμα υποτάσσεται, όπως θα πει ο Descartes, στις γραμμές, στις γωνίες και στα σχήματα, στις περίπλοκες διευθετήσεις της σχεδίασής τους και, όπως δίδασκαν οι αρχαίοι Έλληνες, στον κανόνα και στον διαβήτη. Υπάρχει εδώ, θα υποστηρίξει και πάλι ο Descartes, μια επίπονη προσπάθεια, *περιοριστική*, θα προσθέσουμε εμείς, της φαντασίας: περιοριστική διότι η εικόνα είναι κάτι που έχει όρια και ιδιαιτερότητα απέναντι στην εννοιολογική δραστηριότητα, στη σχέση η οποία συλλαμβάνεται τελείως γυμνή.

Ακολούθως, ... [η] γεωμετρική κατασκευή είναι μια σύνθεση όπου κάθε βήμα προετοιμάζει το επόμενο, όπου οι επινοήσεις αλληλοσυνδέονται και αλληλοκαθορίζονται. Αλλά, σε κάθε επινόηση ξεχωριστά, κάθε κατασκευή απαιτεί επιτηδειότητα, επινοητικότητα, διαίσθηση, μια ιδιαίτερη ευστροφία ...

Ο γεωμετρικός συμβολισμός παραμένει πάντοτε εκείθεν του αλγεβρικού συμβολισμού. Για να συλλάβει κανείς τη διάρθρωση της σκέψης στην άλγεβρα πρέπει να απελευθερωθεί από την ανάγκη της κατασκευής, κατά τον ίδιο τρόπο όπως η "κατασκευή" μάς έδινε τη δυνατότητα να απελευθερωθούμε από την ανάγκη να υπολογίζουμε και να λογαριάζουμε, και από τις ειδικές περιπτώσεις από τις οποίες επηρεάζονταν» (A. Rey: *Les mathématiques en Grèce au milieu du V^e siècle*, Paris, Hermann & C^ie, 1935, σ. 55-56)

γεβρας. Σύμφωνα με μια πρόσφατη μελέτη,[18] τα κύρια χαρακτηριστικά του αλγεβρικού τρόπου του σκέπτεσθαι είναι:

1) Ο τελεστικός πράξεων συμβολισμός.
2) Η ενασχόληση με μαθηματικές σχέσεις παρά με μαθηματικά αντικείμενα, σχέσεις οι οποίες καθορίζουν τις δομές που αποτελούν το αντικείμενο της σύγχρονης άλγεβρας. Ο αλγεβρικός τρόπος του σκέπτεσθαι βασίζεται, επομένως, στη σχεσιακή και όχι στην κατηγορική λογική.
3) Η απελευθέρωση από οποιαδήποτε οντολογικά ερωτήματα και δεσμεύσεις και, σε σύνδεση με αυτό, η αφαιρετικότητα παρά η εποπτικότητα.[19]

Φαίνεται, επομένως, ότι ο αλγεβρικός τρόπος του σκέπτεσθαι είναι *διαφορετικός* από τον γεωμετρικό. Είναι τελείως αφηρημένος, απελευθερωμένος από εξαρτήσεις που αφορούν τις αισθήσεις και τον χώρο, είναι χειριστικός, οι οντότητες τις οποίες χειρίζεται είναι και αυτές τελείως αφηρημένες, σκέτα σύμβολα, είναι αναλυτικός, λειτουργικός, έχει καθολικότητα εφαρμογής, η οποία απουσιάζει από τον γεωμετρικό τρόπο του σκέπτεσθαι, και είναι, τουλάχιστον έως έναν ορισμένο βαθμό, μηχανικός όσον αφορά τους κανόνες χειρισμού των συμβόλων.[20]

18. Michael S. Mahoney: «Die Anfänge der algebraischen Denkweise im 17. Jahrhundert», *Rete*, 1 (1971), σ. 15-31.

19. *Ό.π.*, σ. 16-17. Υπάρχει μια μικρή παραλλαγή αυτού του χαρακτηρισμού, που εμφανίζεται σε μια διαφωτιστική ανασκόπηση με αφορμή την επανέκδοση του βιβλίου του Neugebauer, *Vorgriechische Mathematik*. Βλ. Michael S. Mahoney: «Babylonian Algebra: Form Vs. Content», *Studies in History and Philosophy of Science*, 1 (1971), σ. 369-380, ιδίως στη σ. 372.

20. Ο Abel Rey, στην πάρα πολύ διαφωτιστική ανάλυσή του των χαρακτηριστικών του αλγεβρικού τρόπου του σκέπτεσθαι (που κάνει μερικά από τα άλλα κοινότοπα και εσφαλμένα συμπεράσματά του να ξεχωρίζουν σαν τη μύγα μέσα στο γάλα, κατά τη γνωστή παροιμία), ουσιαστικά συμφωνεί με τον πιο συνοπτικό χαρακτηρισμό του Mahoney. Παραδείγματος χάριν: «Η εκ των ων ουκ άνευ προϋπόθεση για μια άλγεβρα θα είναι ... ένα σύστημα συμβόλων και μηχανικών κανόνων για τον χειρισμό αυτών των συμβόλων. Είναι μια καθολική *λογιστική επί των ειδών*, και με αυτόν τον όρο ο Viète την διέκρινε από την αριθμητική λογιστική. Το προεξάρχον χαρακτηριστικό της είναι η απόδραση από καθετί το συγκεκριμένο προς την καθαρή αφαίρεση. Χρειάζεται, λοιπόν, να κάνουμε αφαίρεση από τους αριθμούς και τους αριθμητικούς υπολογισμούς, να εκτελούμε πράξεις με όρους που είναι καθολικά υποκατάστατά τους, με τη βοήθεια ενός τελεστικού πράξεων συμβολισμού. Οι άγνωστοι έχουν, κατά συνέπεια, την ίδια φύση και παίζουν στις πράξεις τον ίδιο ρόλο όπως και οι γνωστοί» (*Les mathématiques en Grèce*, σ. 38). «... τα σύμβολα των πράξεων ... αντικαθιστούν στην άλγεβρα τους συνδέσμους του συλλογισμού» (*ό.π.*). «[Στην άλγεβρα] δεν εργαζόμαστε με αριθμούς, με ποσότητες, με τιμές των όρων. Εργαζόμαστε *με σχέσεις*. Εδώ, οι όροι είναι ήδη σχέσεις, διότι αλληλοσυσχετίζονται ο ένας με τον άλλο ή, για να χρησιμοποιήσουμε τη λέξη με την πιο γενική σημασία της –που προαναγγέλλει όμως τη σύγχρονη τεχνική σημασία της–, αποτελούν συνάρτηση ο ένας του άλλου» (*ό.π.*, σ. 40). «Η ανάγκη του συμβόλου και η δημιουργία του δείχνουν ότι η σκέψη δεν μπορεί πλέον, για τους σκοπούς που θέτει και βρίσκει, να χρησιμοποιεί μια συγκεκριμένη και ειδική αναπαράσταση. Ιδού το άλμα ...» (*ό.π.*, σ. 45). «Μόνο η άλγεβρα μας επιτρέπει να υπερβούμε τον χώρο των αισθήσεων» (*ό.π.*, σ. 56).

III

Ας επιστρέψουμε τώρα στην έννοια της «γεωμετρικής άλγεβρας». Και μόνον από αυτά που αναφέρθηκαν προηγουμένως θα φαινόταν ότι είναι ένα τερατώδες, υβριδικό κατασκεύασμα, μια αντίφαση, μια λογική αδυνατότητα. Πράγματι έτσι είναι. Και, όπως θα δούμε, είναι επίσης μια ιστορική αδυνατότητα. Ο λόγος, βεβαίως, είναι πολύ απλός και σαφής. Για να έχουμε ένα *X* που μοιάζει με *Y* πρέπει απαραιτήτως να υπάρχει (στο παρελθόν ή στο παρόν) κάποιο *X*, σε σχέση προς το οποίο και μόνον η οποιαδήποτε απομάκρυνση από αυτό αποκτά νόημα και μπορεί να αποτιμηθεί. Εάν δεν υπάρχει σήμερα ούτε υπήρξε ποτέ στο παρελθόν κάποιο *X*, τότε τα *X* που μοιάζουν με *Y* είναι λογικώς και αντικειμενικώς αδύνατα. Κατά τον ίδιο τρόπο, το να μιλούμε για «γεωμετρική άλγεβρα» στην ελληνική αρχαιότητα έχει νόημα μόνον αν ταυτόχρονα ή παλαιότερα υπήρχε κάποια άλγεβρα από την οποία οι αρχαίοι Έλληνες απομακρύνθηκαν κατά κάποιον τρόπο. Το γεγονός είναι ότι (παρά τους πάμπολλους αλλά ιστορικά ατεκμηρίωτους ισχυρισμούς για την ύπαρξη κάποιας υποτιθέμενης αιγυπτιακής, βαβυλωνιακής ή ακόμη και πυθαγόρειας άλγεβρας) ουδέποτε υπήρξε άλγεβρα στην προχριστιανική εποχή.[21] Κατά συνέπεια, δεν μπορούσε να έχει υπάρξει ούτε «γεωμετρική άλγεβρα».

Αν ωστόσο, παρά τα όσα είπαμε προηγουμένως, διάφοροι συγγραφείς μιλούν για «γεωμετρική άλγεβρα» των αρχαίων Ελλήνων, αυτό οφείλεται αποκλειστικά στο γεγονός ότι αυτοί οι συγγραφείς έτυχε να ζουν σε μια εποχή μεταγενέστερη της επινόησης της άλγεβρας και της εφαρμογής της στη γεωμετρία (αναλυτική γεωμετρία) και να υποθέτουν, επομένως, αδικαιολόγητα και ανιστορικά ότι η συμμετρική περίπτωση, δηλαδή η εφαρμογή της *γεωμετρίας* στην *άλγεβρα*, έχει συντελεσθεί και αυτή. Εν τούτοις, το συμπέρασμα αυτό είναι ιστορικά απαράδεκτο. Στην ιστορική ανάπτυξη των Μαθηματικών υπάρχει (γενικά μιλώντας) ένα *αριθμητικό* στάδιο (αιγυπτιακά και βαβυλωνιακά Μαθηματικά), στο οποίο οι συλλογισμοί είναι, σε μεγάλο βαθμό, συλλογισμοί της στοιχειώδους αριθμητικής ή βασίζονται σε εμπειρικούς κανόνες, υπό τύπον παραδειγμάτων, που έχουν προκύψει από επιτυχείς δοκιμές και χρησιμοποιούνται ως υποδείγματα,[22] ένα *γεωμετρικό* στάδιο, χαρακτηριστικό παράδειγμα και αποκορύφωμα του οποίου είναι τα κλασικά ελληνικά Μαθηματικά, το οποίο χαρακτηρίζεται από αυστηρούς παραγωγικούς συλλογισμούς που παρουσιάζονται με τη μορφή της αξιωματικής-παραγωγικής μεθόδου, και ένα *αλγεβρικό* στάδιο, τα πρώτα ίχνη του οποίου θα μπορούσαν να ανευρεθούν στα *Αριθμητικά* του Διοφάντου και στο *Hisab al-jabr w'al muqàbalah* του Al-Khwarizmi, αλλά οι απαρχές της πλήρους εκτύλιξης των δυνατοτήτων του δεν θα αρχίσουν πριν από τον 16ο αιώνα στη Δυτική Ευρώπη·[23] χαρακτηρίζεται, όπως είδαμε, από υψηλό

21. Βλ. M. Mahoney: «Babylonian Algebra: Form Vs. Content» και «Die Anfänge der algebraischen Denkweise im 17. Jahrhundert»· Abel Rey: *Les mathématiques en Grèce*, σ. 30, 32, 34, 36-37, 41, 44, κ.ε.· επίσης, Léon Rodet: *Sur les notations numériques et algébriques antériereument au XVI*ᵉ *siècle* (Paris: Ernest Leroux, 1881), ιδίως σ. 69-70· Jacob Klein: *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra* (Cambridge, Mass.: M.I.T. Press, 1968)· Á. Szabó: *Anfänge der griechischen Mathematik* (München-Wien: R. Oldenburg, 1969), ιδίως σ. 28, 34, 35-36, και κυρίως το «Anhang» στις σ. 455-488· Paul-Henri Michel: *De Pythagore à Euclide: Contributions à l'histoire des mathématiques Préeuclidiens* (Paris: Les Belles Lettres, 1950), σ. 639-646· G.A. Miller: «Weak Points in Greek Mathematics», *Scientia*, 39 (1926), σ. 317-322.

Μερικές από τις εργασίες που αναφέρονται εδώ υποστηρίζουν αυτήν την άποψη ρητά και απερίφραστα (η εργασία του Szabó και σε μικρότερο βαθμό του Klein)· άλλες τηρούν, στην καλύτερη περίπτωση, επαμφοτερίζουσα στάση (του Mahoney και του Rey), κατορθώνοντας να προσδιορίσουν την οντολογική ασυμμετρία του γεωμετρικού και αλγεβρικού τρόπου του σκέπτεσθαι και, ταυτόχρονα, αποδεχόμενες (εμμέσως ή σαφώς) την ιστορική νομιμότητα της έννοιας της «γεωμετρικής άλγεβρας», χωρίς να συνειδητοποιούν την αντίφαση που εμπεριέχει· τέλος, μερικές, αν και διατυπώνουν μια λιγότερη σαφή άποψη (του Rodet) ή μια απαράδεκτη, ανιστορική άποψη (του Michel, και, ειδικά, του Miller), δίνουν τη δυνατότητα στη διορατική ματιά του ιστορικά προσανατολισμένου αναγνώστη να καταλήξει εύκολα σε συμπεράσματα αντίθετα από αυτά του συγγραφέα.

22. Πρβλ. A. Rey: *Les mathématiques en Grèce*, σ. 34, 41.

23. *Ό.π.*, σ. 43, 45, 91-92. Σε αντίθεση με αυτήν την άποψη, ο Neugebauer φαίνεται να πιστεύει ότι τα Μαθηματικά σε όλη την ιστορία τους υπήρξαν πάντοτε άλγεβρα σε διάφορες μεταμφιέσεις και μορφές. Έτσι, το πρώτο στάδιο στην ανάπτυξη των Μαθηματικών (της άλγεβρας) αντιπροσωπεύεται από το βαβυλωνιακό εξηνταδικό θεσιακό σύστημα και τις πράξεις με αριθμούς που ήσαν δυνατοί στο πλαίσιο ενός τέτοιου συστήματος («Zur geometrischen Algebra», σ. 247). Το δεύτερο στάδιο αντιπροσωπεύεται από την καθαυτό «βαβυλωνιακή άλγεβρα», στην οποία τα προβλήματα ανάγονται σε δευτεροβάθμιες εξισώσεις κανονικής μορφής· το τρίτο στάδιο χαρακτηρίζεται από τη μετάφραση των αλγεβρικών τεχνικών στη γλώσσα της γεωμετρίας – ελληνικά Μαθηματικά ή γεωμετρική άλγεβρα (*ό.π.*), ενώ, τέλος, το τέταρτο στάδιο στην ανάπτυξη των Μαθηματικών (της άλγεβρας) είναι «... [η] περίοδος της πρόσφατης επαναμετάφρασης της γεωμετρικής άλγεβρας σε "αλγεβρική" άλγεβρα» (*ό.π.*, σ. 249). Επί πλέον, για τον Neugebauer, η γεωμετρία είχε πάντοτε δευτερεύοντα, παράγωγο χαρακτήρα: «Οι μεγάλες πρόοδοι της γεωμετρίας είναι σε όλες τις φάσεις άρρηκτα συνδεδεμένες [!] με την ανάπτυξη άλλων κλάδων (Αναλυτικής Γεωμετρίας και στοιχειώδους Άλγεβρας, Διαφορικής Γεωμετρίας και Ανάλυσης, Τοπολογίας και επιφανειών Riemann + αφηρημένη Άλγεβρα), έτσι που το αμιγώς γεωμετρικό μέρος έπρεπε πάντοτε να αποσυνδεθεί εκ των υστέρων [!] από αυτήν τη σύνδεση [;]. Όσον αφορά την πρώιμη ιστορία των Μαθηματικών, πρόκειται για μια "αμιγή" ("συνθετική") γεωμετρία υπερβολικά δύσκολη [Γιατί θα έπρεπε να συμβαίνει αυτό; Υπάρχει κάποια επιβεβαίωση για αυτόν τον ανεπιφύλακτο ισχυρισμό, εκτός από την εκ των υστέρων αποκτηθείσα αλγεβρική γνώση;]. Το αρχικό βοηθητικό μέσο είναι εδώ η σύνδεση με την περιοχή των (ρητών) αριθμών, και μία ουσιαστική πρόοδος της γεωμετρίας καθίσταται πάντα εφικτή τότε, αφού πρώτα αναπτυχθούν αρκετά τα μη γεωμετρικά μέσα» (*ό.π.*, σ. 246). Είναι αλήθεια ότι ο Neugebauer γνωρίζει πολύ καλά τη σημασία του συμβολισμού για την ανάπτυξη των Μαθηματικών (πρβλ. *ό.π.*, σ. 246-247)· (αυτό σε τελευταία ανάλυση δεν θα έπρεπε να μας εκπλήσσει, καθώς αναφερόμαστε σε κάποιον ο οποίος, ουσιαστικά, ταυτίζει τα Μαθηματικά με την άλγεβρα!). Ωστόσο, τα συμπεράσματα που αντλεί από αυτήν την αντίληψη μού φαίνονται αδικαιολόγητα. Ακόμη και αν έχει δίκιο ότι οι υπολογιστικές τεχνικές στους προελληνικούς

βαθμό αφαίρεσης, από έναν τελεστικό πράξεων συμβολισμό καθολικής εφαρμοσιμότητας και εστιάζεται σε σχέσεις και δομές.

Μόνον μετά την εγκαθίδρυση του αλγεβρικού σταδίου θα μπορούσε θα εμφανιστεί η «αλγεβρική γεωμετρία» (δηλαδή η αναλυτική γεωμετρία) και πράγματι τότε εμφανίστηκε. Το συμμετρικό αντίστοιχο αυτής της «αλγεβρικής γεωμετρίας», δηλαδή η «γεωμετρική άλγεβρα», δεν αποτελεί ιστορική οντότητα, είναι, απλώς, καρπός των μαθηματικο-ιστορικών ενασχολήσεων των μαθηματικών οι οποίοι γεννήθηκαν κατά τη διάρκεια του αλγεβρικού σταδίου της ανάπτυξης των Μαθηματικών. Είναι αποκύημα της μαθηματικής φαντασίας τους, μάλλον, παρά κάτι το πραγματικό. Είναι επινόηση του σύγχρονου μαθηματικού, ο οποίος διαβάζει τα αρχαία κείμενα με σύγχρονα γυαλιά, δηλαδή είναι το άμεσο και καθαρό αποτέλεσμα της ικανότητας του σύγχρονου μαθηματικού να διαβάζει τη γεωμετρία με αλγεβρικό τρόπο, να μεταγράφει τις γεωμετρικές προτάσεις στη γλώσσα των αλγεβρικών ισοτήτων και «ως εκ τούτου» να υποθέτει ότι η γεωμετρία δεν ήταν τίποτε άλλο από αυτό, πάντοτε και παντού.

Επιπροσθέτως, αν μπορέσουμε να στηρίξουμε το ως άνω επιχείρημα αποδεικνύοντας ότι η υπόθεση (χάριν του επιχειρήματος) μιας «γεωμετρικής άλγεβρας» οδηγεί *συγκεκριμένες* αναλύσεις αρχαίων μαθηματικών κειμένων σε παραλογισμούς, τότε αυτό θα μας απάλλασσε από αυτήν την τερατώδη έννοια και θα οδηγούσε κατεπειγόντως στον θάνατό της. Αυτό ακριβώς έχουμε την πρόθεση να κάνουμε, χρησιμοποιώντας παραδείγματα από το μεγάλο κλασικό έργο των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών, τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη· ας ελπίσουμε, λοιπόν, ότι οι ώρες της «γεωμετρικής άλγεβρας», αυτού του αυθαίρετου και στρεβλού εννοιολογικού κατασκευάσματος, είναι πράγματι μετρημένες!

IV

Είναι δυνατόν, τουλάχιστον κατ' αρχήν, ένας οπαδός της άποψης που ενσωματώνεται στην έννοια της «γεωμετρικής άλγεβρας» να αντικρούσει τα παραπάνω επιχειρήματα με τον ακόλουθο τρόπο: «Έστω, να δεχθώ (αν και απρόθυμα!) ότι, αφού δεν υπάρχουν *ρητά* παραδείγματα αλγεβρικών κειμένων στις αιγυπτιακές και βαβυλωνιακές μαθηματικές πηγές, δεν υπήρξε προελληνική άλγεβρα. Η κατάσταση, ωστόσο, είναι τελείως διαφορετική όσον αφορά τα ελληνικά Μαθηματικά. Είναι προφανές για κάποιον με εκπαιδευμένο και διεισδυτικό μάτι ότι η ελληνική γεωμετρία δεν είναι τίποτε άλλο παρά άλγεβρα με γεωμετρικό

πολιτισμούς προηγούνται των γεωμετρικών θεωρήσεων, αυτό δεν συνεπάγεται ότι η άλγεβρα προηγήθηκε της γεωμετρίας στον ελληνικό πολιτισμό. Η λογιστική επ' ουδενί τρόπω είναι άλγεβρα και η παράθεση ενός αποσπάσματος από τον Αρχύτα (σ. 245), σύμφωνα με το οποίο η λογιστική προηγείται των τεχνών, συμπεριλαμβανομένης και της γεωμετρίας (Diels-Kranz: *Die Fragmente der Vorsokratiker*, 5η έκδ., 47B4), δεν αποδεικνύει ότι στα αρχαία ελληνικά Μαθηματικά η άλγεβρα προηγήθηκε της γεωμετρίας!

ένδυμα. Συνεπώς, οι αρχαίοι Έλληνες πρέπει να θεωρηθούν ως οι εφευρέτες της άλγεβρας.[24] Εν τούτοις, για λόγους που είναι ανεξάρτητοι από το θέμα μας, αποφάσισαν να μη χρησιμοποιήσουν τον κλασικό τύπο αλγεβρικού συμβολισμού, αλλά να ντύσουν τους αλγεβρικούς τύπους με γεωμετρική περιβολή. Έτσι, η ίδια η ύπαρξη της ελληνικής γεωμετρίας αποτελεί την καλύτερη απόδειξη για την ύπαρξη μιας αρχαίας άλγεβρας, ελληνικής άλγεβρας. Όσον αφορά δε την υποτιθέμενη ασυμβατότητα και ασυμμετρία των δύο τρόπων του σκέπτεσθαι (του γεωμετρικού και του αλγεβρικού), είναι κάτι που δεν με πείθει, τα σύγχρονα Μαθηματικά δεν το δέχονται, και δεν το δέχονταν ούτε οι αρχαίοι Έλληνες».

Τί μπορεί να απαντήσει κανείς σε έναν τέτοιο συνομιλητή; Έχω τη γνώμη ότι το «επιχείρημά» του στην πραγματικότητα δεν είναι επιχείρημα και ότι του έχει ήδη δοθεί απάντηση με όσα αναφέραμε προηγουμένως. Εν τούτοις, με έναν πιο ουσιαστικό τρόπο και προκειμένου να προσαρμόσουμε τη γενική ανάλυση που παρουσιάσαμε προηγουμένως στον ad hoc χαρακτήρα του υποτιθέμενου αντεπιχειρήματος, εδώ ταιριάζει η ακόλουθη απάντηση: Η άμεση πραγμάτωση της *Σκέψης* είναι η *Γλώσσα*. Οι διαφορές ανάμεσα στους δύο τρόπους του σκέπτεσθαι είναι πραγματικές διαφορές, τις οποίες δεν μπορούμε να απορρίψουμε με μια μονοκονδυλιά, καθώς έχουν τις ρίζες τους στα χαρακτηριστικά του αισθητού χώρου (γεωμετρία) από τη μία πλευρά και στην καθολική σημασιοδότηση του άκρως αφηρημένου διαχειρίσιμου συμβόλου (άλγεβρα) από την άλλη. Διαφορετικοί τρόποι του σκέπτεσθαι συνεπάγονται διαφορετικούς τρόπους του εκφράζεσθαι. Είναι, επομένως, αδύνατον για ένα σύστημα μαθηματικής σκέψης (σαν τα ελληνικά Μαθηματικά) να εμφανίζει μία τέτοια ασυμφωνία μεταξύ του υποτιθέμενου υποκείμενου *αλγεβρικού* χαρακτήρα του και του *καθαρά γεωμετρικού* τρόπου έκφρασής του. Επί πλέον, γιατί οι αρχαίοι Έλληνες έκρυβαν τους τρόπους σκέψης τους; Τί είχαν να κρύψουν;

Το ότι αυτό το τελευταίο ερώτημα είναι θεμιτό –και καθόλου αναίτιο, όπως ίσως μπορεί να φαίνεται εκ πρώτης όψεως– αποδεικνύεται από το ακόλουθο απόσπασμα από τον van der Waerden, στο οποίο ο λόγιος συγγραφέας εξετάζει το δέκατο βιβλίο των *Στοιχείων* του Ευκλείδη:

> Μέχρι την πρόταση Χ 28 τα πράγματα βαίνουν καλώς αλλά, όταν αρχίζουν οι αποδείξεις ύπαρξης, με την πρόταση Χ 29 … δεν καταλαβαίνει κανείς πού

24. Πράγματι, ο Zeuthen και ο Tannery, οι δημιουργοί της έννοιας της «γεωμετρικής άλγεβρας» τον 19ο αιώνα, έγραφαν πριν από τον Neugebauer (που «ανακάλυψε» τη βαβυλωνιακή άλγεβρα) και τον van der Waerden (τον ευκρινέστερο εκπρόσωπο της άποψης ότι η «βαβυλωνιακή άλγεβρα» μετατράπηκε σε ελληνική «γεωμετρική άλγεβρα») και, εν τούτοις, δεν δίσταζαν να μιλούν ελεύθερα για ελληνική «γεωμετρική άλγεβρα», κάθε φορά που συναντούσαν στα *Στοιχεία* προτάσεις που τους φαίνονταν εκτός τόπου, άβολες, αταίριαστες!

αποσκοπούν όλα αυτά. *Ο συγγραφέας κατάφερε με θαυμαστό τρόπο να αποκρύψει τις προθέσεις του* αρχίζοντας με τις κατασκευές, προτού ακόμη εισαγάγει την έννοια της δυωνύμου που φωτίζει κάπως τους στόχους αυτών των κατασκευών και αφήνοντας για πολύ αργότερα τη διαίρεση στους έξι τύπους δυωνύμων.[25]

Για να μη νομίζει ο αναγνώστης ότι οι Tannery, Zeuthen, Neugebauer και van der Waerden είναι οι μόνοι «κακοί», θα ήθελα να δηλώσω ότι, στην πράξη, «όλοι όσοι είναι άξιοι λόγου» στη σύγχρονη ιστοριογραφία των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών έχουν υιοθετήσει τη στάση ότι η «γεωμετρική άλγεβρα» μάς επιτρέπει μια διαφωτιστική διείσδυση στην εσωτερική λειτουργία των ελληνικών Μαθηματικών.[26] Αυτό ισχύει χωρίς αμφιβολία και για τους σύγχρονους συγγραφείς εγχειριδίων, π.χ. τους Carl B. Boyer και Howard Eves·[27] ισχύει επίσης για τους J.F. Scott, Dirk Struik, Florian Cajori, David Eugene Smith, Edna E. Kramer, και ούτω καθεξής.[28] Και, φυσικά, ισχύει για τον μέγιστο αγγλόφωνο συγγραφέα της ιστορίας των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών στη σύγχρονη εποχή, τον Sir Thomas Little Heath.

Ο Heath μάς ενδιαφέρει εδώ διότι (μεταξύ άλλων) είναι ο συγγραφέας των αγγλικών εκδόσεων των συγγραμμάτων των μεγάλων κλασικών των αρχαίων

---

25. *Η αφύπνιση της επιστήμης*, σ. 200, η υπογράμμιση δική μου. Για μία φορά ακόμη ο van der Waerden ακολουθεί τα βήματα τού Ο. Neugebauer, ο οποίος στο «Apollonius Studien (Studien zur Geschichte der antiken Algebra II)», είχε ήδη δηλώσει ότι, παρ' όλο που υπάρχουν αναγνωρίσιμες δομές και αλγόριθμοι σε όλη την έκταση των *Κωνικών*, τις οποίες το εξασκημένο μάτι του μαθηματικού μπορεί να διακρίνει, αυτές οι δομές, οι αλγόριθμοι και οι αποδεικτικές μέθοδοι, στη συνέχεια, έχουν τελείως αποκρυβεί, καμουφλαριστεί («... αποκαλύφθηκε πλήρως εκ των υστέρων ...»· βλ. *ό.π.*, υποσημ. 15, σ. 253). Επί πλέον, ο Neugebauer, μιλώντας για τις δικές του αναλυτικές μεταγραφές και τους χειρισμούς της γεωμετρικής ρητορικής του Απολλωνίου, σημειώνει: «*Αυτή η ιδιαίτερα απλή μέθοδος παρείχε το κλειδί για όλες τις κατασκευές που παρατίθενται εδώ.* Ο Απολλώνιος τα αναποδογύρισε όλα και τα επανατοποθέτησε με μεγάλη επιμέλεια και φροντίδα» (*ό.π.*, σ. 251).

26. Ο άκρατος ενθουσιασμός του Neugebauer για τη γεωμετρική άλγεβρα (ως δημιουργό της οποίας θεωρεί εσφαλμένα τον Zeuthen) είναι χαρακτηριστικός: «Στον Zeuthen οφείλουμε τη βασική για την κατανόηση του συνόλου των ελληνικών Μαθηματικών παρατήρηση ότι ειδικά τα βιβλία II και VI των *Στοιχείων* του Ευκλείδη αφορούν έναν γεωμετρικό τρόπο διατύπωσης προβλημάτων που στην ουσία είναι αλγεβρικά. Επισήμανε ιδίως ότι στα προβλήματα παραβολής χωρίων του έκτου βιβλίου και στις σχετικές προτάσεις των *Δεδομένων* στηρίζεται η πλήρης μελέτη των εξισώσεων δευτέρου βαθμού. Επί πλέον έδειξε με ποιον τρόπο αυτή η "γεωμετρική άλγεβρα" σχημάτισε τη βάση για την "αναλυτική γεωμετρία" των κωνικών τομών του Απολλωνίου, οι ονομασίες "έλλειψη", "υπερβολή", "παραβολή" των οποίων μάς παραπέμπουν ακόμη και σήμερα στις θεμελιώδεις περιπτώσεις της "παραβολής χωρίων"» («Zur geometrischen Algebra», *Q.u.S.*, 3 B (1936), σ. 249). Δεν υπάρχει σχεδόν καμία σαφώς περιγραφόμενη εξαίρεση στον κανόνα. Ακόμη και αυτοί που, για τον ένα ή τον άλλο λόγο, άρχισαν να έχουν αμφιβολίες για την κληροδοτημένη ερμηνεία (και αυτές οι «αμφιβολίες» βγήκαν στο προσκήνιο μόλις πρόσφατα), κατά κανόνα δεν εγκατέλειψαν την έννοια της «γεωμετρικής άλγεβρας». Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι ο Michael Mahoney (πρβλ., λόγου χάριν, το κατά τα άλλα διαφωτιστικό άρθρο του «Another Look at Greek Geometrical Analysis», *Archive for History of Exact Sciences*, 5 (1968), σ. 318-348, όπου αναφέρει: «Λόγου χάριν, η πρόταση VI, 28 [των *Στοιχείων*], η οποία αποτελεί μέρος της "γεωμετρικής άλγεβρας" των αρχαίων Ελλήνων ...» (σ. 328) ή «Οι πρώτες τεχνικές της ανάλυσης προήλθαν από τις έρευνες των ... Πυθαγορείων και συνοψίζονται στη μέγιστη συνεισφορά αυτής της μαθηματικο-φιλοσοφικής σχολής στα ελληνικά Μαθηματικά: τη γεωμετρική άλγεβρα. Η γεωμετρική άλγεβρα ήταν ένα από τα βασικά εργαλεία της μαθηματικής ανάλυσης. Στα *Δεδομένα* ... ο Ευκλείδης έδωσε προεξάρχουσα θέση στη διδασκαλία της παραβολής χωρίων, που είναι η ουσία της ελληνικής γεωμετρικής άλγεβρας» (*ό.π.*, σ. 330-331)· ακόμη και στην πειστική και έντονη κριτική του στις ανιστορικές μεθόδους του Neugebauer («Babylonian Algebra: Form *Vs.* Content»), ο Mahoney θεωρεί, κατά κάποιον τρόπο, την ανιστορική έννοια της «γεωμετρικής άλγεβρας» ως νόμιμη, αφού αναφέρει ότι η «ελληνική γεωμετρική άλγεβρα» μπορούσε να κατασκευάσει «... ένα δευτεροβάθμιο σύστημα εξισώσεων με δύο αγνώστους από τις τιμές αυτών των αγνώστων ...» (σ. 376), αλλά δεν μπορούσε να κατασκευάσει «... μία δευτεροβάθμια εξίσωση από τις δύο ρίζες της ...» (*ό.π.*). Ένα άλλο, παλαιότερο παράδειγμα του ίδιου συνδρόμου εμφανίζεται στα γραπτά του Abel Rey που αναφέρθηκαν πιο πάνω. (Παρεμπιπτόντως, το 9ο κεφάλαιο του 3ου βιβλίου του *La maturité de la pensée scientifique en Grèce*, επαναλαμβάνει κατά λέξη, στο σύνολό του, το 4ο κεφάλαιο («Arithmétique et système métrique, algèbre, géométrie et algèbre géométrique») τού *Les mathématiques en Grèce au milieu du V^e siècle*, χωρίς να κάνει την παραμικρή νύξη για αυτό στον αναγνώστη). Εξ όσων γνωρίζω, μόνον ο Árpád Szabó, στην εισαγωγή και (κυρίως) σε ένα παράρτημα στις σ. 455-88 (*ό.π.* – θα μιλήσουμε περισσότερο για αυτό πιο κάτω), χωρίς περιστροφές και με σθεναρό τρόπο εφιστά την προσοχή στο γιατί είναι εσφαλμένη η έννοια της «γεωμετρικής άλγεβρας» και ζητά την εγκατάλειψή της. Είχα καταλήξει, ανεξάρτητα, στις ιδέες μου για την ιστορική σαθρότητα της έννοιας της «γεωμετρικής άλγεβρας», όταν, ως μεταπτυχιακός φοιτητής, επιδόθηκα στην ανάγνωση των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών κειμένων και των νεότερων σχολίων επ' αυτών. Κατέληξα στην πεποίθηση ότι πρέπει να απορρίψουμε και να αποκηρύξουμε τη «γεωμετρική άλγεβρα» ως εξηγητικό μηχανισμό για τη μελέτη της ιστορίας των ελληνικών Μαθηματικών και ότι πρέπει, λόγω αυτής της απόρριψης, να ξαναγράψουμε την ιστορία σε υγιή βάση, όταν δίδασκα τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη σε ένα μεταπτυχιακό σεμινάριο στο Πανεπιστήμιο της Οκλαχόμα, το φθινόπωρο του 1972. Έδωσα μια διάλεξη επί του θέματος στο Εβραϊκό Πανεπιστήμιο της Ιερουσαλήμ στα τέλη του φθινοπώρου του ίδιου έτους, η οποία (από όσο μπορώ να κρίνω) συνάντησε ανάμικτη υποδοχή: οι ιστορικοί και οι (πολύ λίγοι) ιστορικά προσανατολισμένοι μαθηματικοί που ήταν παρόντες βρήκαν μάλλον της αρεσκείας τους τα συμπεράσματά της, ενώ οι μαθηματικοί (για να το θέσω επιεικώς) δεν πείστηκαν.

27. Βλ. Carl B. Boyer: *A History of Mathematics* (New York-London-Sydney: John Wiley & Sons, 1968), σ. 85-87, 114-15, 121-131 κ.ε. και Howard Eves: *An Introduction to the History of Mathematics* (New York: Holt, Rinehart and Winston, 1964, αναθεωρημένη έκδ.), σ. 64-69 κ.ε.

28. Βλ. J.F. Scott: *A History of Mathematics* (London: Taylor & Francis, 1960), σ. 23 κ.ε.· Dirk J. Struik: *A Concise History of Mathematics* (New York: Dover, 1948, 2η αναθεωρημένη έκδ.), σ. 58-60 κ.ε. (ελληνική μετάφραση υπό τον τίτλο *Συνοπτική ιστορία των Μαθηματικών*, από την Α. Φερεντίνου-Νικολακοπούλου, Αθήνα, Ζαχαρόπουλος, ^{3}1982)· Florian Cajori: *A History of Mathematics* (New York: MacMillan, 1919), σ. 32-33, 39· David Eugene Smith: *History of Mathematics*, 2 τόμ. (New York: Dover, 1958), τ. 1, σ. 106 και τ. 2, σ. 290· Edna E. Kramer: *The Nature and Growth of Modern Mathematics*, 2 τόμ. (Greenwich Connecticut: Fawcett Publ., 1974), τ. 1, σ. 108, 137-140, 146.

ελληνικών Μαθηματικών, του Ευκλείδη, του Αρχιμήδη και του Απολλωνίου.[29] Οι μεταφράσεις του (όταν αρκείται στον ρόλο του μεταφραστή και μόνο![30]) θεωρούνται αξιόπιστες και εμπεριστατωμένες. Καθώς η πραγμάτευσή μας θα περιοριστεί στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη κυρίως, ας δούμε ποιες είναι οι απόψεις του Heath για τη «γεωμετρική άλγεβρα», στον βαθμό που αναφέρεται στα *Στοιχεία*. Ο Heath πιστεύει ότι μετά την ανακάλυψη της αρρητότητας «... κατέστη δυνατόν να προχωρήσουν από τη γεωμετρική αριθμητική στη γεωμετρική άλγεβρα,[31] η οποία πράγματι την εποχή του Ευκλείδη (και πιθανόν πολύ νωρίτερα) είχε φτάσει σε τέτοιο σημείο ανάπτυξης, ώστε μπορούσε να επιλύει τα ίδια προβλήματα όπως και η γνωστή μας άλγεβρα, στον βαθμό που δεν περιελάμβαναν τον χειρισμό εκφράσεων βαθμού μεγαλύτερου του δευτέρου»,[32] «...Το δεύτερο βιβλίο», συνεχίζει ο Heath, «δίνει τις γεωμετρικές αποδείξεις μερικών αλγεβρικών τύπων (!)»[33] και αμέσως μετά, χωρίς προφανώς να αντιλαμβάνεται την ανακολουθία, συνεχίζει:

> Είναι σημαντικό, ωστόσο, να μην ξεχνούμε ότι η όλη διαδικασία στο δεύτερο βιβλίο είναι γεωμετρική· ορθογώνια και τετράγωνα εμφανίζονται στα σχήματα και η ισότητα κάποιων συνδυασμών με κάποιους άλλους αποδεικνύεται δι' αυτών των σχημάτων. Συνάγουμε ότι αυτή ήταν η κλασική ή η καθιερωμένη μέθοδος για την απόδειξη τέτοιων προτάσεων και ότι η αλγεβρική μέθοδος απόδειξης, χωρίς σχήματα εκτός από μία γραμμή με σημεία σημειωμένα επάνω της,[34] εισήχθη αργότερα.[35]

Τέλος, ο Heath ολοκληρώνει τις εισαγωγικές παρατηρήσεις του για το δεύτερο βιβλίο των *Στοιχείων* με μια περιγραφή αυτού που ο ίδιος αποκαλεί «... γεωμετρικό ισοδύναμο των αλγεβρικών πράξεων»,[36] τις οποίες υποτίθεται ότι εκτελούσαν οι Έλληνες γεωμέτρες στις γεωμετρικές πραγματείες τους, σημειώνοντας μεταξύ άλλων ότι «Η διαίρεση ενός γινομένου δύο ποσοτήτων με μία τρίτη αντιπροσωπεύεται στη γεωμετρική άλγεβρα με την εύρεση ενός ορθογωνίου με μία πλευρά δεδομένου μήκους και ίσου προς δοθέν ορθογώνιο ή τετράγωνο. Αυτό είναι το πρόβλημα της *παραβολής χωρίων*...».[37]

Ας προσπαθήσουμε, τώρα, να συνοψίσουμε τις απόψεις όσων βλέπουν στην αρχαία ελληνική γεωμετρία (τουλάχιστον σε κάποια κρίσιμα μέρη της) μια «γεωμετρική άλγεβρα», αναφερόμενοι (εν εκτάσει) στον van der Waerden, όχι επειδή εγώ τον επέλεξα ως τον προσωπικό μου «αποδιοπομπαίο τράγο», αλλά για τον απλό λόγο ότι οι ισχυρισμοί του είναι από τους πιο σκανδαλώδεις όσον αφορά την ωμότητα και την ευθύτητά τους και επειδή το βιβλίο του αποτελεί μία από τις πιο πρόσφατες εκδοχές επί του θέματος και (επιπροσθέτως) επειδή είναι εύκολα προσιτό σε χαρτόδετη έκδοση στον ενδιαφερόμενο αλλά με πενιχρές οικονομικές δυνατότητες φοιτητή.[38]

«Όταν ανοίξει κάποιος το δεύτερο Βιβλίο των *Στοιχείων*», αναφέρει ο van der Waerden, «θα βρει μία σειρά προτάσεων, *οι οποίες δεν είναι τίποτε άλλο παρά γεωμετρικές διατυπώσεις αλγεβρικών τύπων* ... *Εδώ έχουμε, ούτως ειπείν, την αρχή ενός εγχειριδίου άλγεβρας, ενδεδυμένου με γεωμετρική μορφή*».[39]

---

29. *The Works of Archimedes* (Cambridge: At the University Press, 1897), *Apollonius of Perga Treatise On Conic Sections* (Cambridge: W. Heffer & Sons Ltd., 1961), *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, 3 τόμ. (Cambridge: At the University Press, 1908). Η έκδοση του Ευκλείδη από τον Heath θα αναφέρεται στο εξής ως *Στοιχεία*.

30. Πρβλ. σχετικά την παρατήρηση του Szabó: «Τονίζω επίσης ότι, συχνά, δεν μπορεί να επαναπαύεται κανείς στις μεταφράσεις των πηγών (όσον αφορά την ιστορία των Μαθηματικών), ακόμη και εάν αυτές είναι από φιλολογική άποψη άψογες» (*ό.π.*, σ. 16).

31. Την ίδια άποψη έχει και ο Zeuthen. Πρβλ., λ.χ., *Gesch. der Math. im Alt. und Millel.*, σ. 42.

32. Ευκλείδης: *Στοιχεία*, 1, σ. 372.

33. *Ό.π.* Πρβλ., επίσης, Zeuthen: *Die Lehre von den Kegel.*, σ. 12.

34. Γιατί μια τέτοια διαδικασία είναι «αλγεβρική»;

35. *Στοιχεία*, 1, σ. 373.

36. *Ό.π.*, σ. 374.

37. *Ό.π.* Πρβλ. επίσης Zeuthen: *Die Lehre*, σ. 14 και Tannery: *Mém. Scient.*, 1, σ. 256-257.

38. *Science Awakening*. Εκδοθέν αρχικά στα ολλανδικά με τον τίτλο *Ontwakende Wetenschap* (Groningen, 1950), κυκλοφόρησε για πρώτη φορά σε αγγλική μετάφραση στο Groningen, το 1954· αργότερα κυκλοφόρησε μια χαρτόδετη έκδοση (New York: John Wiley & Sons, 1963), που χρησιμοποιήθηκε σε αυτήν τη μελέτη, στην οποία τα καλαίσθητα σχέδια της έκδοσης με σκληρό εξώφυλλο εμφανίζονται παραμορφωμένα λόγω κακής τυπογραφικής αναπαραγωγής, ενώ πολύ πρόσφατα (τί ευτυχία για τον εκδοτικό οίκο!) κυκλοφόρησε μια «τρίτη έκδοση» στα αγγλικά σε σκληρό εξώφυλλο (Groningen: Noordhoff, χ.χ.). (Ελληνική έκδοση *Η αφύπνιση της επιστήμης* από τις Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2000· ανατύπωση 2003).

39. *Η αφύπνιση της επιστήμης*, σ. 131-132, η υπογράμμιση δική μου. Πρβλ., επίσης, Zeuthen: *Die Lehre*, σ. 12-13. Είναι ενδιαφέρον ότι ο G.H.F. Nesselman στο έργο του Die *Algebra der Griechen* (Berlin, 1842) –το οποίο είναι διαθέσιμο σε φωτογραφική ανατύπωση (Frankfurt: Minerva, 1969)– θεωρεί το δεύτερο βιβλίο ως *αριθμητικό* (όχι αλγεβρικό): «Εν πάση περιπτώσει ... οφείλουμε ... το δεύτερο βιβλίο να το προσμετρήσουμε στα αριθμητικά, αφού από τις δεκατέσσερεις προτάσεις του οι πρώτες δέκα, αν και διατυπώνονται και αποδεικνύονται μόνο γεωμετρικά, περιέχουν κατ' ουσίαν [;] αμιγώς αριθμητικές αλήθειες» (*ό.π.*, σ. 154). Ο Nesselmann (για το βιβλίο του οποίου ο L. Rodet είχε γράψει ότι πιο κατάλληλος τίτλος του θα ήταν «*Le calcul chez les Grecs*» (*ό.π.*, σ. 57)) κατόπιν καταπιάνεται να μεταγράψει τις δέκα πρώτες προτάσεις χρησιμοποιώντας αλγεβρικό συμβολισμό! Παρεμπιπτόντως, έχουμε ήδη στη διάθεσή μας μια *αριθμητική* μετάφραση αυτών των δέκα προτάσεων από έναν Βυζαντινό μοναχό του 14ου αιώνα, τον Βαρλαάμ, με τον τίτλο *'Αριθμητικὴ ἀπόδειξις τῶν γραμμικῶς ἐν τῷ δευτέρῳ τῶν στοιχείων ἀποδειχθέντων* και άλλη μία *αριθμητική* μετάφραση από τον Conrad Dasypodius, η οποία εκδόθηκε μαζί με το πρωτότυπο του δεύτερου βιβλίου το 1564. Οι αποδείξεις σε αυτές τις αριθμητικές μεταφράσεις ακολουθούν το υπόδειγμα των αποδείξεων που περιέχονται στα λεγόμενα «αριθμητικά βιβλία» των *Στοιχείων* (VII-IX). Για ένα δείγμα της μετάφρασης και των αποδείξεων του Βαρλαάμ βλ. Nesselmann, *ό.π.*, σ. 155, όπου περιέχεται η πρόταση II.4.

Και,

Πολύ προσφυώς ο Zeuthen κάνει λόγο σχετικά με αυτό για «γεωμετρική άλγεβρα». Στα ελληνικά Μαθηματικά βρίσκει κανείς πολυάριθμες εφαρμογές αυτής της «άλγεβρας». Ο τρόπος του σκέπτεσθαι είναι πάντοτε αλγεβρικός, η διατύπωση γεωμετρική. Το μεγαλύτερο μέρος της θεωρίας των πολυγώνων και των πολυέδρων βασίζεται σε αυτήν τη μέθοδο· ολόκληρη η θεωρία των κωνικών τομών εξαρτάται από αυτήν. Ο Θεαίτητος τον 4ο αιώνα, ο Αρχιμήδης και ο Απολλώνιος τον 3ο χειρίζονται με τέλεια δεξιοτεχνία αυτό το εργαλείο.[40]

Για τον van der Waerden η ελληνική «... γεωμετρική άλγεβρα είναι η συνέχεια της βαβυλωνιακής άλγεβρας».[41] Εν τούτοις, οι αρχαίοι Έλληνες, σε αντί-

40. *Ό.π.*, σ. 132, η υπογράμμιση δική μου. Και πάλι ο Neugebauer είχε υιοθετήσει παρόμοιες απόψεις πολύ πριν από τον van der Waerden. Έτσι, περιγράφοντας τα περιεχόμενα των *Κωνικών*, ο Neugebauer έγραφε: «Στο πρώτο βιβλίο αναπτύσσονται οι βασικές εξισώσεις [!] των καμπυλών και των εφαπτομένων τους ...» («Apollonius Studien», σ. 218, η υπογράμμιση δική μου). Αναφερόμενος πιο αναλυτικά στο περιεχόμενο του πρώτου βιβλίου, ο Neugebauer έκανε λόγο και πάλι για «*Παραγωγή των βασικών εξισώσεων α) κατ' αρχάς σε άμεση γεωμετρική μορφή*, β) μετασχηματισμός σε τέτοια μορφή, ώστε να είναι πιο εύχρηστες στις εφαρμογές ... Τέλος αποδεικνύεται: αν η κωνική τομή δίνεται από μία εξίσωση, τότε υπάρχει επίσης ... ένας κώνος ... επάνω στον οποίο βρίσκεται. *Μαζί με την αρχική παραγωγή των εξισώσεων από την τομή στον χώρο αποδεικνύεται έτσι η πλήρης ισοδυναμία της χωρικής και της αναλυτικής παράστασης*» (*ό.π.*, σ. 219, η υπογράμμιση δική μου).

41. *Ό.π.* Δεν χρειάζεται να τονίσουμε ότι εισηγητής αυτής της άποψης είναι ο Otto Neugebauer. Έτσι, στην εργασία του «Zur geometrischen Algebra», μιλώντας για τον τίτλο που επέλεξε, ο Neugebauer ομολογεί ότι, παρ' όλο που μπορεί να φαίνεται αρκετά στενός για τους σκοπούς του, επιλέχθηκε «... για να υποδηλώσω ποιο σημείο θεωρώ ως πραγματικό κλειδί για την κατανόηση της σχέσης των ελληνικών Μαθηματικών προς τα βαβυλωνιακά» (*ό.π.*, σ. 246). Έχοντας αποδεχθεί στο σύνολό τους τις απόψεις του Zeuthen για τη φύση της «γεωμετρικής άλγεβρας», ο Neugebauer αναρωτιέται ποια ήταν η ιστορική καταγωγή του προβλήματος της παραβολής χωρίων, ερώτημα στο οποίο δεν είχε απαντήσει ο Zeuthen. Η απάντηση του Neugebauer είναι η ακόλουθη: «Η απάντηση ... βρίσκεται αφ' ενός στην αξίωση των Ελλήνων, ύστερα από την ανακάλυψη των άρρητων αριθμών, να εξασφαλίσουν τη γενική ισχύ των Μαθηματικών μέσω της μετάβασης από την περιοχή των ρητών αριθμών στην περιοχή των σχέσεων μεταξύ γενικών μεγεθών και, αφ' ετέρου, στην εξ αυτής προκύπτουσα αναγκαιότητα [Πρόκειται για *λογική* αναγκαιότητα ή για *ιστορική* αναγκαιότητα; Σαφώς το πρώτο! Έτσι ο Neugebauer διέπραξε και πάλι αμάρτημα κατά της ιστορίας, με το να αντικαταστήσει στην ανάλυσή του τα ιστορικά κριτήρια με λογικά], *να μεταφραστούν τα αποτελέσματα της προελληνικής "αλγεβρικής" άλγεβρας σε μία "γεωμετρική" άλγεβρα*» (*ό.π.*, σ. 250). Υπάρχει κάποια ιστορική απόδειξη για την παραπάνω δήλωση; Όπως θα μπορούσε να το θέσει ο Neugebauer: «Πρέπει αυτή η ισχυρή δήλωση να ληφθεί κατά γράμμα;». *Όχι!* Πού στηρίζεται, λοιπόν, ο Neugebauer για να κάνει αυτήν τη δήλωση; Μας λέει αμέσως μετά το ανωτέρω απόσπασμα ότι: «Αν έχει διατυπώσει κανείς πρώτα το πρόβλημα κατ' αυτόν τον τρόπο, όλα τα περαιτέρω είναι εντελώς τετριμμένα και δίνουν μία *ομαλή διασύνδεση της βαβυλωνιακής άλγεβρας με τις διατυπώσεις του Ευκλείδη*» (*ό.π.*). Με άλλα λόγια, ο Neugebauer αρχίζει από εκεί όπου, κανονικά, ο ιστορικός των Μαθηματικών θα έπρεπε να καταλήξει (ότι, δηλαδή, οι αρχαίοι Έλληνες γνώριζαν το υλικό των Βαβυλωνίων και το «μετέφρασαν» σε γεωμετρική γλώσσα) και από αυτήν την ιστορικά παντελώς αβάσιμη υπόθεση, μεταγράφοντας τόσο τις ελληνικές γεωμετρικές προτάσεις όσο και τους βαβυλωνιακούς αριθμητικούς χειρισμούς σε αλγεβρικό συμβολισμό, «καταφέρνει να δείξει» ότι είναι το ίδιο πράγμα και «ως εκ τούτου» οι Έλληνες αντέγραψαν τους Βαβυλωνίους. Η κυκλικότητα του συλλογισμού του είναι ολοφάνερη! Έχοντας, επομένως, δείξει την πλήρη μαθηματική ισοδυναμία της βαβυλωνιακής «κανονικής μορφής» και της απλούστερης από τις περιπτώσεις της παραβολής χωρίων, ο Neugebauer αναφωνεί όλος χαρά και κατάπληξη: «Αυτό, όμως, είναι ακριβώς η απλούστερη διατύπωση του προβλήματος της "ελλειπτικής" παραβολής χωρίων, όπως το συναντούμε στην πρόταση VI, 28 του Ευκλείδη ... Στην πρόταση VI, 29 του Ευκλείδη περιέχεται η μετάφραση της κανονικής μορφής (2), δηλαδή η περίπτωση της "υπερβολικής" παραβολής» (*ό.π.*). Τί αποδεικνύει αυτό; Κατά τη γνώμη μου, τίποτε άλλο παρά μόνο ότι αν κάποιος κάνει την ιστορικά ανεπίτρεπτη μετάφραση των ελληνικών και των βαβυλωνιακών Μαθηματικών σε αλγεβρικό συμβολισμό, μπορεί να διαπιστώσει ότι είναι τα ίδια. *Το βέβαιο είναι ότι δεν αποδεικνύει ότι οι αρχαίοι Έλληνες γνώριζαν το βαβυλωνιακό υλικό!* Και σαν να μην έφταναν όλα αυτά, ο Neugebauer συνεχίζει: «Έτσι δείχθηκε ότι το όλο πρόβλημα της παραβολής χωρίων δεν είναι τίποτε άλλο από την, από μαθηματική άποψη προφανή, γεωμετρική διατύπωση των βαβυλωνιακών κανονικών μορφών των τετραγωνικών προβλημάτων» (*ό.π.*, σ. 251). Αλλά αυτό που είναι από μαθηματική άποψη προφανές είναι επίσης και από ιστορική άποψη προφανές; Μου φαίνεται πως όχι! Ο Neugebauer συνεχίζει στο ίδιο πνεύμα, δείχνοντας ότι «... επίσης η ελληνική μέθοδος επίλυσης δεν είναι τίποτε άλλο από τη μετάφραση σε ρητορική μορφή του βαβυλωνιακού τύπου ... $x,\ y=\frac{b}{2}\pm\sqrt{(\frac{b}{2})^2-c^2}$ ...» (*ό.π.*). Κατόπιν αυτού, παρατηρεί: «Η μόνη νέα σκέψη εδώ είναι η παρατήρηση για το μέγεθος του γνώμονα, κάτι επίσης προφανές, που οπωσδήποτε δεν απαιτεί κάποιο ιδιαίτερο κίνητρο, *αν επιλέξει κανείς την αφετηρία, όπως έγινε εδώ*, ότι δηλαδή το πρόβλημα συνίσταται στο να μεταφραστεί γεωμετρικά ο αλγεβρικός τύπος (2) [δηλ., $x,\ y=\frac{b}{2}\pm\sqrt{(\frac{b}{2})^2-c^2}$]. Αν όμως δεν έχει στη διάθεσή του τον (2), αν δηλαδή έπρεπε να παραιτηθεί από κάθε αλγεβρική διατύπωση, δεν είναι καθόλου εύκολο να κατανοήσει με ποιον τρόπο θα μπορούσε να οδηγηθεί σε μια τέτοια κατασκευή» (*ό.π.*, οι υπογραμμίσεις δικές μου). Με άλλα λόγια είναι αδύνατον να καταλάβει κανείς την ελληνική γεωμετρία αν δεν την δει ως παράγωγη, δευτερογενή, ως επεξήγηση ενός *αληθινά* αλγεβρικού υποβάθρου και κινήτρου! Πράγματι ο Neugebauer, χρησιμοποιώντας την ίδια ιστορικά απαράδεκτη μέθοδο (δηλαδή τη μεταγραφή των βαβυλωνιακών αριθμητικών υπολογισμών και των ελληνικών γεωμετρικών προτάσεων σε αλγεβρικό συμβολισμό), προχωρεί προκειμένου να δείξει ότι: «... το όλο πρόβλημα της παραβολής χωρίων, τόσο από την άποψη της διατύπωσης του ερωτήματος όσο και από την άποψη της μεθόδου επίλυσής του, καθίσταται άμεσα κατανοητό αν εκληφθεί ως η λογική μετάφραση της βαβυλωνιακής μεθόδου στη γλώσσα της γεωμετρικής άλγεβρας» (*ό.π.*, σ. 252).

θεση με τους προδρόμους τους της Μεσοποταμίας, μετέφρασαν *τα πάντα* σε γεωμετρική ορολογία. «*Αλλά αφού*

> *αυτό το οποίο βρίσκουμε εδώ είναι πράγματι μια μετάφραση ενώ ο τρόπος του σκέπτεσθαι είναι αλγεβρικός, δεν υπάρχει κίνδυνος παρερμηνείας αν επαναφέρουμε τους μαθηματικούς συλλογισμούς σε αλγεβρική γλώσσα και χρησιμοποιήσουμε μοντέρνο συμβολισμό*».[42]

42. *Η αφύπνιση της επιστήμης*, *ό.π.*, η υπογράμμιση δική μου.

Στη συνέχεια ο van der Waerden υποστηρίζει ότι μπορούμε, χωρίς αναστολές, να χρησιμοποιήσουμε τον σύγχρονο αλγεβρικό συμβολισμό, «... αρκεί να προσέχουμε ιδιαιτέρως *να μη χρησιμοποιούμε αλγεβρικούς μετασχηματισμούς οι οποίοι δεν είναι δυνατόν να αναδιατυπωθούν αμέσως στην ελληνική ορολογία*».[43] Αφού κάνει ακριβώς αυτό, ο van der Waerden λαμβάνει (όπως ήταν αναμενόμενο, αφού είναι ο επιφανής συγγραφέας του έργου *Moderne Algebra*), για κάποιες από τις προτάσεις του δεύτερου βιβλίου, τις λεγόμενες «... κανονικές μορφές συστημάτων εξισώσεων ...»,[44] οι οποίες είναι ταυτόσημες με τις εξισώσεις στις οποίες είχε καταλήξει προηγουμένως χειριζόμενος, με τον ίδιο τρόπο, τις βαβυλωνιακούς πινακίδες σφηνοειδούς γραφής, και καταλήγει λέγοντας ότι:

Είναι προφανές ότι οι Πυθαγόρειοι διατύπωσαν και απέδειξαν γεωμετρικά τους βαβυλωνιακούς κανόνες για την επίλυση αυτών των συστημάτων.[45]

Και:

Συμπεραίνουμε έτσι ότι όλες ανεξαιρέτως οι βαβυλωνιακές κανονικές εξισώσεις έχουν αφήσει τα ίχνη τους[46] στην αριθμητική και τη γεωμετρία των Πυθαγορείων. Αυτό δεν είναι δυνατόν να οφείλεται σε απλή σύμπτωση.[47]

43. *Η αφύπνιση*..., σ. 133.
44. *Ό.π.*, σ. 138.
45. *Ό.π.*
46. *Ό.π.*, σ. 141. Αξίζει να υπενθυμίσουμε στον αναγνώστη ότι, υπό την αυστηρή έννοια του όρου, δεν υπάρχουν βαβυλωνιακές εξισώσεις, ούτε κανονικές ούτε «ακανόνιστες». Αυτό που υπάρχει είναι κάποιες πινακίδες που περιέχουν αριθμούς και πράξεις με αυτούς τους (συγκεκριμένους) αριθμούς, τις οποίες ο σύγχρονος μαθηματικός μπορεί, αν το επιθυμεί, να τις μεταφράσει σε εξισώσεις. Για το όλο θέμα συνιστώ ένθερμα στον αναγνώστη να διαβάσει την εργασία του Mahoney, «Babylonian Algebra: Form Vs. Content». Εκεί ο Mahoney αναφέρει: «Όλα όσα περιέχουν τα βαβυλωνιακά κείμενα είναι μία σειρά από αριθμητικές πράξεις που (συνήθως) οδηγούν σε σωστά αποτελέσματα. Τα υπόλοιπα είναι ερμηνείες του ιστορικού. Οι Βαβυλώνιοι διατυπώνουν το πρόβλημα και υπολογίζουν τη λύση· η εξαγωγή αυτής της λύσης είναι έργο του ιστορικού και μπορεί να διερωτηθεί κανείς κατά πόσον η εξαγωγή της λύσης μάς αποκαλύπτει περισσότερα για τις μαθηματικές γνώσεις του ιστορικού παρά για τα Μαθηματικά των ίδιων των Βαβυλωνίων» (*ό.π.*, σ. 375). Πράγματι, το γεγονός ότι ο Neugebauer μπορούσε να κάνει λόγο για «βαβυλωνιακή άλγεβρα» και να την συνδέει με την ελληνική γεωμετρία οφείλεται στη δική του μάλλον ριζοσπαστική μεθοδολογική καινοτομία. Όπως αναφέρει στην εργασία του «Studien zur Geschichte der antiken Algebra I» (για την πλήρη παραπομπή βλ. την υποσημ. 15): «Εδώ κατανοώ ως "αρχαία άλγεβρα" έναν ουσιαστικά ευρύτερο κύκλο προβλημάτων από ό,τι συνηθίζεται. Αφ' ενός δίνω στον όρο "άλγεβρα" αντικειμενικά την ευρύτερη δυνατή έννοια, δηλαδή συμπεριλαμβάνω και προβλήματα με έντονα γεωμετρικό χαρακτήρα, αν απλώς μου φαίνεται δυνατόν να διατυπωθούν τελικά αλγεβρικά, δηλαδή με τυπικές σχέσεις μεγεθών. Αφ' ετέρου, ξεφεύγω χρονικά κατά πολύ από το συνηθισμένο μέτρο, ...» (*ό.π.*, σ. 1, η υπογράμμιση έχει προστεθεί).
47. Πράγματι δεν είναι καθόλου σύμπτωση! Οφείλεται στα ενσυνειδήτως προσχεδιασμένα

Αυτό που πιο πριν μπορούσαμε μόνο να εικάσουμε, είναι τώρα βεβαιότητα [!], ότι δηλαδή η βαβυλωνιακή παράδοση παρέσχε το υλικό το οποίο οι Έλληνες, και ιδιαίτερα οι Πυθαγόρειοι, χρησιμοποίησαν για να κατασκευάσουν τα Μαθηματικά τους.[48]

Νομίζω ότι δεν χρειάζεται να πούμε τίποτε περισσότερο!

Όπως έχει γίνει ήδη φανερό από τα προηγούμενα, πιστεύω ότι μια τέτοια άποψη είναι εξοργιστική, απλοϊκή και ιστορικά αβάσιμη. Οπωσδήποτε δεν τεκμηριώνεται από τα ιστορικά τεκμήρια, δηλαδή από τη μελέτη των κειμένων των ελληνικών Μαθηματικών, αν αυτή γίνει *όχι* από τη σκοπιά των επιτευγμάτων, των αποτελεσμάτων και των μεθόδων των σύγχρονων Μαθηματικών, τα οποία, και αυτό πρέπει να είναι τελείως σαφές, δεν σχετίζονται κατά κανέναν τρόπο με την προσπάθεια κατανόησης των ελληνικών Μαθηματικών, αλλά από τη σκοπιά των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών, στον βαθμό που μια τέτοια σκοπιά μπορεί να γίνει αντιληπτή από έναν σύγχρονο νου. Η ανάγνωση αρχαίων μαθηματικών κειμένων με τα σύγχρονα Μαθηματικά κατά νουν είναι η πιο ασφαλής μέθοδος για να παρανοήσει κανείς τον χαρακτήρα των αρχαίων Μαθηματικών, στα οποία φιλοσοφικές προϋποθέσεις και μεταφυσικές δεσμεύσεις έπαιζαν έναν πολύ πιο θεμελιώδη και αποφασιστικό ρόλο από ό,τι στα σύγχρονα Μαθηματικά. Το να θεωρεί κανείς ότι μπορεί να εφαρμόζει αυτομάτως και αδιακρίτως σε οποιοδήποτε μαθηματικό περιεχόμενο τις σύγχρονες τεχνικές χειρισμού των αλγεβρικών συμβόλων είναι ο πιο ἀσφαλής τρόπος να αποτύχει να κατανοήσει τις εγγενείς διαφορές που ενυπάρχουν στα Μαθηματικά διαφορετικών εποχών.

«Τα Μαθηματικά είναι αντανάκλαση του πολιτισμού ...».[49] Δεν έχουν, ασφαλώς, ανοσία έναντι του πνευματικού και πολιτισμικού περιβάλλοντος εντός του οποίου αναπτύσσονται. Τίποτε δεν έχει ανοσία. Αυτός είναι ο πιο βασικός λόγος, ένεκα του οποίου έχουμε *αιγυπτιακά*, *βαβυλωνιακά* και *ελληνικά* Μαθηματικά (για να περιορισθούμε μόνο στην αρχαιότητα) και όχι απλώς *αρχαία* Μαθηματικά. Είναι, πράγματι, πασιφανές ότι από κάποιες πολύ ουσιαστικές και καθόλου αμελητέες απόψεις, τα αιγυπτιακά Μαθηματικά *δεν είναι* βαβυλωνιακά Μαθηματικά και τα βαβυλωνιακά Μαθηματικά *δεν είναι* ελληνικά Μαθηματικά. Πρακτικώς ίδια γίνονται μόνον αν κάποιος διαπράξει το πιο θανάσιμο αμάρτημα που ένας ιστορικός μπορεί να μπει στον πειρασμό να διαπράξει, δηλαδή να τα υποβάλει στην έσχατη ιστοριογραφική προσβολή τού να τα θεωρήσει ως α-

χαρίσματα του σύγχρονου μαθηματικού, που έγινε ιστορικός, ο οποίος κατάφερε να μεταφράσει (traduttore traditore [ο μεταφραστής είναι προδότης!]) και τους βαβυλωνιακούς αριθμητικούς χειρισμούς και τις ελληνικές γεωμετρικές προτάσεις σε αλγεβρική γλώσσα.
48. *Η αφύπνιση*..., σ. 141.
49. M. Mahoney: «Babylonian Algebra», σ. 370.

πλά σκιαγραφήματα των σύγχρονων Μαθηματικών και, συνεπώς, να προχωρήσει στη μετάφρασή τους στον σύγχρονο αλγεβρικό συμβολισμό.[50]

Η αναχρονιστική ιστορία, ένα τελειωμένο σήμερα θέμα –όπως θα θέλαμε να πιστεύουμε– στους περισσότερους κλάδους της ιστορίας, είναι ζωντανή και ακμάζουσα στην ιστορία των Μαθηματικών, όπου οι κίνδυνοι που δημιουργεί δεν είναι λιγότερο πραγματικοί από ό,τι είναι στους πιο παραδοσιακούς τύπους της πνευματικής ιστορίας. Μου φαίνεται ολοφάνερο ότι η έσχατη συνέπεια της ιστοριογραφικής άποψης που επιτρέπει σε κάποιον να διαβάζει τα αρχαία μαθηματικά κείμενα με σύγχρονα γυαλιά πρέπει να είναι ότι στα Μαθηματικά, σε αντίθεση με οποιοδήποτε άλλο πεδίο πνευματικής προσπάθειας, το «πραγματικό υλικό», ο «πυρήνας» του μαθηματικού περιεχομένου, η ουσία του κλάδου αυτή καθ' εαυτήν, ο αληθινός σκελετός του είναι απρόσβλητος στην ιστορική εξέλιξη και αλλαγή, αντιπροσωπεύοντας, σύμφωνα με την καλή πλατωνική άποψη, μια δεδομένη, αιώνια, καθολική και σταθερή δομή, την οποία ο άνθρωπος μπόρεσε κάπως να συλλάβει από τότε που άρχισε να ασχολείται με μαθηματικά θέματα και η οποία μπορεί εύκολα να ταυτοποιηθεί, να αναγνωριστεί και να κατηγοριοποιηθεί από τον διορατικό και επιδέξιο επιστήμονα, δηλαδή από το άτομο που είναι εκπαιδευμένο στα (σύγχρονα) Μαθηματικά, που γνωρίζει με βεβαιότητα τί είναι τα *Μαθηματικά*.

Υπό μία έννοια, μια τέτοια άποψη πρέπει πράγματι να μας οδηγεί στο να βλέπουμε τα Μαθηματικά των περασμένων εποχών ως *προαγγέλους* των σύγχρονων Μαθηματικών, υπό την έννοια ότι η ουσιαστική δομή υπάρχει ήδη σε εκείνα και η μόνη αληθινή διαφορά είναι ότι αυτή η δομή εκφράζεται με μια «δύστροπη», «αδέξια» και «χωρίς λόγο δύσκολη» μορφή ή γλώσσα. Με άλλα λόγια, η ανάπτυξη των Μαθηματικών μετατρέπεται (σχεδόν) αποκλειστικά σε ανάπτυξη της μαθηματικής έκφρασης, σε ανίχνευση του «σωστού» είδους γλώσσας που θα εκφράσει τις καθολικές «αλήθειες» οι οποίες πάντοτε υπήρχαν και ήσαν συνεχώς αντιληπτές. Αυτή η προσέγγιση, ισχυρίζομαι, δεν είναι μόνον απλοϊκή και αποκρουστική ιστοριογραφικά, αλλά υπονομεύει τον ίδιο τον χαρακτήρα της ιστορίας των Μαθηματικών ως ιστορικού κλάδου. Εν ολίγοις, είναι, πιστεύω, απαράδεκτη για μάς ως ιστορικούς και, επομένως, πρέπει να εγκαταλειφθεί.

Δεν προτίθεμαι να υπεισέλθω σε μια εξονυχιστική ανάλυση των κοινωνιολογικών ριζών αυτής της σκανδαλώδους κατάστασης. Ας μου επιτραπεί μόνο να διατυπώσω και πάλι την εκδοχή πως το γεγονός ότι η ιστορία των Μαθηματικών έχει, ουσιαστικά, γραφεί από μαθηματικούς, πρέπει να έχει κάποια σχέση με αυτό· και σε πολλές περιπτώσεις εκείνοι που ενεπλάκησαν σε αυτό το εγχείρημα δεν ήσαν απλώς και μόνον «ευρείας αντίληψης» μαθηματικοί·[51] αντιθέ-

50. Τελευταία, δίνεται περισσότερη προσοχή στα Μαθηματικά ως αντανάκλαση του πολιτισμού. Πρβλ. David Bloor: «Wittgenstein and Mannheim on the Sociology of Mathematics», *Studies in History and Philosophy of Science*, 4 (1973), σ. 173-191. Εδώ βρίσκουμε την παρακάτω ενδιαφέρουσα παρατήρηση: «Ως απόδειξη της ιδέας ότι οι μαθηματικές έννοιες είναι πολιτισμικά προϊόντα, ας θεωρήσουμε την ιστορική περίπτωση της έννοιας του μηδενός. Η σύγχρονη έννοια δεν είναι αυτή που όλοι οι πολιτισμοί χρησιμοποίησαν στο παρελθόν. Οι Βαβυλώνιοι, λ.χ., χρησιμοποιούσαν θεσιακό συμβολισμό αλλά είχαν διαφορετική, αν και συγγενική, έννοια. Το πλησιέστερο ισοδύναμο με τις σύγχρονες λειτουργίες του μηδενός που είχαν έγκειται στη χρήση του για να διακρίνει κανείς, π.χ., το 204 από το 24. Δεν είχαν τίποτε που να αντιστοιχεί – [sic!] στη σημερινή του χρήση για να διακρίνουμε το 240 από το 24. Όπως το θέτει ο Neugebauer [sic!] "μόνο τα συμφραζόμενα καθορίζουν την απόλυτη τιμή στα βαβυλωνιακά Μαθηματικά" ... *Αν οι Βαβυλώνιοι χρησιμοποιούσαν κάποιο μηδέν έτσι ώστε μερικές πλευρές των υπολογισμών να εξαρτώνται από τα συμφραζόμενα, τότε, ως προς αυτό, η έννοια του μηδενός που είχαν διαφέρει από τη δική μας*» (*ό.π.*, σ. 186, η υπογράμμιση στο κείμενο).

51. Ως παράδειγμα του είδους του μαθηματικού που έχω κατά νουν, θα παραπέμψω τον αναγνώστη στον G.A. Miller (βλ. αναφορά στην υποσημ. 21, στα προηγούμενα). Το άρθρο του «Weak Points in Greek Mathematics» είναι πραγματικό *αριστούργημα* και πρέπει να διαβαστεί από την αρχή μέχρι το τέλος. Ο περιορισμός του χώρου, όμως, δεν μου επιτρέπει να παραθέσω παρά μόνο μερικά σκόρπια αποσπάσματα. Έτσι, αφού οικτίρει την «... υπερβολική απόδοση βαρύτητας [των αρχαίων Ελλήνων] στη γεωμετρία ...» (σ. 317) ο Miller τονίζει ότι «*η μη απόδοση βαρύτητας στην τυπική αλγεβρική πλευρά των Μαθηματικών αποτελεί χωρίς αμφιβολία τη μεγαλύτερη εγγενή αδυναμία των ελληνικών Μαθηματικών*» (*ό.π.*, σ. 317-18, η υπογράμμιση δική μου). Ως παράδειγμα αυτού του «μειονεκτήματος» αναφέρει «την ελληνική αντιμετώπιση της επίλυσης των δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Όχι μόνον έλυναν κάποιες δευτεροβάθμιες εξισώσεις γεωμετρικά, αλλά ... είναι σαφές ότι είχαν τρεις γενικούς τύπους [!;] για τις αλγεβρικές λύσεις τέτοιων εξισώσεων ... δεν μπόρεσαν να διακρίνουν τη γενική σημασία των τύπων και επομένως ... δεν κατόρθωσαν να διατυπώσουν μια γενική λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης με τη σύγχρονη έννοια. Φαίνεται, επομένως, ατυχές ότι πολλοί συγγραφείς ισχυρίζονται ότι έλυσαν τη δευτεροβάθμια εξίσωση» (*ό.π.*, σ. 318). «Με το να παραβλέπουν το γεγονός ότι η αλγεβρική εξίσωση συχνά μας δίνει πολύ περισσότερα από όσα ρητώς βάζουμε μέσα σε αυτήν, *οι Έλληνες διέπραξαν μέγα λάθος και απέτυχαν να συμπεριλάβουν στο έργο τους μια από τις πιο καρποφόρες ιδέες των μετέπειτα Μαθηματικών*» (*ό.π.*, η υπογράμμιση δική μου).

«Το δέος που εμπνέουν τα αθάνατα *Στοιχεία* ... αντισταθμίζεται εν μέρει από την έλλειψη διορατικότητας που επέδειξαν οι Έλληνες με το να μη μπορέσουν να επεκτείνουν την έννοια του αριθμού ώστε να συμπεριλάβει τους αρνητικούς και τους συνήθεις μιγαδικούς αριθμούς [!]. Στην πραγματικότητα, οι πρώτοι Έλληνες συγγραφείς δεν συμπεριέλαβαν στην έννοια του αριθμού ούτε τους άρρητους αριθμούς» [Φαντάσου, τέτοια επαίσχυντη συμπεριφορά!] (*ό.π.*, σ. 318-319). «Είναι ευτυχής συγκυρία ότι οι Έλληνες ανέπτυξαν τη θεωρία των κωνικών τομών *χωρίς να περιμένουν να ανακαλύψουν προηγουμένως πόσο χρήσιμη είναι αυτή η θεωρία για τη μελέτη του ηλιακού μας συστήματος* ...» (*ό.π.*, σ. 320, η υπογράμμιση δική μου).

Και, τέλος: «Η επίπονη φροντίδα με την οποία ο σύγχρονος επιστήμονας εκτελεί ακριβείς μετρήσεις ήταν ξένη στους Έλληνες. Οι Έλληνες αφοσιώθηκαν στους συντομότερους και ευκολότερους δρόμους που οδηγούν στις επιστημονικές αλήθειες» (*ό.π.*, σ. 320-321).

Κούρασα τον αναγνώστη με αυτόν τον ορμαθό παραθεμάτων, αλλά το έκανα για δύο λόγους: 1) Οι περισσότερες από τις απόψεις τις οποίες εκφράζει ο Miller σχετίζονται με τα θέματα που εξετάζονται στην ανά χείρας μελέτη· και 2) αυτές οι απόψεις, αν και αντιπροσωπεύουν έναν πολύ χαμηλότερο βαθμό εκλέπτυνσης σε σύγκριση με εκείνες που ενσωματώνονται στον όρο «γεωμετρική άλγεβρα», σε τελική ανάλυση πηγάζουν από την ίδια καταδικαστέα προσέγγιση της ιστορίας των Μαθηματικών. Αν, και πολύ σωστά, φαίνονται εξοργιστικές και αφετως, επρόκειτο για μαθηματικούς που είτε ήσαν κοντά στην ηλικία της συνταξιοδότησής τους και είχαν παύσει να είναι παραγωγικοί στους τομείς της ειδικότητάς τους είτε, κατά κάποιον τρόπο, κατέληξαν να μην είναι δημιουργικοί επαγγελματικά. Και οι δύο κατηγορίες, ωστόσο, έχουν κάτι κοινό: προκειμένου να υπηρετήσουν την ανθρωπότητα και να διαθέσουν τα αποθέματα επιστημονικής ενέργειας που τους είχαν απομείνει, αποφάσισαν να χρησιμοποιήσουν τη δημιουργικότητά τους σε ένα πεδίο, *την ιστορία των Μαθηματικών*, το «ένα μέρος» του οποίου *–η ιστορία–* τούς ήταν παντελώς ξένο και εξωτικό, ενώ το άλλο «μέρος» *–τα Μαθηματικά–* τούς ήταν, δυστυχώς, πάρα πολύ οικείο· πίσω από αυτά κρύβεται η πεποίθηση ότι η ιστορία δεν απαιτεί στην πραγματικότητα καμία εκπαίδευση, καθώς οι αφηγηματικές, περιγραφικές μέθοδοι και τεχνικές της είναι κοινότοπες και αυτονόητες· και εφόσον οι ίδιοι ήσαν βαθείς γνώστες των Μαθηματικών, είχαν *όλα* τα απαιτούμενα προσόντα για να γίνουν επιτυχημένοι ιστορικοί των Μαθηματικών! ...

Αν η παραπάνω εκδοχή είναι σωστή, τότε ο αναγνώστης μπορεί να κρίνει ο ίδιος πόσο συνετή είναι η απόφαση για έναν επαγγελματία να αρχίσει να γράφει την ιστορία της επιστήμης του, όταν το μόνο έναυσμα για αυτό είναι η επαγγελματική του γήρανση, η οποία δεν του επιτρέπει να ασχοληθεί με μια πιο φιλική, οικεία και φιλόξενη περιοχή!

V

Σε αυτήν την ενότητα θα επιλέξω μερικά παραδείγματα από τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη και θα τα αναλύσω λεπτομερώς, προκειμένου να δείξω, πιστεύω οριστικά, τις εγγενείς αδυναμίες της καθιερωμένης από παλαιά και σεβάσμιας άποψης ότι η αρχαία ελληνική γεωμετρία (τουλάχιστον ορισμένα πολύ σημαντικά μέρη της) είναι μεταμφιεσμένη άλγεβρα.

Θα αντλήσω τα παραδείγματά μου από τα βιβλία II και VI, τα κατ' εξοχήν βιβλία που περιέχουν τη λεγόμενη «γεωμετρική άλγεβρα» των αρχαίων Ελλήνων –πράγμα το οποίο θα μου επιτρέψει να πω κάτι για τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα της αρχαίας ελληνικής γεωμετρίας–, από ένα από τα αποκαλούμενα «αριθμητικά βιβλία» (βιβλίο IX), και από το βιβλίο X, το οποίο πραγματεύεται τα ασύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα και την ταξινόμησή τους. Οφείλω να δηλώσω ότι τα παραδείγματα αυτά αποτελούν μόνον έναν μικρό αριθμό από μια πληθώρα παρόμοιων παραδειγμάτων τα οποία «κοσμούν» τα δεκατρία βιβλία των *Στοιχείων*. Τα έχω επιλέξει διότι αντιπροσωπεύουν τρανταχτά παραδείγματα της άποψής μου, δηλαδή:

λείς, ο αναγνώστης θα πρέπει να λάβει υπ' όψιν του ότι αυτές, τουλάχιστον, καταδικάζουν τα ελληνικά Μαθηματικά διότι δεν ήταν αλγεβρικά και δεν τα *βαφτίζουν* αλγεβρικά, για να τα εξετάσουν μετά ως τέτοια (πράγμα που θεωρώ ότι είναι, εν δυνάμει, πολύ πιο επικίνδυνο).

Η αρχαία ελληνική γεωμετρία δεν είναι άλγεβρα (γεωμετρική ή άλλη), αλλά απλώς και μόνον γεωμετρία. Βεβαίως, αφού υπάρχει (και αυτό είναι προφανές για μας) πλήρης ισομορφισμός ανάμεσα στη γεωμετρία και στην άλγεβρα –αυτό άλλωστε δεν είναι το μήνυμα της αναλυτικής γεωμετρίας;– μπορούμε σχεδόν πάντοτε να χρησιμοποιήσουμε αλγεβρικές τεχνικές για να μεταφέρουμε τη γεωμετρική μορφή και δομή στα αλγεβρικά, αναλυτικά τους αντίστοιχα. Δεν υπάρχει καμία διαφωνία επ' αυτού. Το κρίσιμο ιστοριογραφικό θέμα, ωστόσο, *δεν* είναι αυτό! Το κρίσιμο ιστοριογραφικό θέμα είναι ότι με αυτήν τη διαδικασία μεταφοράς κακοποιούμε ανεπανόρθωτα και καταστρέφουμε τελείως τα μοναδικά, ιδιαίτερα, ιδιάζοντα χαρακτηριστικά της αρχαίας ελληνικής γεωμετρίας, τα οποία δεν είναι, και θέλω αυτό να το τονίσω με έμφαση, αναγώγιμα σε κάτι «απλούστερο», λιγότερο «άβολο», κ.ο.κ. Δεν υπάρχει τίποτε «άβολο», «αδέξιο», «δύστροπο» και ούτω καθεξής στα αρχαία ελληνικά Μαθηματικά, όταν δεν τα βγάζουμε έξω από το δικό τους πλαίσιο. Είναι βέβαιο ότι ούτε ο Ευκλείδης ούτε ο Αρχιμήδης ούτε ο Απολλώνιος τα θεωρούσαν δύστροπα, δύσχρηστα και τυραννικά· και αυτό είναι που έχει σημασία από ιστορική άποψη και αποτελεί, κατά τη γνώμη μου, το πιο αποφασιστικό επιχείρημα.

Έχοντας λοιπόν αυτήν την άποψη, θα παρουσιάσω, με τρόπο που θεωρώ αδιαμφισβήτητο, τις παράλογες συνέπειες στις οποίες οδηγεί η παραδοσιακή ερμηνεία, όταν αυτή η ερμηνεία υποβληθεί στην πιο σημαντική δοκιμασία, δηλαδή *στη δοκιμασία των ίδιων των ελληνικών Μαθηματικών*. Ας μου επιτραπεί να δηλώσω ευθύς εξαρχής ότι, κατά τη γνώμη μου, η παραδοσιακή ερμηνεία δεν μπορεί να αντεπεξέλθει σε αυτήν τη δοκιμασία – πράγματι καταρρέει με εκκωφαντικό θόρυβο κάτω από τις ίδιες τις αθέμιτες παραδοχές της.

Το δέκατο βιβλίο το συμπεριέλαβα μεταξύ των πηγών των παραδειγμάτων μου διότι το βιβλίο αυτό θεωρείται από πολλούς ως το κορυφαίο επίτευγμα των *Στοιχείων*, το πιο «δυνατό» από τα δεκατρία βιβλία, και διότι οι ιστορικοί των Μαθηματικών έχουν αναλύσει παραδοσιακά το περιεχόμενο του με καθαρά αλγεβρικούς όρους.[52] Έτσι, ο van der Waerden πιστεύει ότι «Στις X 33-35 υποδεικνύεται η λύση αυτών των εξισώσεων, για διάφορες περιπτώσεις, με χρήση γεωμετρικής άλγεβρας».[53] Εξ άλλου, διαβάζοντας κανείς προσεκτικά την έκδοση των *Στοιχείων* από τον Heath, εκπλήσσεται αμέσως από το όλο ύφος των σχολίων του Heath στο δέκατο βιβλίο, στα οποία ευθύς εξαρχής μιλάει απερίφραστα (και κατά κόρον) για «δευτεροβάθμιες εξισώσεις»,[54] «ρίζες των εξισώσεων

52. Πρβλ. Tannery: *Mém. Scient.*, 1, σ. 264-267· Zeuthen: *Gesch. d. math. im. Alt. u. Mittel.*, σ. 56, 158-161· Zeuthen: *Die Lehre*, σ. 24-26· Ευκλείδης: *Στοιχεία* (έκδ. Heath), τ. 3· van der Waerden: *Η αφύπνιση της επιστήμης*, σ. 196-201· Boyer: *A History of Mathematics*, σ. 128-129· κ.λπ., κ.λπ.

53. *Η αφύπνιση...*, σ. 197.

54. *Στοιχεία*, 3, σ. 5.

δευτέρου βαθμού που είναι ασύμμετρες προς τα δεδομένα μεγέθη», «ταξινόμηση των ... άρρητων μεγεθών ... στην οποία καταλήγουμε από τη διαδοχική επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού»[55] και, τελικά (για να τελειώνουμε με τα παραθέματα), για το γεγονός ότι «... οι αρχαίοι Έλληνες θα έγραφαν την εξίσωση που οδηγεί σε αρνητικές λύσεις με άλλη μορφή έτσι ώστε να τις καταστήσουν θετικές, *δηλαδή θα άλλαζαν το πρόσημο του x στην εξίσωση*».[56] Ο Heath λέει επίσης, για να αναφέρουμε άλλο ένα προκλητικό παράδειγμα, ότι η *δυώνυμη* και η *αποτομή* (την οποία γράφει ως «$\rho \pm \sqrt{k}\rho$») «... είναι οι θετικές ρίζες της διτετράγωνης (που ανάγεται σε δευτεροβάθμια) $x^4 - 2(1+k)\rho^2 \cdot x^2 + (1-k)^2\rho^4 = 0$».[57]

* * *

Ας προχωρήσουμε τώρα στα παραδείγματα που έχουμε υποσχεθεί.

Η πρόταση II.5 αναφέρει: «Εάν ευθεία γραμμή τμηθεί σε ίσα και σε άνισα, το ορθογώνιο που περιέχεται από τα άνισα τμήματα της όλης ευθείας με το τετράγωνο που έχει πλευρά το μεταξύ των τομών τμήμα είναι ίσα προς το τετράγωνο που έχει πλευρά το ήμισυ της τμηθείσας ευθείας».[58]

Η απόδειξη του Ευκλείδη εκτυλίσσεται μέσω των εξής σταδίων: Έστω ότι δίνεται η AB και ας έχει τμηθεί σε ίσα από το σημείο Γ και σε άνισα από το σημείο Δ. Κατασκευάζουμε το τετράγωνο με πλευρά ΓB και φέρουμε τη BE. Έστω $\Delta H \parallel \Gamma E$. Από το Θ, το σημείο τομής των ΔH και BE, φέρουμε την $KM \parallel AB$ και από το A την $AK \parallel BM$. Από την I.43 γνωρίζουμε ότι παραπλήρωμα $\Gamma\Theta$ = παραπλήρωμα ΘZ. Συνεπώς $\Gamma M = \Delta Z$. Αλλά $\Gamma M = A\Lambda$ (επειδή $A\Gamma = \Gamma B$ εξ υποθέσεως)· επομένως $A\Lambda = \Delta Z$. Εάν προστεθεί $\Gamma\Theta$ στο κάθε ένα από τα προηγούμενα ορθογώνια, προκύπτει ότι $A\Theta$ = γνώμων $MN\Xi$. Αλλά $A\Theta$ είναι το ορθογώνιο $A\Delta$, ΔB (επειδή $AK = \Delta\Theta = \Delta B$), επομένως ο γνώμων $MN\Xi$ = ορθογώνιο $A\Delta$, ΔB. Ας προστεθεί το ΛH (το τετράγωνο από της $\Gamma\Delta$) στο κάθε μέλος της προηγούμενης ισότητας. Άρα: τετράγωνο από της ΓB = ορθογώνιο $A\Delta$, ΔB + τετράγωνο από της $\Gamma\Delta$, ο.ε.δ.[59]

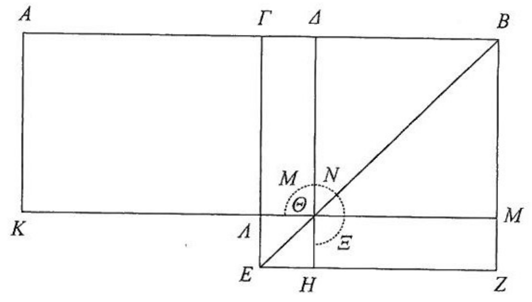
55. *Ό.π.*, σ. 4-5· αυτές τις εκφράσεις τις υιοθέτησε ο Heath από το *Gesch. d. Math. im. Alt. u. Mittel.* (σ. 56) του Zeuthen.

56. *Ό.π.*, σ. 5, η υπογράμμιση δική μου.

57. Παρεμπιπτόντως, ο Sir Thomas σε μια εξομολογητική παραδρομή και ενώ πραγματεύεται τον χαρακτήρα των πέντε πρώτων προτάσεων του βιβλίου XIII των *Στοιχείων*, παραδέχεται κάπως καθυστερημένα ότι «... Η μέθοδος [απόδειξης] των προτάσεων είναι ίδια με αυτήν του δεύτερου βιβλίου, όντας αυστηρά γεωμετρική και όχι αλγεβρική ...» (*ό.π.*, σ. 441).

58. Ευκλείδης: *Στοιχεία*, 1, σ. 382.

59. *Ό.π.*, σ. 382-383.



Αυτές είναι η διατύπωση και η απόδειξη του Ευκλείδη. Δεν υπάρχει ίχνος εξισώσεων εδώ, όπως δεν υπάρχει ίχνος εξισώσεων πουθενά στα κλασικά ελληνικά Μαθηματικά, δηλαδή στην ελληνική γεωμετρία. Η απόδειξη είναι καθαρά γεωμετρική, κατασκευαστική, εποπτική (ή παραστατική), με την έννοια ότι επικαλείται το μάτι του γεωμέτρη, και αποτελείται από μια λογική αλληλουχία δηλώσεων για γεωμετρικά αντικείμενα (στην προκειμένη περίπτωση ορθογώνια, τετράγωνα και γνώμονες). Δεν υπάρχουν σύμβολα και, συνεπώς, δεν υπάρχουν πράξεις εκτελούμενες επί συμβόλων· η απόδειξη δεν είναι αφηρημένη αλλά προσφεύγει μάλλον στην αντίληψη του χώρου και, ουσιαστικά, βασίζεται σε ό,τι είναι γνωστό ως αριστοτελική κατηγορική λογική. Όλα αυτά είναι τα ουσιώδη χαρακτηριστικά της ελληνικής γεωμετρίας.[60]

Και, όμως, τί βρίσκουμε στο σχόλιο του Heath στην πρόταση II.5; «Ίσως, όμως, το πιο σημαντικό στοιχείο αναφορικά με τις II.5-6 είναι η σχέση τους με τη *γεωμετρική επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης*».[61] Πώς διακρίνει ο Heath μια τέτοια σχέση; Είναι πολύ απλό:

Ας υποθέσουμε, στο σχήμα τής II.5, ότι $AB = a$, $\Delta B = x$· τότε

$$\begin{aligned} ax - x^2 &= \text{ορθογώνιο } A\Theta \\ &= \text{γνώμων } MN\Xi. \end{aligned}$$

Επομένως, αν το εμβαδόν του γνώμονα είναι δεδομένο ($= b^2$, ας πούμε) και αν το a είναι δεδομένο ($= AB$), τότε το πρόβλημα της επίλυσης της εξίσωσης

$$ax - x^2 = b^2$$

διατυπώνεται, σε γεωμετρική γλώσσα, ως εξής: *Σε δεδομένο ευθύγραμμο τμήμα*

60. Πρβλ. «Babyl. Algebra», σ. 372· βλ. επίσης «Die Anfänge der algebr. Denkweise», σ. 17-18, κ.ε.

61. *Στοιχεία*, σ. 383.

(α) *να παραβληθεί ορθογώνιο ίσο προς δοθέν τετράγωνο* (b^2) *και υπολειπόμενο κατά τετράγωνο*, δηλαδή να κατασκευασθεί το ορθογώνιο $A\Theta$ ή ο γνώμων $MN\Xi$.[62]

Τί αποδεικνύει αυτό; Ότι οι αρχαίοι Έλληνες έλυναν δευτεροβάθμιες εξισώσεις; *Καθόλου*. Το μόνο πράγμα που αποδεικνύει είναι ότι ο Heath (καθώς και ο Zeuthen, ο Tannery, ο van der Waerden, ο P.-H. Michel, κ.ά.π.) μπορούν να μεταγράψουν τη γεωμετρία του Ευκλείδη σε αλγεβρικό συμβολισμό και να λάβουν (σε αυτήν την περίπτωση) μια δευτεροβάθμια εξίσωση. Μας λέει αυτό τίποτε για τους αρχαίους Έλληνες γενικά και για την πρόταση II.5 ειδικότερα; *Τίποτε. Δεν υπάρχει το παραμικρό θρύψαλο γνήσιου ιστορικού τεκμηρίου ότι ο Ευκλείδης (ούτε οι άλλοι μεγάλοι μαθηματικοί της ελληνιστικής περιόδου, ας αφήσουμε στην άκρη τους Πυθαγορείους) χρησιμοποίησε ποτέ εξισώσεις στα γεωμετρικά έργα του. Οι πηγές δεν περιέχουν εξισώσεις.* Αυτό, ωστόσο, δεν εμποδίζει ιστορικούς των Μαθηματικών να εφαρμόζουν ξένες (αλγεβρικές) τεχνικές στην ελληνική γεωμετρία και να λαμβάνουν έτσι αλγεβρικά αντίστοιχα των ελληνικών γεωμετρικών προτάσεων, τα οποία τότε, παρατύπως, τα θεωρούν ως γνήσιο ελληνικό προϊόν.

Ο P.-H. Michel είναι μια χαρακτηριστική περίπτωση. Μου φαίνεται αρκετά ενδιαφέρον και αξιοσημείωτο ότι αρχίζει την πραγμάτευσή του για τη «γεωμετρική άλγεβρα» με την ακόλουθη δήλωση: «Για να καταλάβουμε πώς η γεωμετρία *μπορούσε* "να παίζει τον ρόλο της άλγεβρας", θα δούμε μια πολύ απλή περίπτωση».[63] Μετά, παίρνει την εξίσωση $bx = c$, αποδεικνύει ότι είναι μαθηματικώς ισοδύναμη με απλές γεωμετρικές τεχνικές της παραβολής χωρίων και αμέσως υποστηρίζει, ήρεμα και ψυχρά, ότι οι αρχαίοι Έλληνες *έλυναν την εξίσωση* χρησιμοποιώντας την παραβολή χωρίων. Κατόπιν, λέει: «Τέτοια ήταν κατά τους παλαιούς χρόνους η άλγεβρα των αρχαίων Ελλήνων».[64] Το σημείο αυτό δεν απέχει παρά ακριβώς ένα βήμα από τον επόμενο ισχυρισμό: «Οι γεωμετρικές λύσεις των δευτεροβάθμιων εξισώσεων αφθονούν στον Ευκλείδη».[65] Ως παράδειγμα ο Michel χρησιμοποιεί την πρόταση II.5, την ίδια πρόταση που

62. *Ό.π.* Πρβλ. επίσης Zeuthen: *Die Lehre*, σ. 19 και Tannery: *Mém. Scient.*, 1, σ. 257-259. Επίσης, Zeuthen: *Gerschichte d. Math. im. Alt. u. Mittel.*, σ. 47-48 και 52.

63. *De Pythagore à Euclide*, σ. 639, η υπογράμμιση δική μου.

64. *Ό.π.*, σ. 640. Είναι προφανές ότι ο Michel έχει μια αλλόκοτη (αν και όχι πρωτότυπη) άποψη τόσο για την άλγεβρα όσο και για την ιστορική μέθοδο. Έτσι, αναφέρει: «Δεν θεωρούμε ότι η άλγεβρα συνδέεται κατ' ανάγκην με ένα ορισμένο σύστημα συμβόλων αλλά, ακολουθώντας τον κ. Thureau-Dangin, ότι είναι η "εφαρμογή της αναλυτικής μεθόδου [των αρχαίων Ελλήνων] στην επίλυση αριθμητικών προβλημάτων" ... Για να υπάρχει άλγεβρα (όχι άλγεβρα "εγγράμματη" αλλά άλγεβρα "ρητορική"), πρέπει και αρκεί μια άγνωστη ποσότητα να τίθεται ευθύς εξαρχής ως γνωστή. Ευθύς μόλις ο μαθηματικός αποδεχθεί αυτήν τη μέθοδο, *ο συλλογισμός του μπορεί να μεταφραστεί σε εξισώσεις, όπως κάνουμε συχνά προκειμένου να διευκολύνουμε τον αναγνώστη*» (*ό.π.*, σ. 641-642, η υπογράμμιση δική μου).

65. *Ό.π.*, σ. 643.

εξετάσαμε πιο πάνω. Ας δούμε πώς γίνεται αυτή με τους επιδέξιους χειρισμούς του:

> Εάν μία ευθεία [b] τμηθεί σε δύο ίσα μέρη [$b/2$] και σε δύο άνισα μέρη [x και y], το ορθογώνιο [xy ή c] που σχηματίζεται από τα δύο άνισα μέρη ολόκληρης της ευθείας, συν το τετράγωνο του τμήματος που βρίσκεται μεταξύ των τομών [$(b/2 - y)^2$], είναι ίσο με το τετράγωνο του ημίσεως ολόκληρης της ευθείας [$(b/2)^2$].[66]

Νομίζω ότι το προηγούμενο είναι ένα θαυμάσιο παράδειγμα των ποταπών μεθόδων που χρησιμοποιούν μερικοί ιστορικοί των Μαθηματικών για να «ανακαλύπτουν» τόσο εύκολα εξισώσεις στα αρχαία ελληνικά Μαθηματικά. Οι μέθοδοί τους αποκαλύπτονται σαφέστατα από τις αγκύλες που χρησιμοποιεί ο Michel προκειμένου να μεταγράψει τη γεωμετρική πρόταση του Ευκλείδη σε αλγεβρικό συμβολισμό, συμβολισμό που *δεν υπάρχει* πουθενά σε όλο το ευκλείδειο κείμενο. Πράγματι, ο Michel συνεχίζει λέγοντας, «Για να αποδείξει αυτό το θεώρημα,[67] ο Ευκλείδης κάνει χρήση του γνώμονα των Πυθαγορείων»[68] και κατόπιν συνοψίζει την ευκλείδεια γεωμετρική απόδειξη, χωρίς όμως να παραλείψει να προσθέσει (πάλι σε αγκύλες) τις αντίστοιχες αλγεβρικές εκφράσεις (που απουσιάζουν από τον Ευκλείδη), ως εάν η διαδικασία του Ευκλείδη και οι αλγεβρικοί χειρισμοί να είναι ακριβώς ένα και το αυτό πράγμα! Επί πλέον, συνεχίζει την αναχρονιστική του ανάλυση τής II.5 λέγοντας τα ακόλουθα για το διάγραμμα του Ευκλείδη:

> «Μπορούμε, εξ άλλου, να διαπιστώσουμε αμέσως από το σχήμα ... την ισότητα του γνώμονα ... και του ορθογωνίου xy ή c· και, συνεπώς, *να συναγάγουμε*:
>
> $$x = b/2 + \sqrt{(b/2)^2 - c} = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$
>
> και
>
> $$y = b/2 - \sqrt{(b/2)^2 - c} = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$
>
> Καταλήγουμε, έτσι, στους τύπους με τους οποίους μετέφρασαν τα αποτελέσματα και τις πράξεις της αριθμητικής άλγεβρας των Βαβυλωνίων».[69]

66. *Ό.π.*, σ. 643-644.

67. Πράγματι, αυτό ακριβώς είναι η II.5: ένα θεώρημα, ένα *γεωμετρικό* θεώρημα και όχι μια δευτεροβάθμια εξίσωση ή ένα πρόβλημα που οδηγεί σε δευτεροβάθμια εξίσωση!

68. *Ό.π.*, σ. 644.

69. *Ό.π.*, σ. 645, η υπογράμμιση δική μου.

Και, έτσι, έχοντας μεταφράσει με καλό παραδοσιακό τρόπο, από τη μία πλευρά τους βαβυλωνιακούς συγκεκριμένους αριθμούς και το βαβυλωνιακό συνταγολόγιο (τύπου οδηγού μαγειρικής) των επιλυτικών διαδικασιών σε αλγεβρικά σύμβολα και αλγεβρικές πράξεις και, από την άλλη πλευρά, την ευκλείδεια καθαρά γεωμετρική διαδικασία στην ίδια γλώσσα των συμβόλων και των πράξεων με αυτά, ο Michel μπορεί τώρα (όπως και άλλοι πριν από αυτόν) να μένει κατάπληκτος από την «ταύτισή» τους και, κατά συνέπεια, να θεμελιώσει τις αναγκαίες ιστορικές διασυνδέσεις και επιδράσεις ανάμεσα στους δύο μαθηματικούς πολιτισμούς. Σε επιστέγασμα της όλης του ανάλυσης, ο P.-H. Michel συνεχίζει κάνοντας την ακόλουθη βαθυστόχαστη δήλωση:

> Μία και η αυτή εξίσωση μπορεί λοιπόν να λυθεί με δύο τελείως διαφορετικές μεθόδους, για την αξία των οποίων δεν μπορούμε να αποφανθούμε.[70]

Θαυμάσια! Ιστορία; Ίσως, αλλά ασφαλώς όχι σωστή, αποδεκτή ιστορία. Είναι μάλλον «λογική ιστορία», δηλαδή στις περισσότερες περιπτώσεις, *μη ιστορία*. *Είναι ιστορία όπως θα έπρεπε*, μάλλον, *να είναι*, παρά μια ειλικρινής προσπάθεια να καταδειχθεί όπως ήταν· με άλλα λόγια, μια λογική, μάλλον, παρά ιστορική ανακατασκευή.

Σημειώνοντας ότι, ιστορικά, ο γεωμετρικός χειρισμός (ερχόμενος μετά τον «αριθμητικό ατομισμό» των Πυθαγορείων) εκφράζει μια πρόοδο των ελληνικών Μαθηματικών, ο P.-H. Michel υποστηρίζει: «Η γεωμετρία (*επέχοντας θέση άλγεβρας*) επέτρεπε πράγματι τη γενίκευση των αριθμητικών υπολογισμών και την ένταξη των άρρητων ποσοτήτων σε αυτούς τους γενικευμένους υπολογισμούς».[71] Γιατί η γεωμετρία έπαιξε τον ρόλο της άλγεβρας; Πού βρίσκεται η άλγεβρα την οποία υποτίθεται ότι αντικατέστησε; Κανένα ίχνος της δεν ανευρίσκεται στις γνωστές πηγές των ελληνικών Μαθηματικών· και αυτό για έναν πολύ ουσιαστικό λόγο: Δεν υπήρχε άλγεβρα που να προηγήθηκε της γεωμετρίας. Η *αριθμητική* των Πυθαγορείων, η οποία (ακόμη και σύμφωνα με τη συνήθη αντιμετώπιση) αντικαταστάθηκε από τη γεωμετρική προσέγγιση, *δεν ήταν* άλγεβρα και, επομένως, δεν μπορεί να ταυτίζεται ιστορικά με αυτήν.[72] Εάν οι λέξεις έχουν (σε δεδομένες ιστορικές περιόδους) λίγο έως πολύ σταθερά νοήματα, τότε, ασφαλώς, η αριθμητική των Πυθαγορείων (που πραγματεύεται διακριτές ο-

70. *Ό.π.*
71. *Ό.π.*, σ. 646, η υπογράμμιση δική μου.
72. Πρβλ. το ακόλουθο: «... κάθε τύπος αριθμητικού προβλήματος απαιτεί μια επινόηση του πνεύματος που προσιδιάζει σε αυτό το πρόβλημα, είναι προσαρμοσμένη στη λύση του και που δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ευθέως σε άλλους τύπους· διότι, εμμέσως, κάθε πράξη συμβάλλει ουσιαστικά στη διαμόρφωση του αριθμητικού πνεύματος και στη διευκόλυνση των νέων επινοήσεων» (*Les math. en Grèce*, σ. 55-56).

ντότητες), η οποία αντικαταστάθηκε από τη γεωμετρική προσέγγιση (που πραγματεύεται συνεχή μεγέθη), δεν ήταν άλγεβρα.

Οι ιστορικοί των Μαθηματικών δεν μπορούν να τα θέλουν όλα δικά τους. Είναι λογικά αδύνατον να ισχυρίζονται συγχρόνως, από τη μία πλευρά ότι μία από τις κύριες αιτίες της γενικής παρακμής των Μαθηματικών στη μετα-ελληνιστική περίοδο ήταν η απόδοση βαρύτητας στη γεωμετρία από τους Έλληνες[73] και, από την άλλη, ότι η ελληνική γεωμετρία δεν ήταν τίποτε άλλο παρά μεταμφιεσμένη άλγεβρα· εάν ίσχυε το τελευταίο, θα ήταν πολύ εύκολο να εγκαταλείψουν τη μεταμφίεση, να ρίξουν τη μάσκα και να αναπτύξουν την άλγεβρα καθαρά, ενώ, όπως είναι γνωστό, έπρεπε στην πραγματικότητα να περιμένουμε μέχρι τον 16ο αιώνα για να αρχίσει να συμβαίνει αυτό.[74]

Μου φαίνεται ότι πολύ πιο ελκυστική (και ασφαλώς ιστορικά πιο βάσιμη) είναι η θέση ότι τα ελληνικά Μαθηματικά, όπως τα συναντούμε στα *Στοιχεία*, είναι ένα φυσικό επακόλουθο των Μαθηματικών των Πυθαγορείων, όπου οι διακριτές οντότητες της αριθμητικής των τελευταίων (με όλες τις εγγενείς αδυναμίες που την συνοδεύουν) αντικαταστάθηκαν στα πρώτα από τα συνεχή μεγέθη της γεωμετρίας· έτσι, οι αριθμοί στον Ευκλείδη δεν είναι πλέον σωροί σημείων αλλά ευθύγραμμα τμήματα κ.λπ. Αυτή η αντικατάσταση επέτρεψε στην ελληνική γεωμετρία να αντιμετωπίσει «ένδοξα» (και αυστηρά) το υποτιθέμενο «σκάνδαλο» που προέκυψε από την ανακάλυψη της αρρητότητας.[75]

Φαίνεται ότι είναι αλήθεια επίσης πως η αριθμητική προσέγγιση διά των «παραστατικών αριθμών» των Πυθαγορείων τρόπον τινά περιείχε εν σπέρματι μία άλλη δυνατότητα γενίκευσης (και, εν δυνάμει, άρσης των αντιφάσεων) από αυτήν που όντως ακολούθησαν τα κλασικά ελληνικά Μαθηματικά (δηλαδή την καθαρά γεωμετρική προσέγγιση). Πρόκειται για τη δυνατότητα να διακρίνει κανείς οπτικά σχέσεις μεταξύ αριθμών του ίδιου είδους, μέσω των διαφορών των γνωμόνων κατά την παράστασή τους με στιγμές (ψήφους), οι οποίες σχέσεις θα μπορούσε ίσως να ιδωθούν αναδρομικά ως ένα βήμα προς την κατεύθυνση της πραγματικής άλγεβρας. (Αλλά η άλγεβρα τον 16ο αιώνα *δεν αναπτύχθηκε* από αυτήν την αιτία!).

Η μόνη εύλογη αντίρρηση που μπορεί να διατυπώσει κανείς σε αυτό το πλαίσιο (και που δεν οδηγεί σε μια θέση που να κάνει το έδαφος να τρέμει κάτω από τα πόδια μας) είναι ότι για τον Έλληνα μαθηματικό που ζούσε πριν από την ανακάλυψη της αρρητότητας και εργαζόταν μέσα στην παράδοση της αριθ-

73. Βλ. Michel: *ό.π.*, σ. 646· A. Rey: *La science dans l'Antiquité*, 3, σ. 388-391· G.A. Miller: *ό.π.*
74. Βλ. A. Rey: *Les math. en Grèce*, σ. 32, 45 (υποσημ. 1) κ.ε.· Mahoney: «Die Anfänge der algebr. Denkweise», σ. 18, 23 κ.ε.
75. Η ύπαρξη ενός τέτοιου «σκανδάλου» στον κόσμο των *μαθηματικών* είναι τουλάχιστον αμφίβολη. Πρβλ., σε σχέση με αυτό, Á. Szabó: *ό.π.*, σ. 115.

μητικής γεωμετρίας, ο ίδιος ο τρόπος γεωμετρικής αναπαράστασης των αριθμών με σημεία και σχήματα από στιγμές (ψήφους) περιείχε εγγενείς δυνατότητες να συλλαμβάνει κανείς αριθμητικές σχέσεις οπτικά· με άλλα λόγια, ο πυθαγόρειος τρόπος παράστασης των αριθμών έδωσε στον πυθαγόρειο μαθηματικό ένα εποπτικό, οπτικό μέσον γενίκευσης, που, αναμφίβολα, συνέβαλε στην πρόοδο των Μαθηματικών.

Πριν αφήσουμε την πρόταση II.5, θα ήθελα να επιστήσω την προσοχή του αναγνώστη στον τρόπο πραγμάτευσης των II.5 και II.6 από τον van der Waerden και στην κριτική του Szabó σε αυτήν. Για τον van der Waerden, τόσο η II.5 όσο και η II.6 δεν είναι τίποτε άλλο παρά η γεωμετρική έκφραση ενός και του αυτού αλγεβρικού τύπου: $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$.[76] «Αλλά», όπως ισχυρίζεται ο van der Waerden, «δεν μπορεί οι δύο προτάσεις να αποσκοπούσαν μόνον στο να δώσουν [στον ως άνω τύπο] ... γεωμετρική ενδυμασία, προκειμένου αυτός να αποδειχθεί κατ' αυτόν τον τρόπο· διότι, για ποιο λόγο θα χρειάζονταν να δοθούν δύο προτάσεις για *έναν* τύπο;».[77] Πράγματι, γιατί; Η απάντηση του van der Waerden είναι ότι οι δύο προτάσεις στη πραγματικότητα δεν είναι προτάσεις αλλά «... *λύσεις προβλημάτων*· στη II.5 ζητείται να κατασκευασθούν δύο ευθύγραμμα τμήματα x και y, όταν δίδονται το άθροισμα και το γινόμενο ενώ στη II.6 όταν δίδονται η διαφορά και το γινόμενο».[78]

Ο Árpád Szabó, σε μια από τις πιο αποτελεσματικές κριτικές που στράφηκαν ποτέ εναντίον του όρου «γεωμετρική άλγεβρα», κονιορτοποιεί την ερμηνεία του van der Waerden, ερμηνεία που βασίζεται σε ανεξέλεγκτους χειρισμούς αλγεβρικών συμβόλων, που οδηγεί σε εξισώσεις κ.λπ. Σύμφωνα με τον Szabó, η II.5 είναι μια καθαρά γεωμετρική πρόταση, ακριβέστερα ένα λήμμα που χρειάζεται για την απόδειξη της πολύ σημαντικής, καθαρά γεωμετρικής πρότασης II.14. Αυτό προκύπτει όχι μόνο από τις σύγχρονες εκδόσεις του έργου του Ευκλείδη, στις οποίες κατά την απόδειξη της II.14 γίνονται παραπομπές στη II.5, αλλά επίσης από το ουσιαστικά πανομοιότυπο λεξιλόγιο μεγάλων μερών των δύο προτάσεων στο πρωτότυπο αρχαίο ελληνικό κείμενο.

76. *Η αφύπνιση της επιστήμης*, σ. 134. Ο Zeuthen, πλησιέστερα στο ευκλείδειο κείμενο, μεταγράφει τη II.5 ως $(a-b)b + (\frac{1}{2}a - b)^2 = (\frac{1}{2}a)^2$ ή ως $(a-b)b + \left(b - \frac{1}{2a}\right)^2 = (\frac{1}{2}a)^2$ και τη II.6 ως $(a+b)b + (\frac{1}{2}a)^2 = (\frac{1}{2}a + b)^2$ ή ως $b(b-a) + (\frac{1}{2}a)^2 = (b - \frac{1}{2}a)^2$ (*Die Lerhe*, σ. 12). Ο Nesselmann, για τον οποίο, όπως είδαμε, αυτές είναι *αριθμητικές* προτάσεις, επιλέγει άλλη, ισοδύναμη αλγεβρική μορφή για τη II.5, $ab + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, και μία από τις δύο παραλλαγές του Zeuthen για τη II.6. (*Die Algebra der Griechen*, σ. 154). Αυτή η ποικιλία και πληθώρα των μεταγραφών είναι, από μόνη της, μια σαφής ένδειξη ότι οι αξιοσέβαστοι συγγραφείς εκτελούν μια γεωμετροκτονία!

77. *Ό.π.*

78. *Ό.π.*, σ. 135.

Πράγματι, η «αδεξιότητα» και η δυσκινησία στη διατύπωση της II.5 φαίνεται να υποδεικνύουν ότι σκοπός της ήταν να αποτελέσει ένα «προκατασκευασμένο» ουσιώδες τμήμα, έτοιμο να χρησιμοποιηθεί στην απόδειξη της II.14.

Επιπροσθέτως, αυτό δεν είναι το μόνο παράδειγμα στα *Στοιχεία* όπου παρατηρούμε να ακολουθείται μια τέτοια διαδικασία. Άλλες καθαρά γεωμετρικές προτάσεις, που αναφέρθηκαν προηγουμένως προκειμένου να επεξηγήσουν την ελληνική «γεωμετρική άλγεβρα», εμφανίζουν παρόμοια σχέση, υπό την έννοια ότι η μία από ένα ζεύγος προτάσεων αποτελεί αναπόσπαστο τμήμα που χρησιμοποιείται στην απόδειξη του άλλου μέλους του ζεύγους. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι οι προτάσεις II.6 και II.11, και οι δύο καθαρά γεωμετρικά θεωρήματα, όπου η II.6 αποτελεί ένα τέτοιο αναπόσπαστο «προκατασκευασμένο» τμήμα τής II.11. Ο λόγος που η II.6 φαίνεται σαν ειδική περίπτωση της II.5, λέει ο Szabó, είναι απλώς ότι η II.11 (τμήμα της απόδειξης της οποίας είναι η II.6) είναι στην πραγματικότητα ειδική περίπτωση της II.14 (τμήμα της απόδειξης της οποίας είναι η II.5).[79] Ένα άλλο παράδειγμα (σύμφωνα με μαρτυρία του Πρόκλου στο σχόλιό του στην *Πολιτεία* του Πλάτωνος) είναι η II.10, η οποία αποτελεί αναπόσπαστο τμήμα μιας πρότασης που δεν περιλαμβάνεται στα *Στοιχεία* αλλά έχει ανακατασκευασθεί με βάση τις παρατηρήσεις του Πρόκλου.[80]

Δεν χρειάζεται να αποδεχθεί κάποιος την προηγούμενη ερμηνεία του Szabó για τις «ομοιότητες» μεταξύ των II.5 και II.6 προκειμένου να συμφωνήσει με την ουσία του επιχειρήματός του εναντίον της «γεωμετρικής άλγεβρας». Κατ' αρχάς, ο Szabó αποδεικνύει ότι ακόμη και αν υπήρξε ποτέ ένα τέτοιο κατασκεύασμα σαν τη «βαβυλωνιακή άλγεβρα» (και αυτό είναι μάλλον αμφίβολο) «... *ουδείς μπόρεσε μέχρι σήμερα* με *συγκεκριμένη μαρτυρία* να καταστήσει βέβαιο ότι οι Έλληνες κατά την προευκλείδεια εποχή είχαν γνωρίσει πράγματι μια τέτοια άλγεβρα, πολύ δε περισσότερο ότι την παρέλαβαν και την "γεωμετρικοποί-

79. Αμφιβάλλω αν αυτό λύνει πραγματικά το «πρόβλημα»! Ας μου επιτραπεί να δηλώσω με έμφαση ότι πρόβλημα υπάρχει *μόνον* αν κάποιος μεταγράψει τις II.5 και II.6 σε σύγχρονο συμβολισμό. Μόνον ως αποτέλεσμα αυτής της τελείως απαράδεκτης διαδικασίας ο van der Waerden μπόρεσε να διατυπώσει τον αρχικό του ισχυρισμό, ότι οι II.5 και II.6 δεν είναι παρά ένας και ο αυτός αλγεβρικός τύπος! Αν κάποιος μείνει μέσα στο πλαίσιο του Ευκλείδη (και αυτή είναι η μόνη επιτρεπτή διαδικασία), δηλαδή αν δεν υπερβεί τα όρια της γεωμετρίας, τότε, σαφέστατα, οι II.5 και II.6 *δεν είναι* μία και η αυτή πρόταση. Συγκεκριμένα, στη γλώσσα της παραβολής χωρίων, η II.5 ζητεί να παραβληθεί ορθογώνιο σε δοθείσα ευθεία έτσι ώστε να είναι ίσο με δοθέν τετράγωνο και να *υπολείπεται* κατά τετράγωνο, ενώ η II.6 ζητεί να παραβληθεί ορθογώνιο σε δοθείσα ευθεία έτσι ώστε να είναι ίσο με δοθέν τετράγωνο και να *υπερέχει* κατά τετράγωνο! (Πρβλ., Ευκλείδης, *Στοιχεία*, 1, σ. 385-386). Μόνον εάν έχει κανείς στη διάθεσή του το πλεονέκτημα του αλγεβρικού τρόπου έκφρασης μπορεί να αποδείξει ότι αυτές οι δύο προτάσεις είναι ταυτόσημες.

80. Á. Szabó: *Anfänge der griechischen Mathematik*, σ. 458-459.

ησαν". (Οι Έλληνες δεν παρέλαβαν καν από τους Βαβυλωνίους ούτε το θεσιακό σύστημα χαρακτηρισμού των αριθμών)».[81]

Επίσης, οι αποκαλούμενες «γεωμετρικά ενδεδυμένες αλγεβρικές προτάσεις» του Ευκλείδη είναι «αλγεβρικές» μόνον υπό την έννοια ότι *εμείς* μπορούμε μάλλον εύκολα να τις καταστήσουμε «αλγεβρικές». «Αλλά δεν μπορεί με κανέναν τρόπο να λεχθεί ότι τα θεωρήματα αυτά υπήρξαν αρχικώς αλγεβρικές προτάσεις ή επιλύσεις αλγεβρικών προβλημάτων. Όχι, όλα αυτά –τόσο οι προτάσεις, όσο και τα προβλήματα– *είναι καθαρώς γεωμετρικής καταγωγής*. Και η πρόταση II.5 είναι επίσης καθαρώς γεωμετρική. Βεβαίως, μπορούμε να *παρομοιάσουμε* την πρόταση αυτή, σύμφωνα με τη σύγχρονη ερμηνεία, με μια "αλγεβρική επίλυση προβλήματος". Αλλά πρέπει να προσέξουμε μήπως μια τέτοια παρομοίωση συσκοτίσει την αρχική και καθαρώς γεωμετρική έννοια της πρότασης».[82]

Ο Szabó επισημαίνει ότι το ίδιο το πρόβλημα της ασυμμετρίας ήταν αρχικώς ένα *γεωμετρικό* πρόβλημα[83] και επιλέγει να χρησιμοποιήσει την έκφραση «πυθαγόρεια γεωμετρία των επιφανειών»,[84] παρά τον χιλιοειπωμένο και εσφαλμένο όρο «γεωμετρική άλγεβρα». Συνοψίζοντας την κριτική του, ο Szabó αναφέρει:

> Θα ήταν παραπλανητικό να θεωρηθεί η πρόταση αυτή ως «επίλυση μιας αλγεβρικής εξίσωσης». Ο αλγεβρικός τρόπος ερμηνείας –αν και είναι ισοδύναμος προς την πρόταση του Ευκλείδη– συσκοτίζει την αληθινή γεωμετρική έννοια της πρότασης αυτής και προκαλεί ιστορικώς την εσφαλμένη εντύπωση, ως εάν οι Έλληνες κατά τους προευκλείδειους χρόνους χρησιμοποιούσαν πράγματι «αλγεβρικές εξισώσεις».[85]

Και τελικά:

> Και οι άλλες προτάσεις της αποκαλούμενης «γεωμετρικής άλγεβρας των

81. *Ό.π.*, σ. 457.
82. *Ό.π.*, σ. 458. Ο Szabó προβαίνει σε καυστική κριτική της θέσης των Tannery-Zeuthen: «Ο H. G. Zeuthen, τη "συμβολή" του οποίου στην ανακάλυψη της λεγόμενης "γεωμετρικής άλγεβρας των Ελλήνων" εξήρε υπερβολικά ο Neugebauer ... και στα δύο του έργα (*Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*, ... και *Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter*, ...) δεν έκανε πράγματι τίποτε άλλο, σε ό,τι αφορά τη "γεωμετρική άλγεβρα", από το να αναπτύξει μόνον περαιτέρω την παραπλανητική *σύγκριση* του P. Tannery. (Θα έπρεπε κατ' αρχήν να διερωτηθεί κανείς μέχρι ποίου σημείου επιτρέπεται να γίνεται λόγος για λύσεις *αλγεβρικών εξισώσεων*, σε σχέση με τις *γεωμετρικές κατασκευές* του Ευκλείδη!)» (*ό.π.*, υποσημ. 6, σ. 457). Για επιπρόσθετα στοιχεία αυτής της κριτικής, πρβλ. *ό.π.*, σ. 35-36, 474, 488.
83. *Ό.π.*, σ. 36.
84. *Ό.π.*, σ. 465 κ.ε.
85. *Ό.π.*, σ. 487.

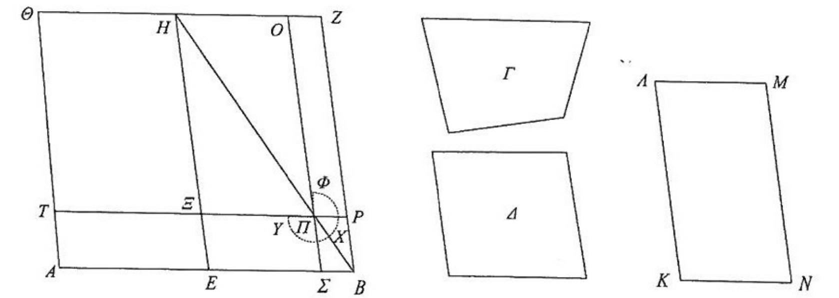
Πυθαγορείων» πρέπει να ερμηνευθούν ως καθαρώς *γεωμετρικές* προτάσεις. Αντίθετα, *δεν* κατέστη δυνατόν μέχρι σήμερα να διαπιστωθούν ίχνη καθαρώς αλγεβρικής σκέψης στην προευκλείδεια παράδοση.[86]

* * *

Το επόμενο παράδειγμά μας, προερχόμενο από ένα βιβλίο που θεωρήθηκε ως το κύριο στήριγμα της «γεωμετρικής άλγεβρας», είναι η πρόταση VI.28. Η διατύπωση του Ευκλείδη είναι η εξής:

> Σε δοθείσα ευθεία να παραβληθεί παραλληλόγραμμο ίσο προς δοθέν ευθύγραμμο σχήμα, από το οποίο να λείπει σχήμα παραλληλόγραμμο όμοιο προς δοθέν. Πρέπει δε το δεδομένο ευθύγραμμο σχήμα να μην είναι μεγαλύτερο από το παραλληλόγραμμο που αναγράφεται από του μισού της ευθείας και είναι όμοιο προς το ελλείπον.[87]

Η ευκλείδεια απόδειξη εκτυλίσσεται ως εξής: Έστω AB η δοθείσα ευθεία, Γ το δοθέν ευθύγραμμο σχήμα (όχι μεγαλύτερο του παραλληλογράμμου που αναγράφεται από του μισού της AB και είναι όμοιο προς το ελλείπον) και Δ το παραλληλόγραμμο προς το οποίο είναι όμοιο το ελλείπον.



Ζητείται να παραβληθεί στην AB ένα παραλληλόγραμμο ίσο προς το Γ και να ελλείπει ένα παραλληλόγραμμο όμοιο προς το Δ. Διχοτομούμε την AB στο E. Επί της EB κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο $EBZH$ όμοιο και ομοίως κείμενο προς το Δ. (Αυτό επιτυγχάνεται σύμφωνα με την VI.18.) Συμπληρώνουμε το παραλληλόγραμμο AH.

Τώρα, εάν παραλληλόγραμμο $AH = \Gamma$, τότε το ζητούμενο προφανώς ικανοποιείται. Εάν, όμως, παραλληλόγραμμο $AH \neq \Gamma$, τότε η μόνη δυνατότητα που απομένει (λόγω του *διορισμού* που διατυπώνεται στην εκφώνηση) είναι να ισχύ-

86. *Ό.π.*
87. Ευκλείδης: *Στοιχεία*, 2, σ. 260.

ει παραλληλόγραμμο $AH > \Gamma$. Εάν συμβαίνει αυτό, τότε παραλληλόγραμμο $HB > \Gamma$, αφού εκ κατασκευής παραλληλόγραμμο $AH =$ παραλληλόγραμμο HB. Ας κατασκευασθεί, τώρα, παραλληλόγραμμο $K\Lambda MN$ ίσο προς την υπεροχή του HB έναντι του Γ και ταυτοχρόνως όμοιο (και ομοίως κείμενο) με το Δ. (Αυτό επιτυγχάνεται σύμφωνα με την VI.25.)

Αφού παραλληλόγραμμο $HB \sim$ παραλληλόγραμμο Δ, άρα παραλληλόγραμμο $KM \sim$ παραλληλόγραμμο Δ (από την VI.21). Υποθέτουμε ότι οι ομόλογες πλευρές των δύο όμοιων παραλληλογράμμων HB και KM είναι αντιστοίχως η HE με την $K\Lambda$ και η HZ με τη ΛM.

Επειδή παραλληλόγραμμο $HB = \Gamma +$ παραλληλόγραμμο KM (εκ κατασκευής), άρα παραλληλόγραμμο $HB >$ παραλληλόγραμμο KM. Ο Ευκλείδης τώρα συμπεραίνει (και αυτό είναι μια σιωπηρή παραδοχή) ότι

$$HE > K\Lambda \text{ και } HZ > \Lambda M.$$

Έστω, τότε, $H\Xi = K\Lambda$ και $HO = \Lambda M$ (εκ κατασκευής) και ας έχει κατασκευασθεί το παραλληλόγραμμο $H\Xi O\Pi$. Προφανώς, το παραλληλόγραμμο $H\Pi$ είναι ίσο και όμοιο προς το παραλληλόγραμμο KM. Άρα παραλληλόγραμμο $H\Pi \sim$ παραλληλόγραμμο HB (από την VI.21) και άρα, από την VI.26, τα παραλληλόγραμμα $H\Pi$ και HB είναι περί την αυτή διαγώνιο. Έστω ότι η κοινή διαγώνιος $H\Pi B$ έχει αχθεί. Επειδή παραλληλόγραμμο $BH = \Gamma +$ παραλληλόγραμμο KM και παραλληλόγραμμο $H\Pi =$ παραλληλόγραμμο KM, άρα γνώμων $YX\Phi = \Gamma$. Επί πλέον, επειδή παραλληλόγραμμο $OP =$ παραλληλόγραμμο $\Xi\Sigma$ (από την I.43), άρα παραλληλόγραμμο $OB =$ παραλληλόγραμμο ΞB. Αλλά, παραλληλόγραμμο $\Xi B =$ παραλληλόγραμμο TE (από την I.36), αφού $AE = EB$. Άρα παραλληλόγραμμο $TE =$ παραλληλόγραμμο OB, επομένως παραλληλόγραμμο $T\Sigma =$ γνώμων $YX\Phi$. Αλλά γνώμων $YX\Phi = \Gamma$, άρα παραλληλόγραμμο $T\Sigma = \Gamma$, ο.έ.δ.[88]

Και πάλι ούτε αλγεβρικά σύμβολα ούτε εξισώσεις· μια τυπική, καθαρώς γεωμετρική πρόταση, που ανήκει στην πυθαγόρεια γεωμετρία των επιφανειών. Μόνον κάποιος που είναι ήδη διαποτισμένος με τη σοφία της μοντέρνας άλγεβρας μπορεί να «διακρίνει» πίσω από τον παραδοσιακό γεωμετρικό συλλογισμό τον «αλγεβρικό τρόπο του σκέπτεσθαι», να μεταγράψει την πρόταση σε σύγχρονο συμβολισμό και, τότε (εάν δεν διακρίνει το ιστορικό ολίσθημα και την ανακολουθία στην οποία βασίζεται το συμπέρασμά του) να ισχυρισθεί ότι αυτή η πρόταση δεν είναι τίποτε άλλο παρά γεωμετρικώς ενδεδυμένη άλγεβρα. Και αυτό ακριβώς κάνουν οι van der Waerden[89] και T.L. Heath.

88. *Ό.π.*, σ. 260-262.

89. *Ό.π.*, σ. 135-137· πρβλ. επίσης Zeuthen: *Die Lehre*, σ. 19-20, 29-31 και *Gesch. d. Math. im Alt. u. Mittel.*, σ. 47-48.

Κατά τον Heath, αυτή η πρόταση είναι «... το γεωμετρικό ισοδύναμο της λύσης της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $ax - \frac{b}{c}x^2 = S$, με τον απαραίτητο περιορισμό που εξασφαλίζει την ύπαρξη πραγματικής λύσης, δηλαδή $S \leq \frac{c}{b} \cdot \frac{a^2}{4}$».[90] Ποιος μπορεί να το δει αυτό; Αν θέσετε υπ' όψιν ενός έξυπνου μαθητή της ελληνικής συνθετικής γεωμετρίας, το μυαλό του οποίου ουδέποτε εκτέθηκε στον αλγεβρικό τρόπο του σκέπτεσθαι, την παραπάνω δήλωση του Heath, αυτός, οπωσδήποτε, δεν θα μπορέσει να την κατανοήσει. Στην πραγματικότητα, νομίζω ότι *ούτε ο Ευκλείδης ο ίδιος θα μπορούσε να καταλάβει τη δήλωση του Heath*· όχι διότι ο Ευκλείδης ήταν λιγότερο έξυπνος από τον Heath, αλλά διότι, ζώντας την εποχή που έζησε, δεν είχε στη διάθεσή του ό,τι είχε ο Heath τον 19ο και τον 20ό αιώνα (κυρίως την άλγεβρα και την αναλυτική γεωμετρία) και διότι (και αυτός είναι ένας άλλος τρόπος να πει κανείς το ίδιο πράγμα) ο δικός του τρόπος μαθηματικής σκέψης διέφερε από του Heath. Ο Heath προσέγγιζε τα Μαθηματικά *αλγεβρικώς*, ο Ευκλείδης (όπως και όλοι οι αρχαίοι Έλληνες) τα προσέγγιζε *γεωμετρικώς*· και οι δύο προσεγγίσεις ουδέποτε συναντήθηκαν πραγματικά πριν από τον 16ο αιώνα.[91]

* * *

90. *Στοιχεία*, 2, σ. 263.

91. Ο Heath συνεχίζει στο σχόλιό του: «Για να εκθέσω την ακριβή αντιστοιχία ανάμεσα στην ευκλείδεια γεωμετρική και στη συνήθη αλγεβρική μέθοδο της επίλυσης της εξίσωσης ...» (*ό.π.*, σ. 263). Μετασχηματίζει την εξίσωση με ποικίλους τρόπους και, τελικά, καταλήγει στην ακόλουθη έκφραση για τη ρίζα:

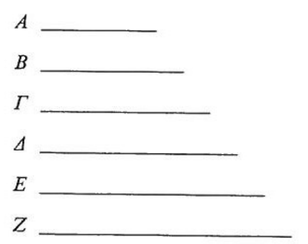
$$x = \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{c}{b}\left(\frac{c}{b} \cdot \frac{a^2}{4} - S\right)}.$$

Κατόπιν, κατορθώνει να δείξει πώς μπορεί να βρει για κάθε βήμα στην απόδειξη του Ευκλείδη μια αντίστοιχη αλγεβρική έκφραση, μέχρις ότου φτάσει σε μια έκφραση για το $\Pi\Sigma$ (βλ. σχήμα προηγουμένως) πανομοιότυπη με την έκφραση που βρήκε προηγουμένως για το x (με μείον μπροστά από το ριζικό). Δεν υπάρχει αντίρρηση για τη διαδικασία του Heath, στον βαθμό που δεν την αποδίδει στον Ευκλείδη. Αλλά αυτό ακριβώς είναι εκείνο που κάνει ο Heath όταν λέει: «... ο Ευκλείδης *στην πραγματικότητα* βρίσκει το $H\Xi$ από την εξίσωση $H\Xi^2 \cdot \frac{b}{c} = \frac{c}{b} \cdot \frac{a^2}{4} - S$» (*ό.π.*, σ. 264, η υπογράμμιση δική μου). Αυτό είναι ασυγχώρητο! Υπάρχουν και άλλα ασυγχώρητα ιστορικά ολισθήματα στον σχολιασμό του Heath. Παραδείγματος χάριν, αντιλαμβανόμενος ότι η λύση του Ευκλείδη «αντιστοιχεί» στη μία μόνον ρίζα της εξίσωσης του Heath, ο τελευταίος κάνει την ακόλουθη παρατήρηση: «(Ο Ευκλείδης) δεν μπορεί να μην είδε [;] ότι το άθροισμα της $H\Xi$ και της HE μπορούσε να δώσει μια άλλη λύση» (*ό.π.*)· τότε ο Heath δείχνει πώς «... μπορεί να βρεθεί η άλλη λύση ... [!]» (*ό.π.*). Η ρίζα του τελευταίου ολισθήματος ανευρίσκεται στον Zeuthen, *Die Lehre*, σ. 19-21.

Προχωρούμε τώρα στην εξέταση δύο προτάσεων από το ένατο βιβλίο. Στην πρόταση IX.8, ο Ευκλείδης αναφέρει:

> Εάν δίδονται οσοιδήποτε αριθμοί, αρχής γενομένης από τη μονάδα, σε συνεχή αναλογία, ο τρίτος από τη μονάδα θα είναι τετράγωνος, όπως επίσης και όλοι όσους βρίσκουμε διαδοχικά παραλείποντας έναν· ο τέταρτος θα είναι κύβος, όπως επίσης και όλοι όσους βρίσκουμε διαδοχικά παραλείποντας δύο· και ο έβδομος θα είναι συγχρόνως κύβος και τετράγωνος, όπως επίσης και όλοι όσους βρίσκουμε διαδοχικά παραλείποντας πέντε.[92]

Η ευκλείδεια απόδειξη εκτυλίσσεται ως εξής (και η δική μου παράφραση είναι *πιστή* στον ευκλείδειο τρόπο του σκέπτεσθαι):



Έστω ότι δίδονται οσοιδήποτε αριθμοί, αρχής γενομένης από τη μονάδα, όπως είναι οι A, B, Γ, Δ, E, και Z. Από τον ορισμό της «συνεχούς αναλογίας» συνεπάγεται ότι όπως η μονάδα είναι προς τον A έτσι ο A είναι προς τον B. Αλλά η μονάδα μετρά τον A· άρα, όσες φορές η μονάδα μετρά τον A τόσες φορές ο A μετρά τον B (από τον ορισμό VII.20). Τώρα, αφού η μονάδα μετρά τον A σύμφωνα με τις μονάδες του A, ο A μετρά τον B επίσης σύμφωνα με τις μονάδες του A. Επομένως, αν ο A πολλαπλασιαστεί με τον εαυτό του δίνει τον B και άρα ο B είναι τετράγωνος. Επίσης, αφού οι B, Γ, Δ είναι σε συνεχή αναλογία και ο B είναι τετράγωνος, συνεπάγεται (από την VIII.22) ότι ο Δ είναι τετράγωνος. Για τον ίδιο λόγο, ο Z είναι τετράγωνος και το ίδιο είναι όλοι όσους βρίσκουμε παραλείποντας έναν.

Τώρα, επειδή όπως η μονάδα είναι προς τον A έτσι είναι ο B προς τον Γ, η μονάδα μετρά τον A όσες φορές ο B μετρά τον Γ. Αλλά η μονάδα μετρά τον A κατά το πλήθος των μονάδων του· επομένως, ο B μετρά τον Γ κατά τις μονάδες του A, δηλαδή ο A πολλαπλασιαζόμενος με τον B δίνει τον Γ.

Επειδή ο A πολλαπλασιαζόμενος με τον εαυτό του δίνει τον B, πολλαπλασιαζόμενος δε με τον B δίνει τον Γ, συνεπάγεται ότι ο Γ είναι κύβος. Επίσης, αφού οι Γ, Δ, E και Z είναι σε συνεχή αναλογία και ο Γ είναι κύβος, συνεπάγεται

92. *Στοιχεία*, 2, σ. 390.

(από την VIII.23) ότι ο Z είναι και αυτός κύβος. Αλλά ο Z είχε αποδειχθεί ότι είναι επίσης τετράγωνος και έτσι ο έβδομος από τη μονάδα είναι ταυτόχρονα κύβος και τετράγωνος. Με τον ίδιο τρόπο μπορεί να αποδειχθεί ότι όλοι οι αριθμοί που βρίσκουμε παραλείποντας πέντε είναι κύβοι και τετράγωνοι, ο.έ.δ.[93]

Αυτά για τον Ευκλείδη. Κατά τη γνώμη μου, αυτή η πρόταση μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ένα πολύ χτυπητό παράδειγμα των έμφυτων περιορισμών και των εγγενών χρόνιων ανεπαρκειών της αγαπημένης μεθόδου (που ασκούν οι μαθηματικοί οι οποίοι παριστάνουν τους ιστορικούς) της αυτόματης και ανιστορικής μεταγραφής του ευκλείδειου κειμένου στον σύγχρονο αλγεβρικό συμβολισμό. Μια πρόταση για την απόδειξη της οποίας ο Ευκλείδης πρέπει να είχε εργαστεί σκληρά (δεν θα ήταν, ίσως, μεγάλη υπερβολή να πούμε, με όλες του τις δυνάμεις) και στην πορεία της οποίας έπρεπε να επικαλεστεί πολλές προηγούμενες προτάσεις και ορισμούς (π.χ., VIII.22, VIII.23, ορ. VII.20), γίνεται τετριμμένη κοινοτοπία, η οποία είναι άμεσο αποτέλεσμα, κοινότοπο επακόλουθο του οικείου σε όλους μας συμβολισμού:

$$1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ a^6,\ a^7,\ a^8,\ a^9,\ \ldots$$

Στην πραγματικότητα, αν χρησιμοποιήσουμε σύγχρονο αλγεβρικό συμβολισμό, αυτή *παύει τελείως να είναι πρόταση* και η αλήθειά της είναι άμεση και τετριμμένη εφαρμογή του ορισμού της γεωμετρικής προόδου στην ειδική περίπτωση που ο πρώτος όρος της είναι ίσος με 1 και ο λόγος, q, είναι θετικός ακέραιος αριθμός (για τον Ευκλείδη)!

Δεύτερο Παράδειγμα

Στην πρόταση IX.9 ο Ευκλείδης αναφέρει ότι:

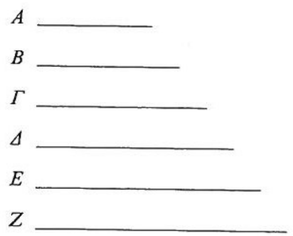
> Εάν δίδονται οσοιδήποτε αριθμοί, αρχής γενομένης με τη μονάδα, σε συνεχή αναλογία και ο αριθμός μετά τη μονάδα είναι τετράγωνος, όλοι οι επόμενοι θα είναι επίσης τετράγωνοι. Και αν ο αριθμός μετά τη μονάδα είναι κύβος, όλοι οι επόμενοι θα είναι επίσης κύβοι.[94]

Η απόδειξη του Ευκλείδη

Έστω ότι δίδονται οσοιδήποτε αριθμοί, αρχής γενομένης από τη μονάδα, σε συνεχή αναλογία, συγκεκριμένα οι A, B, Γ, Δ, E, και Z, όπου ο A, ο αριθμός μετά τη μονάδα, είναι τετράγωνος. Από την πρόταση που αποδείχθηκε προηγουμένως (IX.8), ο B και όλοι όσοι βρίσκονται, εάν παραλειφθεί ένας, είναι τετράγω-

93. *Ό.π.*, σ. 390-391.
94. *Ό.π.*, σ. 392.

νοι. Επειδή οι A, B, Γ είναι σε συνεχή αναλογία και ο A είναι τετράγωνος, (από την VIII.22), προκύπτει ότι ο Γ είναι επίσης τετράγωνος. Κατά τον ίδιο τρόπο μπορεί να αποδειχθεί ότι και όλοι οι επόμενοι είναι και αυτοί τετράγωνοι.



Έστω τώρα ότι ο A είναι κύβος. Από την IX.8, ο Γ είναι κύβος και το ίδιο είναι όλοι όσους βρίσκουμε παραλείποντας δύο. Επειδή όπως η μονάδα είναι προς τον A έτσι και ο A είναι τον B, η μονάδα μετρά τον A όσες φορές ο A μετρά τον B. Αλλά η μονάδα μετρά τον A κατά τις μονάδες αυτού· επομένως ο A μετρά τον B κατά το πλήθος των μονάδων του A. Συνεπώς, ο A πολλαπλασιαζόμενος με τον εαυτό του δίνει τον B. Αλλά ο A είναι κύβος και ένας κύβος πολλαπλασιαζόμενος με τον εαυτό του δίνει κύβο (λόγω της IX.3). Έτσι, ο B είναι κύβος. Τώρα οι A, B, Γ, Δ είναι τέσσερεις αριθμοί σε συνεχή αναλογία και ο πρώτος εξ αυτών είναι κύβος· συνεπώς, από την VIII.23, ο Δ είναι επίσης κύβος. Για τον ίδιο ακριβώς λόγο ο E είναι επίσης κύβος, όπως και όλοι οι άλλοι, ο.έ.δ.[95] Αυτά για τον Ευκλείδη.

Τί συμβαίνει με αυτήν την πρόταση αν υποπέσουμε ακόμη μία φορά στο αμάρτημα να χρησιμοποιήσουμε τον μοντέρνο συμβολισμό; Σαφέστατα, ο «προτασιακός» της χαρακτήρας –αν μου επιτραπεί να χρησιμοποιήσω αυτόν τον όρο σε ένα τέτοιο πλαίσιο– εξαφανίζεται και *η πρόταση* γίνεται για άλλη μία φορά τετριμμένη συνέπεια του γενικού ορισμού της γεωμετρικής προόδου:

$$1,\ a^2,\ a^4,\ a^6,\ a^8,\ \ldots,\ a^{2n},\ \ldots$$
$$1,\ a^3,\ a^6,\ a^9,\ a^{12},\ \ldots,\ a^{3n},\ \ldots$$

Δεν υπάρχει τίποτε που να χρήζει αποδείξεως, δεν υπάρχουν καν προτάσεις. Και πάλι έχουν αντικατασταθεί στον *ορισμό* της γεωμετρικής προόδου συγκεκριμένες τιμές για τον πρώτο όρο και τον λόγο· και το όλο πράγμα δεν είναι τίποτε άλλο από μια ειδική περίπτωση του ορισμού!

* * *

Ας αλλάξουμε τώρα βιβλίο και ας αλιεύσουμέ μερικές προτάσεις από το δέκατο βιβλίο, το ογκωδέστερο και ένα από τα σπουδαιότερα βιβλία των *Στοιχείων* του

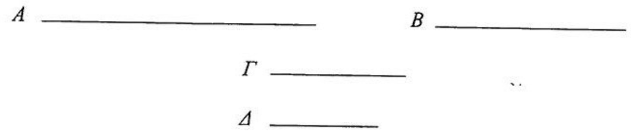
95. *Ό.π.*, σ. 392-393.

Ευκλείδη, τα περισσότερα από τα αποτελέσματα του οποίου οφείλονται, όπως φαίνεται, στον Θεαίτητο.[96] Ο Ευκλείδης, ωστόσο, ως συνήθως, συστηματοποίησε, αποσαφήνισε, διατύπωσε ακριβείς ορισμούς και διέκρινε περιπτώσεις.

Πρόταση X.9

Τα τετράγωνα από ευθείες οι οποίες είναι μήκει σύμμετρες έχουν μεταξύ τους λόγο τετράγωνου αριθμού προς τετράγωνο αριθμό· και τα τετράγωνα που έχουν μεταξύ τους λόγο τετράγωνου αριθμού προς τετράγωνο αριθμό θα έχουν τις πλευρές μήκει σύμμετρες. Αλλά τα τετράγωνα από ευθείες οι οποίες είναι μήκει ασύμμετρες δεν έχουν μεταξύ τους λόγο τετράγωνου αριθμού προς τετράγωνο αριθμό· και τα τετράγωνα που δεν έχουν μεταξύ τους λόγο τετράγωνου αριθμού προς τετράγωνο αριθμό, δεν θα έχουν ούτε τις πλευρές μήκει σύμμετρες.[97]

Τώρα, η απόδειξη του Ευκλείδη εκτυλίσσεται ως ακολούθως: Κατ' αρχάς, εάν οι A και B είναι μήκει σύμμετρες, τότε η A θα έχει προς τη B λόγο αριθμού προς αριθμό (λόγω της X.5). Έστω ότι αυτός ο λόγος είναι ίσος με τον λόγο του Γ προς τον Δ, δηλαδή, η A είναι προς τη B όπως ο Γ είναι προς τον Δ.



Αλλά το τετράγωνο από της A έχει προς το τετράγωνο από της B λόγο ο οποίος είναι «διπλασίων» του λόγου που έχει η A προς τη B, διότι τα όμοια σχήματα έχουν λόγο «διπλασίονα» του λόγου των ομόλογων πλευρών (λόγω του πορίσματος της πρότασης VI.20)· ο λόγος δε του τετραγώνου του Γ προς το τετράγωνο του Δ είναι «διπλασίων» του λόγου του Γ προς τον Δ, διότι μεταξύ δύο τετράγωνων αριθμών υπάρχει ένας μέσος ανάλογος και, από την VIII.11, ο τετράγωνος αριθμός έχει προς τον τετράγωνο αριθμό λόγο «διπλασίονα» αυτού που έχει η πλευρά προς την πλευρά. Συνεπώς, όπως το τετράγωνο από της A είναι προς το τετράγωνο από της B, έτσι και το τετράγωνο από τον Γ είναι προς το τετράγωνο από τον Δ.

Κατόπιν, ας υποθέσουμε ότι το τετράγωνο από της A είναι προς το τετράγω-

96. Αυτό προκύπτει από το σχόλιο στην πρόταση X.9 και από τα σχόλια του Πάππου στο δέκατο βιβλίο που διασώζονται στα αραβικά· πρβλ., ωστόσο, όσον αφορά την αξιοπιστία αυτών των πηγών, Á. Szabó, *ό.π.*, σ. 100-111.
97. *Στοιχεία*, 3, σ. 28.

νο από της B όπως το τετράγωνο του Γ είναι προς το τετράγωνο του Δ. Πρέπει να αποδείξουμε ότι η A είναι μήκει σύμμετρη με τη B.

Από την υπόθεση συνεπάγεται, λέει ο Ευκλείδης, ότι όπως η A είναι προς τη B έτσι και ο Γ είναι προς τον Δ.[98] Συνεπώς, η A έχει προς τη B λόγο αριθμού (Γ) προς αριθμό (Δ), δηλαδή, η A είναι μήκει σύμμετρη με τη B (λόγω της X.6).

Έστω τώρα ότι η A είναι μήκει ασύμμετρη με τη B. (Η απόδειξη γίνεται διά τής εις άτοπον απαγωγής.) Εάν το τετράγωνο από της A έχει προς το τετράγωνο από της B λόγο τετράγωνου αριθμού προς τετράγωνο αριθμού, τότε, από το αμέσως προηγούμενο, θα προέκυπτε ότι η A είναι μήκει *σύμμετρη* με τη B, το οποίο δεν ισχύει· επομένως το τετράγωνο από της A δεν μπορεί να έχει προς το τετράγωνο από της B λόγο τετράγωνου αριθμού προς τετράγωνο αριθμού.

Υποθέτουμε τώρα ότι το τετράγωνο από της A *δεν έχει* προς το τετράγωνο από της B λόγο τετράγωνου αριθμού προς τετράγωνο αριθμό. Αν η A ήταν μήκει σύμμετρη με τη B, τότε, από τα προηγούμενα, το τετράγωνο από της A θα έπρεπε να έχει προς το τετράγωνο από της B λόγο τετράγωνου αριθμού προς τετράγωνο αριθμό, πράγμα που δεν ισχύει· επομένως, η A δεν είναι μήκει σύμμετρη με τη B, ο.έ.δ.[99]

Τί γίνεται αυτό το θεώρημα όταν κάποιος πετάξει μακριά το ατημέλητο γεωμετρικό ένδυμα το οποίο μόλις και μετά βίας καλύπτει την αλγεβρική του γύμνια ..., προκειμένου να αποκαλυφθούν τα κρυφά κάλλη του τελευταίου;

Εάν A, B είναι ευθείες και Γ, Δ είναι αριθμοί, τότε αν $A/B = \Gamma/\Delta$, $A^2/B^2 = \Gamma^2/\Delta^2$ και αντιστρόφως. Αυτό είναι όλο! *Αυτό* είναι εκείνο που λέει ο Ευκλείδης; Αυτό είναι εκείνο που κρύβει με το ατημέλητο γεωμετρικό ένδυμα για να μην το βλέπουμε; Αν πίστευε κανείς τους οπαδούς της «γεωμετρικής άλγεβρας», η απάντηση σε αυτά τα ερωτήματα θα έπρεπε να είναι ένα απερίφραστο *ναι*. Και όμως, οι σοβαρότατες αδυναμίες μιας τέτοιας ερμηνείας, ισχυρίζομαι, είναι στην προκειμένη περίπτωση αυταπόδεικτες. Ακόμη και ο Heath, σχολιάζοντας αυτήν την πρόταση, λέει:

> Αυτός ο συμπερασμός, ο οποίος φαίνεται τόσο εύκολος όταν ... διατυπωθεί συμβολικά, δεν ήταν καθόλου εύκολος για τον Ευκλείδη, εξαιτίας του γεγονότος ότι $\underline{a}$, $\underline{b}$ είναι ευθείες, ενώ $\underline{m}$, $\underline{n}$ αριθμοί.[100] Οφείλει να περάσει από το $\underline{a}:\underline{b}$ στο $a^2:b^2$ διά του «διπλασίονος» λόγου, μέσω του πορίσματος τής VI.20· το τετράγωνο από της $\underline{a}$ είναι προς το τετράγωνο από της $\underline{b}$ σε διπλασίονα λόγο των πλευρών $\underline{a}$, $\underline{b}$. Από την άλλη πλευρά, καθώς οι $\underline{m}$, $\underline{n}$ είναι αριθμοί, η πρόταση που πρέπει να χρησιμοποιηθεί για να αποδειχθεί ότι ο $\underline{m}^2:\underline{n}^2$ είναι «διπλασίων» λόγος του $\underline{m}:\underline{n}$ είναι η VIII.11.[101]

98. Παρεμπιπτόντως, ο Ευκλείδης το δέχεται αυτό ὡς δεδομένο, δηλαδή χωρίς λόγια, υποθέτει ότι οι λόγοι των οποίων οι «διπλασίονες» είναι ίσοι είναι και αυτοί ίσοι· το αντίστροφο αυτής της παραδοχής είχε χρησιμοποιηθεί σε προηγούμενο στάδιο της απόδειξης.

99. *Ό.π.*, σ. 28-30. Υπάρχει ένα πόρισμα (και ένα λήμμα) μετά από αυτήν την πρόταση, τα οποία δεν μας ενδιαφέρουν εδώ.

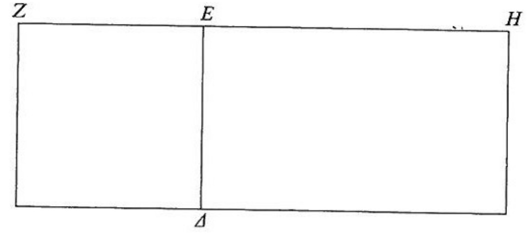
100. Αυτός είναι ο τρόπος που μεταγράφει ο Heath τη διατύπωση του Ευκλείδη: «Εάν a, b είναι ευθείες και $a:b = m:n$, όπου m, n είναι αριθμοί, τότε $a^2:b^2 = m^2:n^2$ και αντιστρόφως» (*ό.π.*, σ. 30).

Αυτό που λέει ο Heath αποτελεί, ουσιαστικά, μια ακούσια ομολογία της ανιστορικότητας που ενυπάρχει στην ίδια τη ρίζα της έννοιας της «γεωμετρικής άλγεβρας» (η οποία, παρεμπιπτόντως, δεν απέτρεψε τον Sir Thomas από το να χρησιμοποιεί αδιακρίτως σύγχρονο συμβολισμό στο ίδιο αυτό σχόλιο, λίγες παραγράφους μετά το ως άνω παράθεμα)![102]

Δεν θα επιμείνω άλλο σε αυτό το σημείο. Ας προχωρήσουμε τώρα σε μερικά άλλα παραδείγματα επιλεγμένα από το δέκατο βιβλίο. Στο λήμμα που προηγείται της πρότασης X.22 αναφέρεται ότι:

> Εάν υπάρχουν δύο ευθείες, τότε, όπως η πρώτη είναι προς τη δεύτερη, έτσι και το τετράγωνο από της πρώτης είναι προς το ορθογώνιο που περιέχεται από τις δύο ευθείες.[103]

Ο Ευκλείδης το αποδεικνύει αυτό με τον ακόλουθο τρόπο:



Εάν ZE και EH είναι δύο ευθείες, όπως η ZE είναι προς την EH έτσι το τετράγωνο από της ZE είναι προς το ορθογώνιο ZE, EH. Ας αναγραφεί από της ZE το τετράγωνο $Z\Delta$ και ας συμπληρωθεί το $H\Delta$. Από την VI.1 συνεπάγεται ότι όπως η ZE είναι προς την EH έτσι και το $Z\Delta$ είναι προς το $H\Delta$. Αλλά $Z\Delta$ είναι το τετράγωνο από της ZE και $H\Delta$ το ορθογώνιο HE, ΔE, δηλαδή το ορθογώνιο HE, ZE. Επομένως, όπως η ZE είναι προς την EH έτσι και το τετράγωνο από της ZE είναι προς το ορθογώνιο ZE, HE. Ομοίως, συνεχίζει ο Ευ-

101. *Ό.π.*, σ. 31.

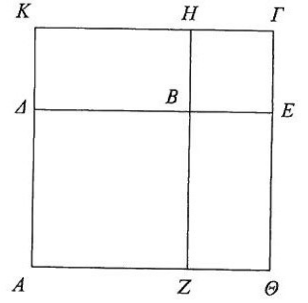
102. *Ό.π.*

103. *Ό.π.*, σ. 50.

κλείδης, όπως το ορθογώνιο HE, ZE είναι προς το τετράγωνο ZE, δηλαδή όπως το $H\Delta$ προς το $Z\Delta$, έτσι η HE είναι προς την EZ, ο.έ.δ.[104]

Ας συγκρίνουμε την παραπάνω απόδειξη με το αλγεβρικό περιεχόμενο του λήμματος, το οποίο λέει ότι $a/b = a^2/ab$. Στην αλγεβρική του μορφή, το τετριμμένο του όλου εγχειρήματος είναι πασίδηλο. Το λήμμα μετατρέπεται σε κενή περιεχομένου, ανούσια, κοινότοπη παρουσίαση της απλοποίησης κλασμάτων!

Μία παρόμοια περίπτωση είναι το λήμμα που έπεται της πρότασης X.53. Σε αυτό ο Ευκλείδης αποδεικνύει ότι αν AB, $B\Gamma$ είναι δύο τετράγωνα τοποθετημένα όπως στο συνοδευτικό διάγραμμα, και αν συμπληρώσουμε το παραλληλόγραμμο $A\Gamma$, τότε το $A\Gamma$ είναι τετράγωνο, το ΔH είναι μέσο ανάλογο των AB, $B\Gamma$ και, τέλος, το $\Delta\Gamma$ είναι μέσο ανάλογο των $A\Gamma$, ΓB.[105]



Η απόδειξη του Ευκλείδη περιλαμβάνει τα ακόλουθα βήματα:

$$\Delta B = BZ$$
$$BE = BH$$
$$\text{Άρα } \Delta E = ZH.$$

Αλλά $\Delta E = A\Theta = K\Gamma$ και $ZH = AK = \Theta\Gamma$, λόγω της I.34.

Άρα $A\Theta = K\Gamma = AK = \Theta\Gamma$, οπότε το παραλληλόγραμμο $A\Gamma$ είναι ισόπλευρο. Είναι επίσης και ορθογώνιο· επομένως είναι τετράγωνο.

Τώρα, επειδή όπως είναι η ZB προς τη BH έτσι είναι και η ΔB προς τη BE και (λόγω της VI.1)

όπως είναι η ZB προς τη BH έτσι είναι το AB προς το ΔH, και
όπως είναι η ΔB προς τη BE έτσι είναι το ΔH προς το $B\Gamma$,

έπεται ότι όπως είναι το AB προς το ΔH έτσι είναι το ΔH προς το $B\Gamma$ (λόγω της V.11). Συνεπώς, το ΔH είναι μέσο ανάλογο των AB και $B\Gamma$.

Εν συνεχεία, επειδή όπως είναι η $A\Delta$ προς τη ΔK έτσι είναι η KH προς την

104. Ό.π., σ. 50-51.
105. Ό.π., σ. 115.

$H\Gamma$ (επειδή είναι αντιστοίχως ίσες) και «συντεθέντι», όπως είναι η AK προς την $K\Delta$ έτσι είναι η $K\Gamma$ προς τη ΓH (λόγω της V.18), ενώ, λόγω της VI.1,

όπως είναι η AK προς την $K\Delta$ έτσι είναι το $A\Gamma$ προς το $\Gamma\Delta$, και
όπως είναι η $K\Gamma$ προς τη ΓH έτσι είναι το $\Delta\Gamma$ προς το $B\Gamma$,

έπεται ότι όπως είναι το $A\Gamma$ προς το $\Delta\Gamma$ έτσι είναι το $\Delta\Gamma$ προς το $B\Gamma$ (λόγω της V.11), δηλαδή το $\Delta\Gamma$ είναι μέσο ανάλογο των $A\Gamma$ και $B\Gamma$, ο.έ.δ.[106]

Με αλγεβρικούς συμβολισμούς, αυτό το λήμμα υποστηρίζει ότι:

$$x^2/xy = xy/y^2 \text{ και } (x+y)^2/(x+y)y = (x+y)y/y^2.$$

Αυτό δεν είναι μόνο ένα θαυμάσιο παράδειγμα των ανεπαρκειών που ενέχει η μεταγραφή των γεωμετρικών προτάσεων σε αλγεβρικό συμβολισμό, που μετασχηματίζει και πάλι μια μάλλον περίπλοκη –αν και στρωτή– πρόταση σε ένα τετριμμένο ζήτημα απλοποίησης κλασμάτων, αλλά, και αυτό είναι πιο σημαντικό, το πρώτο μισό της πρότασης αποτελεί *καταφανώς* (όταν διατυπωθεί αλγεβρικά) επανάληψη ενός αποτελέσματος που είχε ήδη αποδειχθεί από τον Ευκλείδη στην πορεία της απόδειξης της X.25![107] Προβληματισμένος σχετικά με αυτό, ο Heath αφήνει να εννοηθεί ότι το λήμμα μπορεί να μην είναι γνήσιο! ...[108] Πίσω από την πλάτη της «γεωμετρικής άλγεβρας» παραμονεύουν μερικοί πραγματικοί κίνδυνοι ...

Περνώντας τώρα σε πιο πολύπλοκες προτάσεις, ας μου επιτραπεί να μνημονεύσω –χωρίς να αναπαραγάγω την απόδειξη, η οποία είναι εκτενής και αρκετά δύσκολη– την πρόταση X.92. Η διατύπωση του Ευκλείδη έχει ως εξής:

Εάν ένα χωρίο περιέχεται από ρητή ευθεία και από δεύτερη αποτομή, η «πλευρά» του χωρίου είναι πρώτη αποτομή μιας μέσης ευθείας.[109]

106. Ό.π., σ. 115-116.
107. Πρβλ. ό.π., σ. 56-57, ιδίως την αρχή της σ. 57.
108. Ό.π., σ. 116.
109. Ό.π., σ. 194. Για να μπορέσει ο αναγνώστης να συλλάβει το νόημα της πρότασης και, ταυτόχρονα, να σχηματίσει μια ιδέα της περιπλοκότητάς της, θα δώσω τους ορισμούς των κρίσιμων εννοιών που εμφανίζονται σε αυτήν: *Αποτομή* είναι μια άρρητη ευθεία που λαμβάνεται όταν αφαιρεθεί από μια ρητή ευθεία μια άλλη ρητή ευθεία, όταν οι δύο ρητές ευθείες είναι δυνάμει σύμμετρες μόνο.

Προσαρμόζουσα είναι η ευθεία η οποία, όταν προστεθεί σε μια συγκείμενη άρρητη ευθεία που έχει ληφθεί με αφαίρεση (όπως η αποτομή), παράγει τον μεγαλύτερο όρο, δηλαδή *προσαρμόζουσα* είναι ο αρνητικός όρος σε μια αποτομή.

Δεύτερη αποτομή είναι μια αποτομή που έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά: Δεδομένης μιας ρητής ευθείας και μιας αποτομής, αν το τετράγωνο από της όλης είναι μεγαλύτερο του τετραγώνου από της προσαρμόζουσας κατά το τετράγωνο μιας ευθείας μήκει σύμμετρης με την όλη, και η προσαρμόζουσα είναι μήκει σύμμετρη με τη δοθείσα ρητή ευθεία, η αποτομή καλείται *δεύτερη αποτομή*.

Η απόδειξη του Ευκλείδη είναι, ως συνήθως, *καθαρώς*, γεωμετρικού χαρακτήρα (βασιζόμενη σε *δύο* διαγράμματα και σε *πολλές* προηγούμενες προτάσεις) και στην πορεία της ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί τη μέθοδο της παραβολής χωρίων και τη θεωρία των αναλογιών του Ευδόξου που αναπτύσσεται στο πέμπτο βιβλίο.[110] Είναι σαφές ότι δεν γίνεται, και δεν θα μπορούσε να γίνει, κανένας λόγος για «εξισώσεις», «τετραγωνικές ρίζες» κ.λπ., και δεν χρησιμοποιείται κανένας απολύτως αλγεβρικός συμβολισμός. Και όμως ο Heath, στο εκτεταμένο του σχόλιο,[111] αρχίζει λέγοντας:

Αυτή η πρόταση ισοδυναμεί με την εύρεση και ταξινόμηση τού

$$\sqrt{\rho(\frac{k\rho}{\sqrt{1-\lambda^2}}-k\rho)}.$$

Η μέθοδος είναι η ίδια με αυτήν της τελευταίας πρότασης. Ο Ευκλείδης λύνει, κατ' αρχάς, τις εξισώσεις

$$u+v=\frac{k\rho}{\sqrt{1-\lambda^2}},\quad uv=\frac{1}{4}k^2\rho^2. \tag{1}$$

Κατόπιν, χρησιμοποιώντας τις τιμές των u, v που βρήκε, θέτει

$$x^2=\rho u \quad \text{και} \quad y^2=\rho v \tag{2}$$

και $(x-y)$ είναι η ζητούμενη τετραγωνική ρίζα.[112]

Μεγαλύτερη διαφορά ανάμεσα σε εκείνα που ο Ευκλείδης κάνει και σε αυτά που ο Heath «μεταφράζει» είναι πράγματι δύσκολο να βρούμε, αν και, από την άποψη των σύγχρονων Μαθηματικών, αυτά που κάνει ο Heath είναι σωστά και οι δύο τρόποι προσέγγισης της πρότασης είναι μαθηματικώς ισοδύναμοι. Ιστορικώς, όμως, το χάσμα ανάμεσα στον *τρόπο* του Ευκλείδη και στον *τρόπο* του Heath είναι αγεφύρωτο! Η μέθοδος του Sir Thomas είναι, νομίζω, ένα λαμπρό παράδειγμα αυτού που θα πρέπει να εννοούσαν οι Ιταλοί όταν διατύπωσαν τη φράση «traduttore traditore!» [ο μεταφραστής είναι προδότης!].

Μέση ευθεία είναι η μέση ανάλογος δύο ρητών ευθειών οι οποίες είναι δυνάμει σύμμετρες μόνο.

Πρώτη αποτομή μιας μέσης ευθείας είναι μια άρρητη ευθεία που λαμβάνεται όταν αφαιρεθεί από μια μέση ευθεία μια άλλη μέση ευθεία δυνάμει μόνον σύμμετρη με την πρώτη και η οποία περιέχει με εκείνην ένα ρητό ορθογώνιο.

110. *Ό.π.*, σ. 194-197.
111. *Ό.π.*, σ. 197-198.
112. *Ό.π.*

Ας μου επιτραπεί να αναφέρω, όση αξία και αν έχει η πληροφορία, ότι σε ένα μεταπτυχιακό σεμινάριο για τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη οι φοιτητές και εγώ βρήκαμε ότι μία από τις μεγαλύτερες δυσκολίες για τη μελέτη και κατανόηση του δέκατου βιβλίου -το οποίο κατά κανόνα θεωρείται από τους ιστορικούς των Μαθηματικών ως ένα από τα πιο δύσκολα αν όχι *το* πιο δύσκολο από τα *Στοιχεία* στην ολότητά τους– έγκειται στη σύγχρονη ερμηνεία του από τον Heath και στις επικίνδυνες ασκήσεις διανοητικής ισορροπίας που απαιτούνται προκειμένου να εναρμονίζεται κανείς συνεχώς ανάμεσα σε δύο ασύμμετρους τρόπους του σκέπτεσθαι, καθώς μεταβαίνει από τον Ευκλείδη στον Heath και αντιστρόφως. Για να διαβάσει κανείς το δέκατο βιβλίο *χωρίς* να φορεί σύγχρονα γυαλιά, θα έπρεπε να αφαιρέσει το βάρος που δημιουργεί ένα τέτοιο εγχείρημα. Μια καλή έκδοση για αυτόν τον σκοπό είναι η έκδοση των *Στοιχείων* στη σειρά Great Books of the Western World, που περιέχει την μετάφραση του Heath χωρίς τα σχόλιά του!...

Δεν θα καταπονήσω την υπομονή του αναγνώστη με πολλά ακόμη παραδείγματα σαν αυτά που μόλις διερεύνησα. Ας μου επιτραπεί μόνο να σημειώσω ότι θαυμάσια παραδείγματα της ιστορικής ασυμβατότητας ανάμεσα στη *γεωμετρία* του Ευκλείδη και στην *άλγεβρα* του Heath αποτελούν οι προτάσεις X.100, X.101, X.102 και X.103.[113]

Θα ήθελα τώρα να επιστήσω την προσοχή του αναγνώστη σε μια ακολουθία τριών διαδοχικών προτάσεων του δέκατου βιβλίου,[114] συγκεκριμένα στις προτάσεις 112, 113 και 114, οι οποίες, κατά τη γνώμη μου, δείχνουν πέραν κάθε λογικής αμφιβολίας ότι εκείνο που κάνει ο Ευκλείδης *δεν είναι* άλγεβρα αλλά γεωμετρία. Όλες αυτές οι προτάσεις είναι μακροσκελείς και (σχετικά) περίπλοκες και δεν προτίθεμαι εδώ να παραθέσω τις αποδείξεις τους (για προφανείς λόγους). Πρέπει, εν τούτοις, να αναπαραγάγω τις διατυπώσεις, ούτως ώστε ο αναγνώστης να μπορεί να «έχει μια γεύση» των ιδεών του Ευκλείδη και, έτσι, να καταλάβει καλύτερα την άποψή μου.

Πρόταση X.112

Εάν το τετράγωνο από μιας ρητής ευθείας παραβληθεί σε μια διώνυμη ευθεία[115] παράγει ως πλάτος μια αποτομή οι όροι της οποίας είναι σύμμετροι με τους όρους της διωνύμου και επί πλέον έχουν τον αυτό λόγο· και επί πλέον η αποτομή που προκύπτει κατ' αυτόν τον τρόπο θα έχει την ίδια τάξη όπως η διώνυμη ευθεία.[116]

113. *Ό.π.*, σ. 221-231.
114. *Ό.π.*, σ. 243-253.
115. *Διώνυμη* ευθεία είναι μια άρρητη ευθεία που λαμβάνεται όταν προστεθούν δύο ρητές ευθείες οι οποίες είναι δυνάμει σύμμετρες μόνο.
116. *Ό.π.*, σ. 243.

Πρόταση Χ.113

Εάν το τετράγωνο από μιας ρητής ευθείας παραβληθεί σε μια αποτομή παράγει ως πλάτος τη διώνυμη ευθεία οι όροι της οποίας είναι σύμμετροι με τους όρους της αποτομής και με τον ίδιο λόγο· και επί πλέον η διώνυμη που προκύπτει κατ' αυτόν τον τρόπο έχει την ίδια τάξη όπως η αποτομή.[117]

Πρόταση Χ.114

Εάν ένα χωρίο περιέχεται από μια αποτομή και μια διώνυμη ευθεία οι όροι της οποίας είναι σύμμετροι με τους όρους της αποτομής και με τον αυτό λόγο, η «πλευρά» του χωρίου είναι ρητή.[118]

Είναι εύκολο σε μας να διακρίνουμε την πλήρη συμμετρία αυτών των τριών διατυπώσεων. Δεν υπάρχει, όμως, συμμετρία (και αυτό είναι ύψιστης σημασίας) στις τρεις αποδείξεις. Για τη Χ.112 ο Heath λέει ότι «... είναι ισοδύναμη με τον μετασχηματισμό σε ρητούς των παρονομαστών των κλασμάτων $\frac{c^2}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$, $\frac{c^2}{a+\sqrt{B}}$, όταν πολλαπλασιασθεί ο αριθμητής και ο παρονομαστής με $\sqrt{A}-\sqrt{B}$ και $a-\sqrt{B}$, αντίστοιχα [!]».[119] Ο Heath συνεχίζει λέγοντας ότι «ο Ευκλείδης αποδεικνύει ότι $\frac{\sigma^2}{\rho+\sqrt{k}\rho} = \lambda\rho - \sqrt{k}\cdot\lambda\rho$ $(k<1)$, και η μέθοδός του μας επιτρέπει να δούμε ότι $\lambda = \frac{\sigma^2}{\rho^2 - k\rho^2}$».[120] Συνεχίζοντας το σχόλιό του, ο Heath θεωρεί βέβαιο ότι «... οι αρχαίοι Έλληνες πρέπει να είχαν ένα είδος αναλυτικής μεθόδου η οποία τούς ενέπνεε τα βήματα που έπρεπε να ακολουθήσουν σε τέτοιες αποδείξεις»»[121] είναι μια δήλωση η βαρύτητα της οποίας φαίνεται να εντοπίζεται στο ότι ο χαρακτηρισμός «αναλυτική» χρησιμοποιείται εδώ ως συνώνυμο της «αλγεβρικής».[122]

117. *Ό.π.*, σ. 248.
118. *Ό.π.*, σ. 252.
119. *Ό.π.*, σ. 246. Πράγματι, πολύ «πιστή» μετάφραση!
120. *Ό.π.*
121. *Ό.π.*
122. Για την «αυθεντική» ανάλυση των αρχαίων Ελλήνων βλ. R. Robinson: «Analysis in Greek Geometry», *Mind*, νέα σειρά, 45 (1936), σ. 464-473» και M. Mahoney: «Another Look at Greek Geometrical Analysis» (πλήρη στοιχεία στην υποσημ. 26, προηγουμένως). Το άρθρο του Mahoney στην ολότητά του είναι (όπως και οι άλλες μελέτες του) ευφυές, οξυδερκές και διορατικό. Όσον αφορά, όμως, τη στάση του απέναντι στη «γεωμετρική άλγεβρα», αυτές οι ιδιότητες απουσιάζουν. Γράφει, παραδείγματος χάριν: «Όπως παρουσιάζονται όμως στα *Δεδομένα*, τα θεωρήματα που ανήκουν στη γεωμετρική άλγεβρα είναι δύστροπα [;], καθώς περιλαμβάνουν την περίπλοκη κατασκευή των επίπεδων σχημάτων. Οι επαγγελματίες μαθηματικοί χρησιμοποίησαν μια απλούστερη μορφή γεωμετρικής άλγεβρας, μία άλγεβρα των μηκών ευθύγραμμων τμημάτων ... Αν και αυτό είναι ένα παράδειγμα της θεωρητικής μάλλον παρά της προβληματικής ανάλυσης, η ανάλυση της πρότασης XIII.1 του Ευκλείδη ... αποτελεί παράδειγμα της απλοποιημένης άλγεβρας των μηκών ευθύγραμμων τμημάτων ...» (*ό.π.*, σ. 331, η υπογράμμιση δική μου).

Υπάρχει πουθενά κάποια συγκεκριμένη, σαφής απόδειξη για τη χρήση «γεωμετρικής άλγεβρας» στην προ-ευκλείδεια ή ακόμη και στην ευκλείδεια περίοδο; *Πουθενά*! Η αναφορά στην προσθήκη του σχολιαστή στην XIII.1 δεν αποτελεί επιχείρημα, κατά τη γνώμη μου, διότι η ακριβής χρονολογία της παρεμβολής είναι άγνωστη· επίσης, μία από τις λίγες θετικές δηλώσεις που μπορεί να κάνει κανείς σχετικά με αυτήν την παρεμβολή (και με άλλες) είναι ότι είναι *πλαστή* ή, όπως το έθεσε ο Heath «... εντελώς ξένη προς τους σκοπούς και το στυλ των *Στοιχείων*» (*Στοιχεία*, 3, σ. 442). Ίσως η παρεμβολή να έγινε ακόμη και 500 χρόνια μετά τη συγγραφή των *Στοιχείων* (ο Heath αναφέρει ότι οι παρεμβολές στο σύνολο των XIII.1-5 «... έγιναν πριν από την εποχή του Θέωνος ...» (*ό.π.*) – δηλαδή πριν από τον τέταρτο μ.Χ. αιώνα) και η μέθοδος απόδειξης είναι εντελώς ξένη προς τα κλασικά ελληνικά Μαθηματικά. Δεν υπάρχει ούτε ίχνος αξιόπιστης ιστορικής μαρτυρίας που να συνηγορεί υπέρ των θεωριών των Breitschneider, Heiberg, κ.ά. ότι αυτή η μέθοδος αντιπροσωπεύει «... ένα κατάλοιπο των αναλυτικών ερευνών του Θεαιτήτου ή του Ευδόξου ...» (*ό.π.*)· πράγματι, όλη η ιστορία των ελληνικών Μαθηματικών φαίνεται να αποκλείει την εξαγωγή ενός τέτοιου συμπεράσματος. Αλλά ακόμη και αν πιστέψει κανείς τη μεταγενέστερη χρονολόγηση του Heiberg (στο «Paralipomena zu Euklid», *Hermes*, 38 (1903), σ. 46-74, 161-201, 321-356), δηλαδή ότι ο συγγραφέας αυτών των παρεμβολών είναι ο Ήρων ο Αλεξανδρεύς, αυτό θα καθιστούσε τις εν λόγω προσθήκες σχεδόν 400 χρόνια νεότερες του Ευκλείδη και θα τις τοποθετούσε άνετα (με εξαίρεση τον Πάππο και τον Διόφαντο) *μετά* την παρακμή των κλασικών ελληνικών Μαθηματικών.

Ο Mahoney κάνει επίσης λόγο για την «... αυξανόμενη χρήση μιας άτυπης, αλλά επιδέξιας και οξυδερκούς *άλγεβρας των μηκών ευθύγραμμων τμημάτων* ...» (*ό.π.*, σ. 337, η υπογράμμιση δική μου) στα έργα των μεταγενέστερων του Ευκλείδη μαθηματικών του 3ου αιώνα, του Απολλωνίου και του Αρχιμήδη. Συνεχίζει κατόπιν λέγοντας ότι «ο Αρχιμήδης αποτελεί ένα παράδειγμα αυτής της ανάλυσης» (*ό.π.*). Η παραπομπή του, όμως, στην πρόταση ΙΙ.1 τού *Περί σφαίρας και κυλίνδρου* δεν δικαιολογεί κανέναν υπαινιγμό ώστε η απόδειξη του Αρχιμήδη να θεωρηθεί ως «άλγεβρα των μηκών ευθύγραμμων τμημάτων». (Πρβλ. J.L. Heiberg, επιμ.: *Archimedes Opera Omnia*, 2η έκδ. (Leiprig: Teubner, 1910) 1, σ. 170-174.) Η απόδειξη είναι και πάλι ουσιωδώς γεωμετρική, μέσα στο πλαίσιο της μεγάλης παράδοσης των *Στοιχείων* του Ευκλείδη! Ο Mahoney, τότε, προχωρεί προκειμένου να δώσει ένα λεπτομερές παράδειγμα της «... ελληνικής γεωμετρικής ανάλυσης στην πράξη, *όπου προβαίνει κανείς με έναν οιονεί αλγεβρικό χειρισμό των μηκών ευθύγραμμων τμημάτων* ...» (*ό.π.*, η υπογράμμιση δική μου). Το παράδειγμα που επέλεξε είναι η πρόταση ΙΙ.4 τού *Περί σφαίρας και κυλίνδρου* του Αρχιμήδη. Εν τούτοις, πρέπει να πω πως δεν με έπεισε. Και πάλι, αυτό που κάνει ο Αρχιμήδης στη ΙΙ.4 τού *Περί σφαίρας και κυλίνδρου* μοιάζει πολύ με αυτό που κάνει ο Ευκλείδης στα *Στοιχεία* (αν και υπάρχουν εμφανώς διαφορές, μερικές από τις οποίες έχουν να κάνουν με έναν πιο ελεύθερο χειρισμό των γραμμών· είναι ενδιαφέρον, ωστόσο, ότι και στα δύο παραδείγματα που δίνει ο Mahoney τα μήκη των ευθύγραμμων τμημάτων *συνδέονται στενά με σχήματα δύο ή τριών διαστάσεων*!)· δεν μπορώ να φανταστώ πώς κάποιος, το μυαλό του οποίου δεν έχει «διαφθαρεί» από τον αλγεβρικό συλλογισμό και τους αλγεβρικούς χειρισμούς, μπορεί να περιγράψει την απόδειξη του Αρχιμήδη ως «οιονεί αλγεβρικό χειρισμό των μηκών ευθύγραμμων τμημάτων», αν και, ομολογουμένως, αυτή η ονομασία είναι λιγότερο απεχθής από ό,τι η «γεωμετρική άλγεβρα».

Τώρα πιστεύω ότι αυτό δεν είναι καθόλου βέβαιο. Είναι βέβαιο μόνον (και δεν αναφέρομαι ειδικά στον Heath, η σοβαρή επιστημονική συμβολή του οποίου στην ιστορία των Μαθηματικών είναι απολύτως αποδεδειγμένη) για κάποιον ο οποίος έχει γίνει υπερόπτης έναντι του παρελθόντος και, κατά συνέπεια, δεν μπορεί να σκεφθεί, όταν έχει να κάνει με περίπλοκα γεωμετρικά ερωτήματα, με άλλον τρόπο παρά μόνο με αναλυτικούς όρους. Με άλλα λόγια, είναι βέβαιο για κάποιον ο οποίος ξέρει πώς να υπερβαίνει γεωμετρικές δυσκολίες μεταφράζοντάς τις σε αναλυτικούς όρους. Εκείνο που λέω είναι ότι εάν *εμείς* δεν βλέπουμε κάποιον άλλο τρόπο, αυτό *δεν* σημαίνει ότι και οι αρχαίοι Έλληνες, οι οποίοι δεν είχαν προφανώς στη διάθεσή τους την οικεία σε εμάς

Μία ακόμη παρατήρηση. Μιλώντας για τα *Πορίσματα* του Ευκλείδη, ο Mahoney αναφέρει ότι αντιπροσωπεύουν «... το καλύτερο παράδειγμα του είδους των πραγματειών που περιλαμβάνονταν στον *Αναλυόμενο Τόπο*. Διαφωτίζουν επίσης πολύ καλά την παρατήρηση του Tannery ότι αυτό που έλειπε από τους αρχαίους Έλληνες δεν ήταν τόσο οι μέθοδοι αλλά η γλώσσα για να τις εκφράζουν» (*ό.π.*, σ. 343-344). Υπάρχει άλλη μία εγκωμιαστική αναφορά στα λεγόμενα του Tannery, στο τέλος του άρθρου. Σύμφωνα με τον Mahoney, τα *Πορίσματα* καταδεικνύουν «... γιατί η έλλειψη ενός κατάλληλου τρόπου έκθεσης –όπως είναι η συμβολική άλγεβρα– εμπόδισε τους Έλληνες από το να προχωρήσουν τη γεωμετρική ανάλυση περισσότερο και να μπορέσουν να εκφράσουν σαφώς αυτό που είχαν επιτύχει [!]. Στο πεδίο της γεωμετρικής ανάλυσης ειδικότερα, η παρατήρηση του Tannery διατηρεί όλη την ισχύ της· από τους Έλληνες δεν έλειπαν τόσο πολύ οι μαθηματικές μέθοδοι όσο οι τρόποι να τις εκφράσουν» (*ό.π.*, σ. 348). Εν τέλει, το επιμύθιο του άρθρου του Mahoney είναι, για μία ακόμη φορά, η ίδια η αυθεντική ρήση του Tannery: «Ce qui manque aux mathématiciens grecques [sic] ce sont moins les méthodes ... que les formules propres à l'exposition des méthodes» (*ό.π.*, σ. 318). Ο Mahoney δεν είναι ο μόνος που επαινεί αυτή την περίφημη «αερολογία» του Tannery· το ίδιο έκαναν οι Zeuthen, Heath κ.ά. Και όμως, αυτή η περίφημη ρήση δεν είναι μήπως μια ακούσια ομολογία ότι η «γεωμετρική άλγεβρα» είναι μία ολέθρια και ιστορικά καταδικασμένη εκ γενετής έννοια για να τη χρησιμοποιήσει κανείς; Επίσης, δεν είναι παράλογο να μιλούμε για *μεθόδους* όταν απουσιάζουν *τα μέσα για να τις εκφράσεις*, δηλαδή *για να τις χρησιμοποιήσεις*; Πώς μπορεί να χρησιμοποιήσει κανείς μια μέθοδο η οποία de facto δεν μπορεί να εκφραστεί, την οποία δηλαδή δεν μπορεί καν να διανοηθεί; Μέσα στα δεδομένα όρια συνοχής ενός μαθηματικού πολιτισμού, οι διαθέσιμες σε αυτόν τον πολιτισμό μέθοδοι είναι ακριβώς εκείνες μέσω των οποίων ο πολιτισμός επιτυγχάνει και *εκφράζει* τα μαθηματικά του επιτεύγματα. Και οι μέθοδοι περιλαμβάνονται ανάμεσα στα απτά προϊόντα του κάθε μαθηματικού πολιτισμού. Εν τη απουσία ειδικών πραγματειών για τη μεθοδολογία των Μαθηματικών, οι μέθοδοι είναι εκείνες που έχουν ενσωματωθεί και εμφανίζονται στα πραγματικά έργα που έχει στη διάθεσή του ο ιστορικός. Το ερώτημα είναι, πράγματι, πολύ απλό: Μέχρι ποιο σημείο κατέχει κανείς τη μέθοδο όταν δεν έχει τα μέσα να την θέσει σε χρήση; Και η απάντηση μού φαίνεται ότι είναι προφανής. Οι συνέπειες τού «Για ό,τι δεν μπορεί κανείς να ομιλήσει, πρέπει να σιωπά» δεν είναι μόνο παραινετικές και κανονιστικές· είναι επίσης, τηρουμένων των αναλογιών, μια σωστή περιγραφή του *ιστορικού* σταδίου στο οποίο βρίσκονται τα πράγματα στην πνευματική ιστορία: «Για ό,τι δεν μπορεί κανείς να ομιλήσει, σιωπά». Αν ένας πολιτισμός (οποιοσδήποτε πολιτισμός) δεν μπορεί να μιλήσει *δεν* μιλάει. Παραμένει σιωπηλός. Και, ασφαλώς, δεν κρύβει τις αδυναμίες του. Μέρος της άγνοιας για κάτι είναι η άγνοια της άγνοιάς σου. Εάν ξέρεις ότι έχεις άγνοια, η άγνοιά σου *με την αυστηρή σημασία της λέξης* έχει παύσει. Και οι αρχαίοι Έλληνες, σαφώς, δεν ήξεραν ότι δεν ξέρουν άλγεβρα. Επομένως δεν έκρυβαν την άγνοιά τους πίσω από ένα γεωμετρικό παραπέτασμα. Δεν υπάρχει τίποτε που να παραμονεύει στα κρυφά πίσω από την ελληνική γεωμετρία.

άλγεβρα, δεν έβλεπαν ούτε εκείνοι. Έτσι, οι αρχαίοι Έλληνες *δεν* χρησιμοποιούσαν «... τη γεωμετρία ως ισοδύναμο της οικείας σε εμάς άλγεβρας» –αυτό είναι μια τρέλα του εικοστού αιώνα, με τα δικά του μεγάλα επιτεύγματα, και βεβαίως είναι αναχρονιστικό–, *χρησιμοποιούσαν γεωμετρία*. *Εμείς* είμαστε εκείνοι που χρησιμοποιούμε άλγεβρα, με αξιοσημείωτη επιδεξιότητα, πρέπει να ομολογήσω, ως ισοδύναμο της *δικής τους γεωμετρίας*!

Επίσης, για να πούμε τα πράγματα με το όνομά τους (και σε λιγότερο πολεμικό ύφος), αν οι *γραμμές* του Ευκλείδη ήταν *γενικά αλγεβρικά σύμβολα* (που δεν είναι), που θα μπορούσε να τις χειρίζεται κανείς σαν τέτοια σύμβολα, τότε η ουσία της πρότασης X.112 θα μπορούσε να εκφραστεί ως εξής: Αν $R^2 = B \cdot A$, όπου R ρητή ευθεία και B διώνυμη, τότε A είναι η αντίστοιχη αποτομή. Υπ' αυτές τις συνθήκες, η X.113 θα μπορούσε να προκύψει αμέσως και κατά τρόπο τετριμμένο από την X.112, ως αποτέλεσμα του ενιαίου των αλγεβρικών πράξεων και της μεταβατικότητας του πολλαπλασιασμού, αφού η X.113 δηλώνει μόνον ότι

> Εάν $R^2 = A \cdot B$, όπου R ρητή ευθεία και A αποτομή, τότε B είναι η αντίστοιχη διώνυμη.

Σε αυτό το υπόβαθρο, όλες οι προσπάθειες του Ευκλείδη να αποδείξει την X.113[123] θα ήταν μάταιες και, επομένως, ακατανόητες. Πράγματι, υπό αυτές τις συνθήκες, δεν θα χρειαζόταν καμία απόδειξη της X.113, η οποία θα μπορούσε να αποτελεί, *στην καλύτερη περίπτωση*, ένα πόρισμα[124] και όχι μια ανεξάρτητη πρόταση. Αλλά κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει, φυσικά, στα *Στοιχεία*, και το γεγονός αυτό επιβεβαιώνει κατά τη γνώμη μου θαυμάσια και επικυρώνει την άποψή μου: *η αρχαία ελληνική γεωμετρία είναι γεωμετρία*! Δεν είναι άλγεβρα (χωρίς χαρακτηρισμό), δηλαδή δεν είναι ούτε «γεωμετρική άλγεβρα», εφόσον ο όρος αυτός κατανοείται όπως παραδοσιακά έχει κατανοηθεί από την εποχή του Tannery και του Zeuthen.

Παρόμοια περίπτωση είναι, επίσης, η πρόταση X.114. Με τον ίδιο συμβολισμό που χρησιμοποίησα προηγουμένως, η πρόταση αυτή δηλώνει απλώς ότι

> Εάν $A \cdot B = R^2$, όπου A είναι αποτομή και B η αντίστοιχη διώνυμη, τότε η R είναι ρητή,

το οποίο και πάλι *από αλγεβρική άποψη* δεν είναι τίποτε άλλο παρά η X.112, ή, καλύτερα, η X.113 αναγινωσκόμενη, ούτως ειπείν, αντίστροφα. Αν στο πίσω μέρος του μυαλού του Ευκλείδη υπήρχε η άλγεβρα, τότε αυτός *δεν* θα ξόδευε

123. *Στοιχεία*, *ό.π.*, σ. 248-250.
124. Με τη συνήθη σημασία του όρου.

τόση διανοητική ενέργεια για να αποδείξει *τρεις φορές το ίδιο ακριβώς πράγμα*. Το συμπέρασμα είναι σαφές: Για τον Ευκλείδη, ο οποίος δεν σκεπτόταν αλγεβρικά, η τριάδα των προτάσεων που εξετάσαμε δεν αντιπροσωπεύει μία και την αυτή πρόταση· και, πράγματι, *από γεωμετρική άποψη* αυτές είναι διαφορετικές. Θα αρκούσε να υποβληθεί κανείς στην επίπονη διαδικασία των αποδείξεων για να πεισθεί για την αλήθεια αυτού του τελευταίου ισχυρισμού.

VI

Το τελευταίο θέμα που θέλω να θίξω σε τούτο το άρθρο αφορά την πρωτοτυπία του. Πόσο πρωτότυπο είναι; Σε ό,τι αφορά τη μορφή, την οξύτητα της επιχειρηματολογίας, τα περισσότερα από τα παραδείγματα που παρατίθενται προς τεκμηρίωση των διαφορετικών απόψεων, τον «ριζοσπαστισμό» και την εννοιολογική έμφαση, το άρθρο είναι πρωτότυπο. Ωστόσο, ξέρω πολύ καλά ότι «ουδέν κρυπτόν υπό τον ήλιον». Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο δεν ένιωσα τελείως έκπληκτος όταν, κατά τη διάρκεια της έρευνάς μου, συνάντησα μεμονωμένες και σποραδικές ιδέες τις οποίες, αφελώς, θεωρούσα σαν αποκλειστική πνευματική ιδιοκτησία μου. Έτσι, κατά την δεκαετία του 1930 είχαν δημοσιευτεί δύο μακροσκελή άρθρα υπό τον τίτλο «Die griechische Logistik und die Entstehung der Algebra».[125] Συγγραφέας τους ήταν ο Jacob Klein, ο οποίος εξέδωσε πρόσφατα τα άρθρα σε βιβλίο, σε αγγλική μετάφραση της Eva Brann.[126] Είναι ένα βιβλίο που προσωπικά το θεωρώ ως μία από τις πιο ουσιαστικές συμβολές στη γραμματεία της ιστορίας των Μαθηματικών· ταυτοχρόνως, φαίνεται ότι είναι ένα από εκείνα που άσκησαν τη μικρότερη επίδραση. Σε αυτό το βιβλίο ο Klein πραγματεύεται κυρίως τις διαφορές ανάμεσα στην αρχαία ελληνική και στη σύγχρονη έννοια του αριθμού και τα συμπεράσματά του συμπίπτουν με τα δικά μου. Θα επιστρέψω στον Klein αργότερα.

Δύο άλλοι συγγραφείς των οποίων τα έργα περιέχουν ερμηνείες παρόμοιες με τις δικές μου είναι οι Abel Rey και Michael S. Mahoney. Κατά παράδοξο τρόπο, όμως, και οι δύο εμμένουν σε μια άποψη που αποδέχεται τη νομιμότητα του όρου «γεωμετρική άλγεβρα». Αυτό, εν τούτοις, δεν κάνει λιγότερο ενδιαφέρουσες εκείνες τις ιδέες τους οι οποίες παρέχουν ισχυρή στήριξη στην ερμηνεία μου. Έτσι, ο Abel Rey αμφισβητεί την ορθότητα της ερμηνείας των Μαθηματικών των Πυθαγορείων και του Ευκλείδη από τον Zeuthen.[127] Τόσο αυτός όσο και ο Mahoney επισήμαναν με έμφαση, και κατά τη γνώμη μου πειστικά (και σε αυτό συμφωνούν με τον Klein), ότι η άλγεβρα είναι προϊόν της νεότερης εποχής, ένα προϊόν του οποίου η πλήρης άνθηση αρχίζει τον δέκατο έκτο και δέκατο έβδομο αιώνα.[128] Και οι δύο, όπως είδαμε, τόνισαν τις διαφορές μεταξύ γεωμετρικού και αλγεβρικού τρόπου σκέψης,[129] και οι δύο άσκησαν κριτική στην άποψη η οποία θεωρούσε τα προ-ελληνικά Μαθηματικά ως αλγεβρικά.[130]

Ο μόνος μελετητής (εξ όσων γνωρίζω) ο οποίος, σε ένα βιβλίο αξιοσημείωτο για τη στέρεα, διεισδυτική και διορατική του ανάλυση, απέρριψε κατηγορηματικά την ιστορική αξία της έννοιας της «γεωμετρικής άλγεβρας» είναι ο Ούγγρος φιλόλογος Árpád Szabó· το βιβλίο στο οποίο έχουμε ήδη αναφερθεί είναι το *Anfänge der griechischen Mathematik*. Αν και οι παρατηρήσεις για τη «γεωμετρική άλγεβρα» είναι περιθωριακές σε σχέση με το κύριο μέρος της ανάλυσής του,[131] ωστόσο εναρμονίζονται με *ένα* από τα βασικά μηνύματα του βιβλίου του, δηλαδή ότι, κατά έναν ουσιαστικό και θεμελιώδη τρόπο, *πολύ* νωρίς στην ιστορική τους ανάπτυξη τα ελληνικά Μαθηματικά έγιναν ελληνική *γεωμετρία* και ότι αναπτύχθηκαν και ωρίμασαν σε στενή επαφή με τη μουσική θεωρία των Πυθαγορείων. Τα βασικά θέματα των ελληνικών Μαθηματικών ήταν *γεωμετρικά* θέματα, συμπεριλαμβανομένου, και έχοντος ιδιαίτερη σημασία, του

125. *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik* (Abteilung B: Studien), 3 (τεύχος 1, 1934), σ. 18-105 και 3 (τεύχος 2, 1936), σ. 122-235. Κατά ειρωνικό τρόπο, τα διεισδυτικά άρθρα του Klein τα διαδέχονταν κάθε φορά οι αχαλίνωτες μεταγραφές των αρχαίων κειμένων σε αλγεβρική γλώσσα από τον Neugebauer· έτσι, στο τεύχος 1, ο Neugebauer δημοσίευσε το «Serientexte in der babylonischen Mathematik» (*ό.π.*, σ. 106-114), ενώ στο τεύχος 2, το άρθρο του Klein το ακολούθησε το «Zur geometrischen Algebra»! Ακόμη πιο αστείο είναι το γεγονός ότι το άρθρο που ακολούθησε αμέσως μετά το τελευταίο μέρος της μελέτης του Klein ήταν το «Eudoxos Studien III. Spuren eines Stetigkeitaxioms in der Art des Dedekind'schen zur Zeit des Eudoxos» (*ό.π.*, σσ. 236-244), του Oskar Becker!

126. *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra* (Cambridge, Mass.: 1968, M.I.T. Press). Το βιβλίο περιλαμβάνει ένα παράρτημα που περιέχει το *In Artem Analyticem* [sic] *Isagoge* (Tours, 1591) του Vieta, μεταφρασμένο στα αγγλικά από τον αιδεσιμότατο J. Winfree Smith. (Παρεμπιπτόντως, θα ήθελα να συστήσω στους αναγνώστες που έχουν αυτήν τη δυνατότητα και θέλουν να διαβάσουν την εξαιρετικά ενδιαφέρουσα μελέτη του Klein, να ανατρέξουν στα πρωτότυπα γερμανικά άρθρα: κατά κάποιον τρόπο, η έπαρση, ο στόμφος και η μεγαλοστομία του ύφους του συγγραφέα ταιριάζουν περισσότερο στους τευτονικούς ρυθμούς παρά στους πιο φιλικούς ήχους της δολίας Αλβιόνος ...).

127. *Les math. en Grèce*, σ. 30

128. Rey: *ό.π.*, σ. 32, 44, 45, 48, 91· Mahoney: «Die Anfänge der algebr. Denkweise».

129. Το προηγούμενο κάνει ακόμη πιο δύσκολο να καταλάβει κανείς την αποδοχή εκ μέρους τους της νομιμότητας του όρου «γεωμετρική άλγεβρα». Παραδείγματα αυτής της αποδοχής στον Rey μπορούμε να βρούμε *ό.π.*, σ. 33, 46, 49-51, 52 («Το ίδιο το Πυθαγόρειο θεώρημα είναι μια διαισθητική λύση της εξίσωσης $x^2 + y^2 = z^2$»), σ. 56-57. Επίσης: *La science dans l'Antiquité*, σ. 352· για αντίστοιχα παραδείγματα στον Mahoney βλ. υποσημ. 25 πιο πάνω.

130. Mahoney: «Babyl. Algebra», Rey: *ό.π.*, σ. 34, 36-37, 41, 91-92. Η τελευταία αναφορά στον Rey είναι μια δριμεία επίθεση κατά της ερμηνείας των Βαβυλωνιακών Μαθηματικών από τον Neugebauer. Σε αυτό ακριβώς το σημείο ο Rey γράφει: «Εν τέλει, η πειστική απόδειξη είναι ότι αν υπήρχε πολύ πριν από τη χριστιανική εποχή και, κυρίως, πριν από τον Διόφαντο, η αλγεβρική ιδέα των εξισώσεων και, λίγο ή πολύ, η αλγεβρική σκέψη, όλη η εικόνα των Μαθηματικών θα ήταν διαφορετική» (*ό.π.*, σ. 91).

131. Οι περισσότερες εμφανίζονται σε ένα παράρτημα του βιβλίου.

θέματος της ασυμμετρίας.[132] Αυτά τα θέματα ήταν *ελληνικά* θέματα, όχι δάνεια ή μεταμφιέσεις άλλων θεμάτων.

Πράγματι,

Τέλος, οι υποθέσεις εκείνες, σύμφωνα με τις οποίες η «γεωμετρική άλγεβρα των Πυθαγορείων» αποτελεί δάνειο ή περαιτέρω ανάπτυξη εκ μέρους των Ελλήνων μιας αρχικώς βαβυλωνιακής σκέψης ήσαν βεβιασμένες. Στην πραγματικότητα, σχέση του είδους αυτού των γνώσεων προς τη «βαβυλωνιακή επιστήμη» *δεν καταδείχθηκε πουθενά*. Αντιθέτως, έχει κανείς τη σαφή εντύπωση ότι η «επιπεδομετρία των Πυθαγορείων» ήταν ένα *καθαρά ελληνικό επίτευγμα*.[133]

Η άλγεβρα δεν είναι γεωμετρία και, ως εκ τούτου, αλγεβρικές μεταγραφές μη αλγεβρικών μαθηματικών κειμένων είναι ιστορικά απαράδεκτες.[134] Επίσης, δεν υπάρχουν ίχνη στην ελληνική μαθηματική παράδοση (είτε της προ-ευκλείδειας είτε της ευκλείδειας περιόδου) κάποιου γνήσια αλγεβρικού τρόπου σκέψης.[135] Γι' αυτόν τον λόγο πιστεύω ότι ο Abel Rey είχε δίκιο όταν έγραφε:

[Τα ελληνικά Μαθηματικά] θα παραμένουν γεωμετρικά. Όταν θα παύσουν πια να είναι τέτοια –όταν θα τείνουν να γίνουν υπολογιστικά, υπό την ανατολική, χωρίς αμφιβολία, επίδραση, με την εξασθένηση της δημιουργικής τους δύναμης, και μάλιστα στον πιο εξέχοντα από τους τελευταίους αντιπροσώπους τους, τον Διόφαντο, προς το τέλος του αρχαίου πολιτισμού– πολύ σύντομα θα παύσουν να υπάρχουν.[136]

Ήρθε η ώρα τώρα να επιστρέψουμε στο βιβλίο του Jacob Klein. *Αριθμός* για τους αρχαίους Έλληνες σήμαινε *θετικός ακέραιος*. Οι *αριθμοί* παριστάνονται από τον Ευκλείδη με *ευθύγραμμα τμήματα*. Μετά την ανακάλυψη της αρρητότητας έγινε φανερό ότι δεν ισχύει ότι *«όλα τα ευθύγραμμα τμήματα* ήταν δυνατόν να αντιστοιχίζονται σε αριθμούς»· ωστόσο, αυτό δεν σημαίνει ότι η αντίστροφη πρόταση είναι επίσης ψευδής και, πράγματι, ο Ευκλείδης αντιστοιχίζει α-

132. Ό.π., σ. 28, 36, κ.ε.
133. Ό.π., σ. 488.
134. Ό.π., υποσημ. 21, σ. 487. Μου φαίνεται ως παραχώρηση στον επικρατούντα τρόπο γραφής της ιστορίας των Μαθηματικών, τον οποίο ο Szabó τόσο εύγλωττα καταδίκασε, όταν και ο ίδιος χρησιμοποιεί, αδιάκριτα κατά κάποιον τρόπο, αλγεβρικό συμβολισμό όταν πραγματεύεται γεωμετρικά θέματα. (Πρβλ. *ό.π.*, σ. 483).
135. Ό.π., σ. 472-473.
136. *La science dans l'Antiquité*, σ. 390.

ριθμούς σε ευθύγραμμα τμήματα σε όλη την έκταση των αποκαλούμενων «αριθμητικών βιβλίων» του, δηλαδή, των βιβλίων VII, VIII και IX των *Στοιχείων*.

Η αρχαιοελληνική έννοια του «ἀριθμοῦ», δηλαδή ενός «πλήθους αντικειμένων» (αυτό που ο Klein ονομάζει Anzahl), αντικαταστάθηκε τον δέκατο έκτο αιώνα με μια νέα έννοια του αριθμού ως αφηρημένου συμβόλου. Αυτή η αλλαγή συντελέστηκε από τον François Viète (Vieta), 1540-1603, που μετέτρεψε την έννοια του «ἀριθμοῦ» στη σύγχρονη έννοια. Αυτή η μετατροπή σηματοδοτεί τις απαρχές των σύγχρονων Μαθηματικών. Ο ελληνικός «ἀριθμός» και ο σύγχρονος *αριθμός* [number] *δεν* σημαίνουν το ίδιο πράγμα. Όπως το θέτει ο Klein, οι δύο έννοιες διαφέρουν στο «Begrifflickeit», δηλαδή στην *εννοιολογία* και στην *αποβλεπτικότητα*. (Με τον δεύτερο όρο ο Klein εννοεί «... τον τρόπο με τον οποίο η σκέψη μας καθώς και οι λέξεις μας, σημαίνουν ή εννοούν τα αντικείμενά τους».[137]) Για τους αρχαίους Έλληνες «ἀριθμός» σήμαινε πάντοτε ένα *πλήθος αντικειμένων* (Anzahl), αν και τα «αντικείμενα» δεν ήταν απαραίτητο να αναφέρονται ρητώς· για τα μετά τον Viète σύγχρονα Μαθηματικά, ο *Αριθμός είναι μια έννοια*· είναι *η έννοια της ποσότητας*! Καθώς οι *αριθμοί* αρχίζουν να θεωρούνται ως *αφηρημένες* και *συμβολικές* οντότητες, ένα «νέο» είδος Μαθηματικών (και κατ' αναλογίαν, μία «νέα» επιστήμη μακροπρόθεσμα) άρχισε να εμφανίζεται: τα Μαθηματικά στα οποία η *συμβολική μορφή* μιας δήλωσης είναι αναπόσπαστα συνδεδεμένη με το περιεχόμενό της· πράγματι, μπορούμε να πούμε ότι *η μορφή είναι το περιεχόμενο*! Τηρουμένων των αναλογιών, ο χωρισμός μορφής και περιεχομένου είναι, σε πολύ μεγάλο βαθμό, αδύνατος στη σύγχρονη (φυσική) επιστήμη, όπου η *μαθηματική μορφή* και το *φυσικό περιεχόμενο* συνυφαίνονται κατά μη αναγώγιμο τρόπο και το ένα διαπλέκεται ανεπανόρθωτα με το άλλο.

Με τον Viète και τους διαδόχους του (Stevin, Descartes, Wallis κ.λπ.) επήλθε μια ριζική εννοιολογική αλλαγή. Συνεπώς, είναι ιστορικά αθέμιτο να εφαρμόζουμε στα αρχαία ελληνικά Μαθηματικά με μηχανικό τρόπο τους χειρισμούς και τις ταχυδακτυλουργίες του σύγχρονου μαθηματικού συμβολισμού. Και όμως αυτό ακριβώς έκαναν οι ιστορικοί των Μαθηματικών. Όντας τελείως βυθισμένοι στους σύγχρονους τρόπους σκέψης, διαβάζουν τα ελληνικά μαθηματικά κείμενα με σύγχρονα γυαλιά και, τί έκπληξη, κατορθώνουν, μάλλον επιτυχώς να διακρίνουν σε αυτά τα κείμενα μια ανύπαρκτη ελληνική άλγεβρα.[138] Μπόρε-

137. Ό.π., σ. 118.
138. Η σύγχρονη άλγεβρα (η μόνη αληθινή άλγεβρα) είναι δημιούργημα του δέκατου έκτου και δέκατου έβδομου αιώνα. Οι μεγάλοι πρωταγωνιστές της είναι οι Viète, Descartes, Fermat. Σηματοδοτεί το πέρασμα από έναν τρόπο σκέψης στα Μαθηματικά (τον γεωμετρικό τρόπο, *mos geometricus*) σε έναν νέο τρόπο (τον συμβολικό τρόπο, *mos per symbola*). Η ιστορική της ανάπτυξη συνδέεται, και σωστά, με την επανεισαγωγή στη Δύση των μεγάλων έργων των κλασικών Ελλήνων μαθηματικών, τα οποία, εν τούτοις, περιείχαν τον παλαιό τρόπο σκέψης, αυτόν που πρόκειται να εγκαταλειφθεί από τα νεότερα Μαθηματικά. Με τον Viète η άλγεβρα

σαν να επιτύχουν ένα τέτοιο εκπληκτικό αποτέλεσμα μόνο και μόνο διότι πρόδωσαν τα ελληνικά Μαθηματικά, μόνο και μόνο διότι εφάρμοσαν σε αυτά τις ξένες κατηγορίες της μετα-αναγεννησιακής μαθηματικής σκέψης.

Κανείς δεν επιτρέπεται να εφαρμόζει σύγχρονο συμβολισμό στα ελληνικά Μαθηματικά ατιμωρητί, ως εάν ο σύγχρονος συμβολισμός δεν είναι παρά ένα χρονικά καθολικό (δηλαδή, ιστορικά αδιάφορο) μέσον για την οργάνωση και απλοποίηση *οποιουδήποτε* δεδομένου εννοιολογικού περιεχομένου. Και μόνο το γεγονός ότι εφαρμόζει κανείς *σύγχρονο* συμβολισμό είναι η καλύτερη απόδειξη για τον μη ιστορικό χαρακτήρα μιας τέτοιας διαδικασίας. Ο Klein έχει δείξει, πιστεύω επιτυχώς, ότι «... ο συμβολικός φορμαλισμός βρίσκεται στον *πυρήνα* της σύγχρονης έννοιας του αριθμού, και το να μεταφράζουμε με τους δικούς του όρους τα ελληνικά Μαθηματικά συσκοτίζει τελείως τόσο το νόημα της ελληνικής έννοιας [του αριθμού] όσο και τα αυθεντικά ελληνικά επιτεύγματα στη θεωρία των αριθμών».[139]

Στο σχόλιό του για την πρόταση VIII.4 ο Heath κάνει λόγο «... για τη δυσκαμψία της ελληνικής μεθόδου αντιμετώπισης των *μη καθορισμένων αριθμών*. Δεν είναι εύκολο να παρακολουθήσει κανείς την απόδειξη», συνεχίζει, «χωρίς τη βοήθεια της σύγχρονης συμβολικής σημειογραφίας. Αν την χρησιμοποιήσουμε, οι συλλογισμοί καθίστανται αρκετά σαφείς».[140] Το θέμα, ωστόσο, είναι: Οι αρχαίοι Έλληνες, γενικά, και ο Ευκλείδης, ειδικότερα, χρησιμοποίησαν ποτέ «μη καθορισμένους» αριθμούς;

Ο G.H.F. Nesselmann, στο βιβλίο του *Die Algebra der Griechen*, παρουσίασε

γίνεται κύρια γλώσσα των Μαθηματικών· από την άλλη πλευρά, αυτό που έχουμε με τα *Αριθμητικά* του Διοφάντου είναι μόνον ένα εκλεπτυσμένο βοηθητικό εργαλείο για τη λύση αριθμητικών προβλημάτων. (Πρβλ. M. Mahoney: «Die Anfänge der algebr. Denkweise»). Τον δέκατο έβδομο αιώνα η άλγεβρα ονομαζόταν *ars analytica*, ονομασία που είναι πράγματι μεστή νοήματος. Δείχνει τη διαφορά μεταξύ της ελληνικής προσέγγισης και αυτής του δέκατου έβδομου αιώνα. Για τους Έλληνες, τα Μαθηματικά δεν ήταν μια *τέχνη*, μια τεχνική χειρισμών (*techne*), αλλά μια επιστήμη (*episteme, scientia*). Επίσης, για τους Έλληνες η *ανάλυση* ήταν απλώς ένα μέσο ανακάλυψης, ένα ευρετικό εργαλείο. Τα Μαθηματικά, η επιστήμη, περιορίζονταν στη *σύνθεση*. Τον δέκατο έβδομο αιώνα, αντιθέτως, βρισκόμαστε ενώπιον αλγεβρικών αναλύσεων χωρίς συνθέσεις. Αυτή η νέα προσέγγιση σήμαινε (μεταξύ άλλων) μια κάποια χαλάρωση των ελληνικών απαιτήσεων για αυστηρότητα και ένα νέο μαθηματικό ύφος. Ο Mahoney προσδιορίζει τους εξωγενείς (κατ' ανάγκην) παράγοντες που οδήγησαν σε αυτήν την εξέλιξη, στις παιδαγωγικές προσπάθειες του Petrus Ramus και στην αναζήτηση ενός καθολικού συμβολισμού (*characteristica universalis*), η οποία άρχισε με τον Ramon Lull τον δέκατο τρίτο αιώνα. Αυτοί οι δύο παράγοντες ενώθηκαν στον Ramus, ο οποίος συνέβαλε στην απελευθέρωση του καθολικού συμβολισμού από τους δεσμούς του με τη μαγεία μέσω της *ars memoriae*. Σύμφωνα με τον Mahoney, ο Ramus φαίνεται ότι ήταν ο πρώτος που διεκδίκησε περισσότερη εύνοια και σεβασμό για την αλγεβρική *τέχνη*, η οποία, κατά κανόνα, ησκείτο έξω από τα τείχη του πανεπιστημιακού κατεστημένου. (Πρβλ., *ό.π.*, σ. 25)

139. Από το οπισθόφυλλο του βιβλίου του Klein.

140. *Στοιχεία*, 2, σ. 353, η υπογράμμιση δική μου.

την περίφημη τριχοτομική ταξινόμηση της ιστορικής ανάπτυξης της άλγεβρας.[141] Ο Nesselmann διακρίνει *τρία* στάδια: Τη *ρητορική*, την *συγκεκομμένη* και τη *συμβολική* άλγεβρα. Σύμφωνα με την ταξινόμηση του Nesselmann, τα *Αριθμητικά* του Διοφάντου ανήκουν στη δεύτερη κατηγορία (συγκεκομμένη).[142] Αλλά η ανάλυση του Nesselmann είναι πολύ προσεγγιστική και, στην καλύτερη περίπτωση, ατελής.[143] Ο Léon Rodet ανέπτυξε μια άλλη, διχοτομική ταξινόμηση: 1. Η «άλγεβρα των συντομογραφιών και των *δεδομένων* αριθμών»· και 2. Η συμβολική άλγεβρα (δηλαδή, η μόνη αληθινή άλγεβρα, η γνήσια άλγεβρα).[144]

Σύμφωνα με τον Rodet, ακόμη και η άλγεβρα του Διοφάντου ανήκει στον πρώτο τύπο.[145] Η σύγχρονη άλγεβρα «... δεν γεννήθηκε παρά όταν κάποιος είχε την ιδέα

να παραστήσει τα δεδομένα του προβλήματος σε γενική μορφή μέσω ενός

141. *Ό.π.*, σ. 301-303.

142. Ο Klein, πιστεύω ορθώς, θεωρεί τα *Αριθμητικά* του Διοφάντου ως άσκηση στη *θεωρητική λογιστική*. (*Ό.π.*, σ. 127-149 κ.ε.).

143. Ο Léon Rodet στην εργασία του που έχουμε μνημονεύσει (βλ. υποσημ. 21 πιο πάνω για πλήρη αναφορά) κονιορτοποιεί την ταξινόμηση του Nesselmann. Γράφει ο Rodet: «... πρέπει να παραδεχθούμε ότι αυτή η διαίρεση της αλγεβρικής γλώσσας σε τρία διαδοχικά στάδια έχει κάτι το γοητευτικό. Πάσχει, όμως, σε ένα σημείο: στηρίζεται εντελώς σε μια σκαλωσιά από ανακρίβειες ...» (*ό.π.*, σ. 56). Ο Rodet σημειώνει ότι ακόμη και αν παραδεχθούμε την αλήθεια της ταξινόμησης του Nesselmann, *είναι λάθος να την* αποκαλούμε *ιστορική*! Τα τρία στάδια δεν αντιστοιχούν σε τρία *ιστορικώς διαδοχικά στάδια*, ακόμη και σύμφωνα με την αφήγηση του ίδιου του Nesselmann, αφού την κατώτερη τάξη σε αυτήν την ταξινόμηση καταλαμβάνουν οι Άραβες και οι Ιταλοί μαθηματικοί που γράφουν την περίοδο ανάμεσα στις Σταυροφορίες και στον δέκατο έκτο αιώνα, ενώ ο Διόφαντος (3ος μ.Χ. αιώνας) αντιστοιχεί στο μεσαίο στάδιο και οι Ινδοί, οι οποίοι θεωρούνται δάσκαλοι των Αράβων, καταλαμβάνουν το ανώτερο στάδιο, δηλαδή το ίδιο με τη σύγχρονη συμβολική άλγεβρα! Ειδικότερα, ο Rodet ανατρέπει αυτόν τον χαρακτηρισμό των ινδικών Μαθηματικών και αποκαλύπτει την απόλυτη ιστορική ανακρίβεια, που οφείλεται στην άγνοια εκ μέρους του Nesselmann «... της αλγεβρικής σημειογραφίας των Ινδών» (*ό.π.*, σ. 57). Αναφερόμενος στην ινδική «αλγεβρική σημειογραφία», ο Rodet σημειώνει: «Της λείπουν δύο βασικά στοιχεία για να μπορεί να είναι παρόμοια με τη δική μας: τα ειδικά σημεία για τις δύο άμεσες πράξεις, την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό, και ο τρόπος για να εκφράζουν, όχι με συγκεκριμένους αριθμούς, τις *παραμέτρους* οι οποίες υπεισέρχονται ταυτόχρονα με τις καθαυτό *μεταβλητές* στις αλγεβρικές εκφράσεις. Εν τέλει, όπως συμβαίνει και στον Διόφαντο, τα σύμβολα που χρησιμοποιούν δεν είναι παρά τα αρχικά των ονομάτων των ποσοτήτων που θέλουν να παραστήσουν. Στην ινδική άλγεβρα, όπως και σε αυτήν των Ελλήνων και των Ευρωπαίων μεταξύ του 12ου και 17ου αιώνα ταιριάζει το όνομα *Συγκεκομμένη άλγεβρα* ...» (*ό.π.*, σ. 60).

144. *Ό.π.*, σ. 69-70.

145. Πρβλ. σχετικά τη δήλωση του Michel: «Γενικώς, το λεξιλόγιο του Διοφάντου παραμένει διαποτισμένο με γεωμετρία, όπως το μαρτυρούν οι διατυπώσεις των προβλημάτων» (*ό.π.*, σ. 641)· πρβλ., επίσης, Nesselmann: «Έτσι βρίσκουμε πράγματι και στον ίδιο τον Διόφαντο παραδείγματα πλήρους παραμέλησης της χρήσης συντομογραφιών ..., οι οποίες ανήκουν πλήρως στο ρητορικό επίπεδο» (*ό.π.*, υποσημ. 15, σ. 304).

συμβόλου και επίσης να συμβολίσει κάθε πράξη με ένα ειδικό σημείο, και να επιτύχει έτσι όχι απλώς να επιλύσει με περισσότερη ή λιγότερη ευκολία ένα συγκεκριμένο πρόβλημα αλλά να βρίσκει τύπους που δίνουν τη λύση όλων των προβλημάτων του ίδιου είδους, και, επειδή αυτό χρησίμευε για να χαρακτηρίσει κάθε είδος προβλήματος ξεχωριστά, χρησίμευε επίσης για να εκφράσει τις γενικές ιδιότητες κάποιων κατηγοριών αριθμών, κάποιων οικογενειών σχημάτων ή να διατυπώσει τους νόμους κάποιων κλάσεων φυσικών φαινομένων».[146]

Βρίσκουμε, λοιπόν, άλγεβρα στον Ευκλείδη; Αμφιβάλλω! Στον Ευκλείδη οι *αριθμοί* είναι *δεδομένα* ευθύγραμμα τμήματα, όχι αφηρημένα σύμβολα, και η ευκλείδεια παρουσίαση *δεν είναι* συμβολική. *Πραγματεύεται πάντοτε ορισμένα πλήθη* μετρητικών μονάδων τα οποία *δεν* θεωρείται *ότι αντιπροσωπεύουν* συγκεκριμένα παραδείγματα, περιπτώσεις *κάποιας έννοιας γενικού μεγέθους*.[147] Από εδώ και κάτω, ας μου επιτραπεί να παραθέσω από τον Jacob Klein:

Απεικονίζοντας κάθε συγκεκριμένο αριθμό μετρητικών μονάδων με μέτρα απόστασης [η ευκλείδεια παρουσίαση] *δεν* κάνει δύο πράγματα τα οποία αποτελούν την καρδιά της συμβολικής διαδικασίας: *Δεν* ταυτίζει το παριστώμενο αντικείμενο με το μέσο παράστασής του και *δεν* αντικαθιστά τον πραγματικό καθορισμό ενός αντικειμένου με έναν *δυνητικό* καθορισμό, όπως θα συνέβαινε αν το παριστάναμε με ένα σημείο το οποίο, αντί να *απεικονίζει* ένα καθορισμένο αντικείμενο, θα *σήμαινε* τη δυνατότητα καθορισμού. ... Όταν στα αριθμητικά βιβλία μια αριθμητική ή, ακριβέστερα, μια λογιστική πρόταση αποδεικνύεται *γενικά* με τη βοήθεια ευθειών, αυτό καθόλου δεν σημαίνει ότι υπάρχει είτε ένας γενικός αριθμός είτε η έννοια ενός «γενικού», δηλαδή απροσδιόριστου, αριθμού που αντιστοιχεί σε αυτήν τη γενική απόδειξη. ... Η *γενική* «γραμμική προσέγγιση» αναφέρεται μόνο σε *καθορισμένους* αριθμούς. ... Αφού ... στον Ευκλείδη ... η κάθε απεικονιζόμενη ευθεία αναγνωρίζεται επιπροσθέτως από ένα γράμμα, προκύπτει η δυνατότητα παράστασης των αριθμών στους οποίους αναφέρονται αυτά τα γράμματα. Αυτό, όμως, δεν ισοδυναμεί με την εισαγωγή συμβολικών παραστάσεων. Γράμματα για την υπόδειξη μεγεθών και αριθμών φαίνεται ότι χρησιμοποιούσε ήδη ο Αρχύτας ... [Όπως, όμως, σημειώνει ο Tannery,] *το γράμμα δεν συμβολίζει την τιμή ενός αριθμού και δεν προσφέρεται για πράξεις*. Ο Αριστοτέλης χρησιμοποιούσε, επίσης, τέτοιου είδους μαθηματικά γράμματα, λ.χ. στα *Φυσικά* και στο *Περὶ Οὐρανοῦ*· τα χρησιμοποιούσε ακόμη και στις «λογικές» και στις περί ηθικής με-

146. *Ό.π.*
147. Klein: *ό.π.*, σ. 123.

λέτες του. Αλλά ένα τέτοιο γράμμα δεν είναι ποτέ «σύμβολο», με την έννοια ότι αυτό το οποίο σημαίνει το σύμβολο είναι ένα «γενικό» αντικείμενο.[148]

Δεν θα μπορούσε να ειπωθεί καλύτερα!

Τώρα, η *συμβολική άλγεβρα* (δηλαδή η αυθεντική άλγεβρα) γεννήθηκε, όπως έχει καταδείξει ο Rodet,[149] «μόνον αφ' ής στιγμής κάποιος είχε την ιδέα να παραστήσει τα δεδομένα ενός προβλήματος σε γενική μορφή μέσω ενός συμβόλου και επίσης να συμβολίσει κάθε πράξη με ένα ειδικό σημείο».

Τέτοια ιδέα, εξ όσων γνωρίζω, *δεν* εμφανίζεται στα *Στοιχεία*, στα οποία ο Ευκλείδης, σύμφωνα με τον Πρόκλο, συγκέντρωσε «... πολλά από αυτά που ανακάλυψε ο Εύδοξος, τελειοποίησε πολλά από τα [αποτελέσματα] του Θεαιτήτου, αλλά και συμπλήρωσε με αψεγάδιαστες αποδείξεις όσα δεν είχαν αποδειχθεί αυστηρά από τους προγενεστέρους του».[150]

Μετάφραση: Φίλιππος Γεωργιάδης, Ιωάννα Σκούρα, Γιώργος Μαυρομμάτης

148. *Ό.π.*, σ. 123-124.
149. Βλ. το κείμενο στην υποσημ. 145 προηγουμένως· πρβλ. επίσης, Klein: σ. 146-147.
150. Ευκλείδης: *Στοιχεία*, 1, σ. 37. Προσπάθησα σε αυτό το άρθρο να ανατρέψω την έννοια της «γεωμετρικής άλγεβρας» ως χρήσιμου ιστοριογραφικού όρου. Έτσι, αν έχει δίκιο ο Popper, πρέπει να έφθασα στο ανώτατο επίπεδο κατανόησης του αληθινού υποβάθρου αυτής της έννοιας ... Σύμφωνα με τον Sir Karl, υπάρχουν τρία επίπεδα κατανόησης: 1. Το *κατώτερο επίπεδο*, που αντιπροσωπεύεται από το ευχάριστο αίσθημα ότι κάποιος έχει αντιληφθεί το επιχείρημα. 2. Το *μεσαίο επίπεδο*, που αντιπροσωπεύεται από την ικανότητα να επαναλάβεις το επιχείρημα. 3. Το *ανώτατο επίπεδο*, που αντιπροσωπεύεται από την ικανότητα να ανατρέψεις το επιχείρημα. (Πρβλ. Imre Lakatos: «Proofs and Refutations (II)», *British Journal for the Philosophy of Science*, 14 (1963-1964), σ. 120-139, στη σ. 131.)