

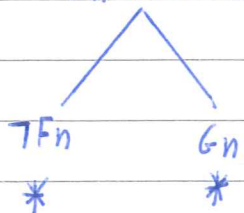
a)

“Όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί

“Ο Σωκράτης είναι άνθρωπος

∴ “Ο Σωκράτης είναι θνητός

1. F_n
2. $\forall x (F_x \rightarrow G_x)$
3. $\neg G_n$
4. $F_n \rightarrow G_n$



Προκείμενη
 Προκείμενη
 Άρνηση συμπεράσματος.
 $\Delta \neq 2$
 $\Delta \rightarrow 4$

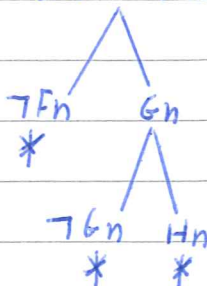
B)

“Όλοι οι φυσικοί είναι επιστήμονες

“Ο Einstein είναι φυσικός που δεν είναι Αμερικάνος

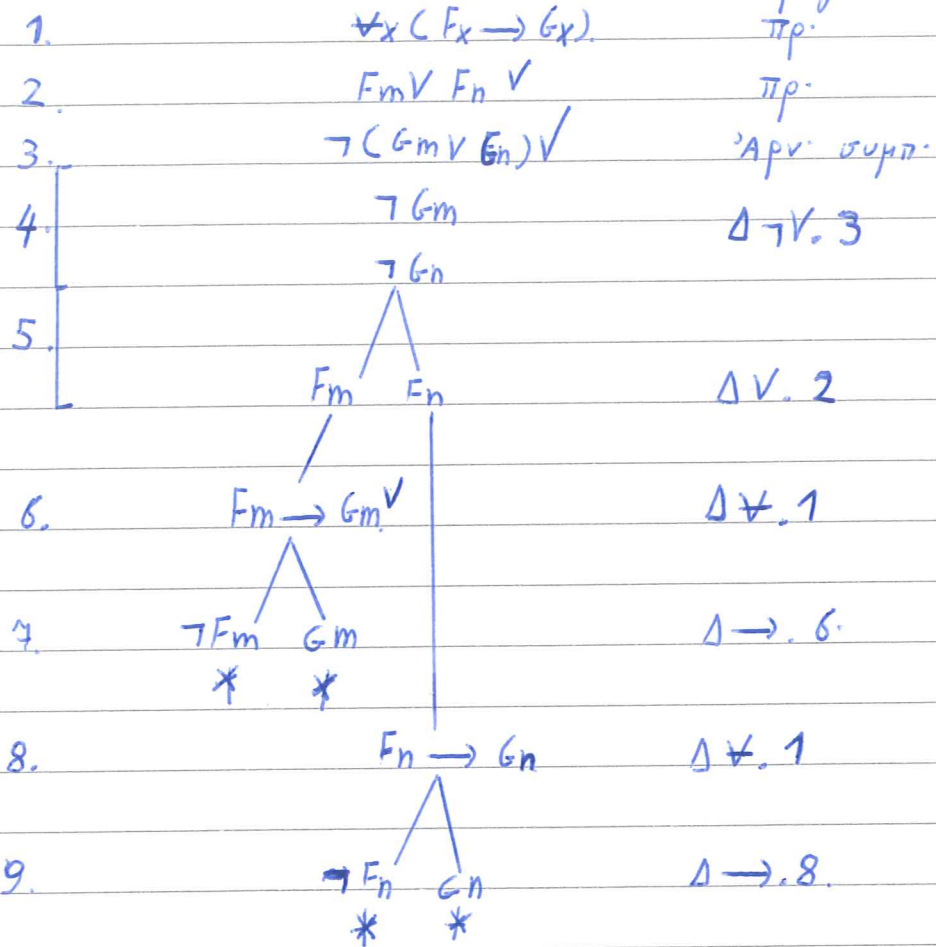
∴ “Όχι όλοι οι επιστήμονες είναι Αμερικάνοι.

1. $\forall x (F_x \rightarrow G_x)$ Πρ.
2. $F_n \wedge \neg H_n$ Πρ.
3. $\neg \neg \forall x (G_x \rightarrow H_x)$ Άρ. συμπ.
4. F_n Δ. Λ. 2.
 $\neg H_n$
5. $\forall x (G_x \rightarrow H_x)$ Δ. $\neg \neg$. 3.
6. $F_n \rightarrow G_n$ Δ \neq . 1
7. $G_n \rightarrow H_n$ Δ \neq . 5
8. $\neg F_n$ Δ \rightarrow . 6.
 G_n
9. $\neg G_n$ Δ. \rightarrow . 7.
 H_n

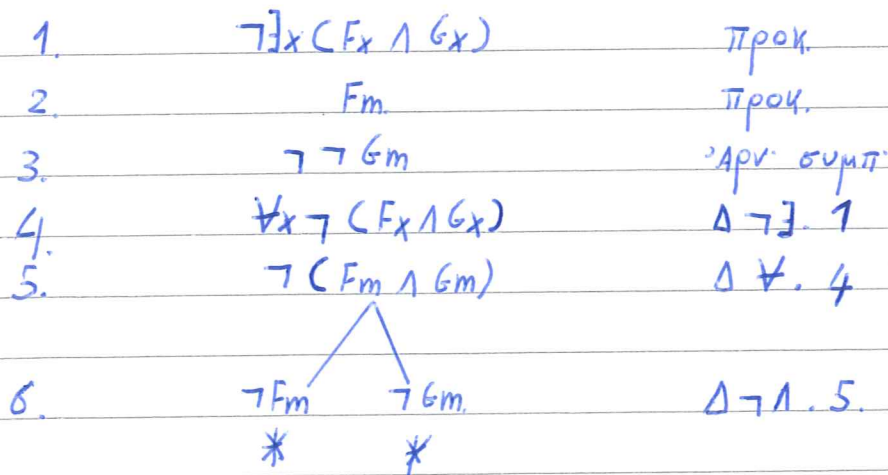


γ.

Κάθε μεγάλος φυσικός είναι μεγάλος έπιστήμονας
 είτε ο Einstein είτε ο Planck είναι μεγ. φυσικός
 ∴ είτε ο Einstein είτε ο Planck είναι μεγ. έπιστήμονας



δ.



ε. $\exists x Fx \vee \exists x Gx$ $\exists x Fx \vee \exists x Gx$ είναι φυσικός
 "Όλοι οι φυσικοί είναι δύστροποι."

∴ κάποιος είναι δύστροπος

1.	$Fm \vee Fn$	✓	Προϋ.
2.	$\forall x (Fx \rightarrow Gx)$		Προϋ.
3.	$\neg \exists x Gx$	✓	Άρν. συμπ.
4.	$\forall x \neg Gx$		$\Delta \neg \exists. 3$
5.	Fm	Fn	$\Delta \vee. 1$
6.	$Fm \rightarrow Gm$	✓	$\Delta \forall. 2$
7.	$\neg Gm$		$\Delta \forall. 4$
8.	$\neg Fm$	Gm	$\Delta \rightarrow. 6$
	*	*	
9.	$Fn \rightarrow Gn$		$\Delta \forall. 2$
10.	$\neg Gn$		$\Delta \forall. 4$
11.	$\neg Fn$	Gn	$\Delta \rightarrow. 9$
	*	*	

στ. κάποιος είναι φυσικός
 "Όλοι οι φυσικοί είναι δύστροποι"
 κάποιος είναι δύστροπος

1.	$\exists x Fx$		Προϋ.
2.	$\forall x (Fx \rightarrow Gx)$		Προϋ.
3.	$\neg \exists x Gx$		Άρν. συμπ.
4.	$\forall x \neg Gx$		$\Delta \neg \exists$
5.	Fa		$\Delta \exists. 1$
6.	$Fa \rightarrow Ga$		$\Delta \forall. 2$
7.	$\neg Ga$		$\Delta \forall. 4$
8.	$\neg Fa$	Ga	$\Delta \rightarrow. 6$
	*	*	

3.

"Όλοι οι άνθρωποι είναι θηλαστικά

"Όλα τα θηλαστικά είναι σπονδυλωτά

∴ "Όλοι οι άνθρωποι είναι σπονδυλωτά

1.	$\forall x (Fx \rightarrow Gx)$	Προκ.
2.	$\forall x (Gx \rightarrow Hx)$	Προκ.
3.	$\neg \forall x (Fx \rightarrow Hx)$	Αρν. συμπεράσματος
4.	$\exists x \neg (Fx \rightarrow Hx)$	$\Delta \neg \forall. 3$
5.	$\neg (Fa \rightarrow Ha)$	$\Delta \exists. 4$
6.	$Fa \rightarrow Ga$	$\Delta \forall. 1$
7.	$Ga \rightarrow Ha$	$\Delta \forall. 2$
8.	Fa $\neg Ha$	$\Delta \wedge. 5$
9.	$\neg Fa$ Ga * *	$\Delta \rightarrow. 6$
10.	$\neg Ga$ Ha * *	$\Delta \rightarrow. 7$

η.

1.	$\exists x (Fx \wedge \neg Gx)$	Προκ. (παρ. μερικά σπονδυλωτά δεν είναι θηλαστικά)
2.	$\forall x (Hx \rightarrow Gx)$	Προκ. ("Όλοι οι άνθρωποι είναι θηλαστικά")
3.	$\neg \exists x (Fx \wedge \neg Hx)$	Αρν. συμπ. (μερικά σπονδυλωτά δεν είναι άνθρωποι)
4.	$\forall x \neg (Fx \wedge \neg Hx)$	$\Delta \neg \exists. 3$
5.	$Fa \wedge \neg Ga$	$\Delta \exists. 1$
6.	$Ha \rightarrow Ga$	$\Delta \forall. 2$
7.	$\neg (Fa \wedge \neg Ha)$	$\Delta \forall. 4$
8.	Fa $\neg Ga$	$\Delta \wedge. 5$
9.	$\neg Ha$ Ga * *	$\Delta \rightarrow. 6$
10.	$\neg Fa$ $\neg \neg Ha$ * *	$\Delta \neg \wedge. 7$

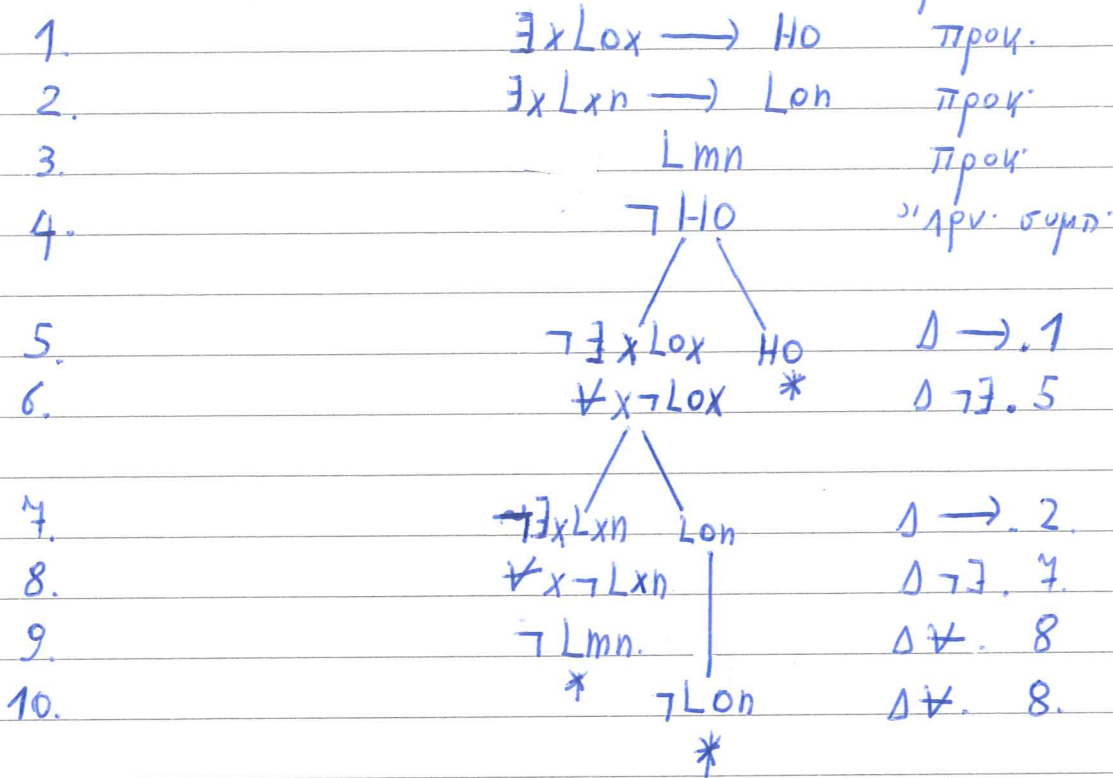
- θ. ὅτι εἰν κάποιος μαθηματικός δὲν εἶναι φιλόσοφος, τότε
 ὁ Γιώργος δὲν εἶναι φιλόσοφος
 ὁ Γιώργος εἶναι φιλόσοφος
 ∴ Κάθε μαθηματικός εἶναι φιλόσοφος

1.	$\exists x (Fx \wedge \neg Gx) \longrightarrow \neg Gn$	πρου.
2.	Gn	πρου.
3.	$\neg \forall x (Fx \longrightarrow Gx)$	ἂρ. συμπ.
4.	$\exists x \neg (Fx \longrightarrow Gx)$	$\Delta \neg \forall . 3$

5.	$\sim \exists x (Fx \wedge \neg Gx) \quad \neg Gn$	$\Delta \rightarrow . 1$
	*	
6.	$\forall x \neg (Fx \wedge \neg Gx)$	$\Delta \sim \exists . 5$
7.	$\neg (Fa \longrightarrow Ga)$	$\Delta \exists . 4$
8.	$\neg (Fa \wedge \neg Ga)$	$\Delta \forall . 6$
9.	Fa	$\Delta \neg \rightarrow . 7$
	$\neg Ga$	
	*	
11.	$\neg Fa \quad \neg \neg Ga$	$\Delta \neg \wedge . 8$
	* *	

6.

6. Μόνον εάν ο Owen είναι εύτυχισμένος, τότε αγαπά κάποιον.
 Εάν οποιοσδήποτε αγαπά τον Nick, τότε τον αγαπά και ο Owen.
 Ο Mike αγαπά τον Nick.
 ∴ Ο Owen είναι εύτυχισμένος



Παρέμβαση: Κανόνες μετακίνησης των ποσοδεικτών

$$1. (A \wedge \forall v B(\dots v \dots)) \equiv \forall v (A \wedge B(\dots v \dots))$$

$$2. (A \wedge \exists v B(\dots v \dots)) \equiv \exists v (A \wedge B(\dots v \dots))$$

Υπό την προϋπόθεση ότι η μεταβλητή v δεν εμφανίζεται ελεύθερα στον τύπο A . Εάν αυτό συμβαίνει, τότε αντικαθιστούμε την v στο δεύτερο μέλος της σύζευξης από κάποια άλλη μεταβλητή v' που δεν εμφανίζεται ελεύθερα στον A (το αποτέλεσμα είναι ότι ο τύπος $\forall v (\text{ή} \exists v) B(\dots v \dots)$ μετατρέπεται στον $\forall v' (\text{ή} \exists v') B(\dots v' \dots)$ του $\forall v' (\text{ή} \exists v') B(\dots v' \dots)$)

φυσικά, η σειρά των μελών της σύζευξης δεν έχει σημασία και μπορεί να αντιστραφεί.

Οι τύποι 1 και 2 ισχύουν και στην περίπτωση που το σταθερό της σύζευξης σε αυτό αντικατασταθεί από διάζευξη.

3. $(A \rightarrow \forall v B(\dots v \dots v)) \equiv \forall v (A \rightarrow B(\dots v \dots v))$

4. $(A \rightarrow \exists v B(\dots v \dots v)) \equiv \exists v (A \rightarrow B(\dots v \dots v))$

5. $(\forall v B(\dots v \dots v) \rightarrow A) \equiv \exists v (B(\dots v \dots v) \rightarrow A)$

6. $(\exists v B(\dots v \dots v) \rightarrow A) \equiv \forall v (B(\dots v \dots v) \rightarrow A)$

Προσοχή στην
αλλαγή των ποσοδείκτων

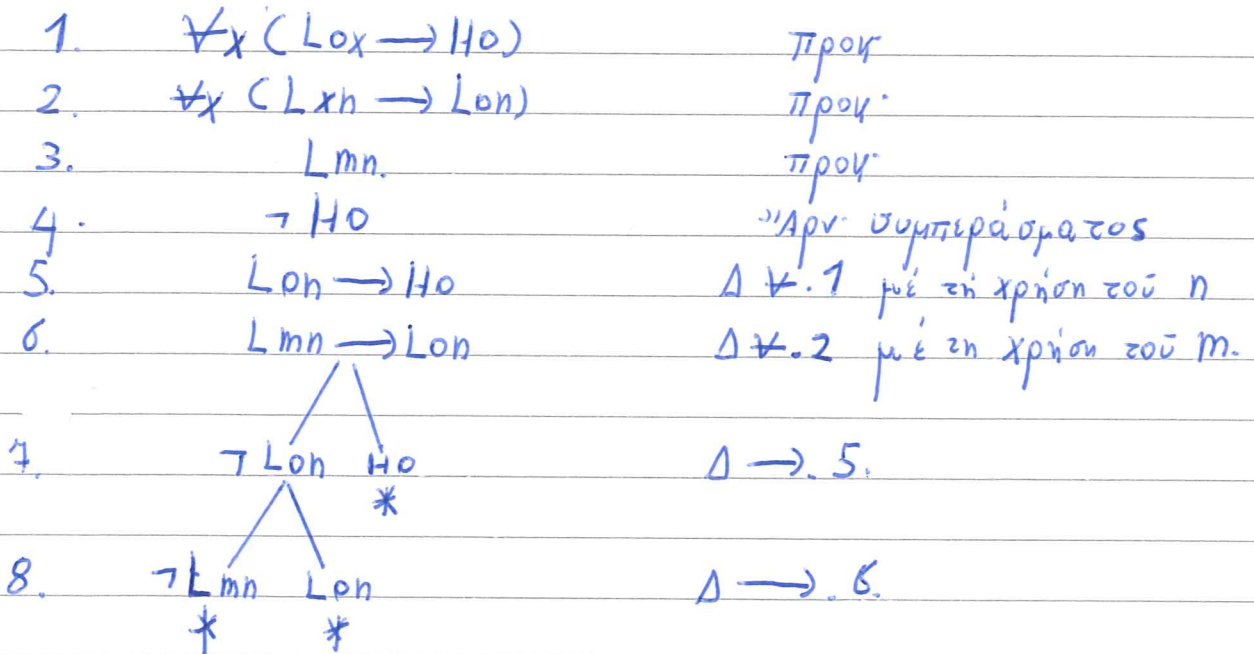
Υπό την προϋπόθεση ότι η v δεν εμφανίζεται ελεύθερη στην A , στην περίπτωση αυτή ακολουθούμε τις οδηγίες που δόθηκαν για τους κανόνες 1 και 2 φυσικά, όπου οποιοσδήποτε λόγος ή σειρά της υπόθεσης και της απόδοσης δεν μπορεί να αντιστραφεί.

Ακολουθώντας τον κανόνα 6, οι προκείμενες 1, 2 του παραδείγματος 6 μπορούν να μεταστρέψουν στις ισοδύναμες ως εξής:

$(\exists x Lox \rightarrow Ho) \equiv \forall x (Lox \rightarrow Ho)$

$(\exists x Lxn \rightarrow Lon) \equiv \forall x (Lxn \rightarrow Lon)$

Το δένδροδιάγραμμα για το επιχειρήμα 6 θα έχει τότε ως εξής:



La "Όλοι αγαπούν κάποιον που είναι μαθηματικός
 Κανένας βλάκας δεν είναι μαθηματικός
 "Ο σπύρος είναι βλάκας
 "Όχι όλοι είναι βλάκες.

1.	$\forall x \exists y (Fy \wedge Lxy)$	Προκ.
2.	$\forall x (Gx \rightarrow \neg Fx)$	Προκ.
3.	Gn	Προκ.
4.	$\neg \neg \forall x Gx$	"Αρνησ. συμ.
5.	$\forall x Gx$	$\Delta \neg \neg$. 4
6.	$\exists y (Fy \wedge Lny)$	$\Delta \forall$. 1.
7.	$Fa \wedge Lna$	$\Delta \exists$. 6
8.	Fa	$\Delta \wedge$. 7
	Lna	
9.	$Ga \rightarrow \neg Fa$	$\Delta \forall$. 2.
10.	Ga	$\Delta \forall$. 5.
	$\swarrow \quad \searrow$ $\neg Ga \quad \neg Fa$ $* \quad *$	$\Delta \rightarrow$. 9.

προσίζει ότι μετά το βήμα 7, αφού πλέον έχουμε ένα νέο άτομικό σταθμό α θα ήζαν νόμιμο να συνεχίσουμε ως εξής:

8.	$\exists y (Fy \wedge Lay)$	$\Delta \forall$ 1 με χρήση του α.
9.	$Fb \wedge Lab$	$\Delta \exists$ 8
10.	$\exists y (Fy \wedge Lby)$	$\Delta \forall$ 1 με χρήση του b.
11.	$Fc \wedge Lbc$	$\Delta \exists$ 10.
12.	$\exists y (Fy \wedge Lcy)$	$\Delta \forall$ 1 με χρήση του c.

"Αν και αυτή η κατασκευή είναι νόμιμη, το δένδροδιάγραμμα δεν ολοκληρώνεται ποτέ και επεκτείνεται στο άπειρο.
 Συμπέρασμα: Σε αντίθεση με τον προτασιακό λογισμό, στον κλασικό μαθηματικό υπάρχουν δένδροδιαγράμματα στα οποία η εφαρμογή

των κανόνων δεν ολοκληρώνεται ποτέ με αποτέλεσμα να
 ανεπίστανται επί άπειρον χωρίς να φτάνουν στο έρῳγμα
 της ἔκχυρῳσης του ἔπι χειρῳκῳς.

6B. Μερικοί ἄνθρωποι εἶναι ἄλαζῳνοι.
 Κανένας δὲν συμπροῳεί ἕναν ἄλαζῳνα.
 ἔ. κάποιος ἄνθρωπος δὲν συμπροῳοῳνται ἀπῳ κανένα.

- | | | |
|-----|--|----------------------------|
| 1. | $\exists x Fx$ | Προκ. |
| 2. | $\forall x \forall y (Fy \rightarrow \neg Lxy)$ | Προκ. |
| 3. | $\neg \exists x \forall y \neg Lyx$ | Ἄρν. συμπ. |
| 4. | $\forall x \forall y \neg Lyx$ | $\Delta \neg \exists$. 3. |
| 5. | Fa | $\Delta \exists$. 1 |
| 6. | $\neg \forall y \neg Lya$ | $\Delta \forall$. 4 |
| 7. | $\exists y \neg \neg Lya$ | $\Delta \neg \forall$. 6. |
| 8. | $\neg \neg Lba$ | $\Delta \exists$. 7. |
| 9. | $\forall y (Fy \rightarrow \neg Lby)$ | $\Delta \forall$. 2. |
| 10. | $Fa \rightarrow \neg Lba$ | $\Delta \forall$. 9. |
| 11. | $\begin{array}{c} \wedge \\ \sim Fa \quad \neg Lba \\ * \quad * \end{array}$ | $\Delta \rightarrow$. 10. |

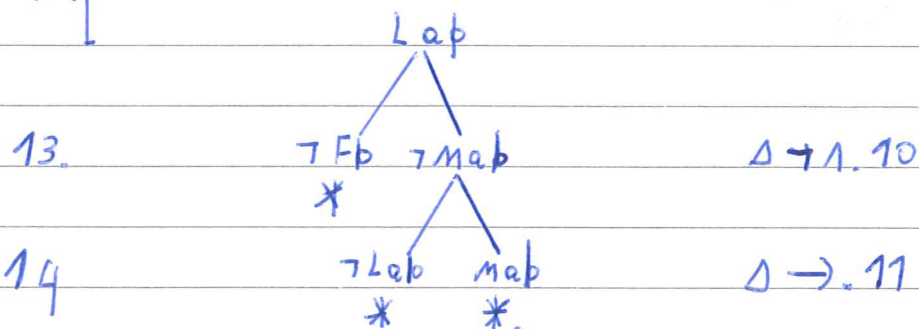
6. γ

"Ο καθένας θαυμάζει κάποιον φιλόσοφο.

"Όποιον θαυμάζει κάποιος, τον σέβεται.

∴ "Ο καθένας σέβεται κάποιον φιλόσοφο.

- | | | |
|-----|---|---------------------------|
| 1. | $\forall x \exists y (Fy \wedge Lxy)$ | προκ. |
| 2. | $\forall x \forall y (Lxy \rightarrow Mxy)$ | προκ. |
| 3. | $\neg \forall x \exists y (Fy \wedge xMy) \vee$ | Αρν. συμπ. |
| 4. | $\exists x \neg \exists y (Fy \wedge Mxy)$ | $\Delta \neg$. 3 |
| 5. | $\neg \exists y (Fy \wedge may)$ | $\Delta \exists$. 4. |
| 6. | $\forall y \neg (Fy \wedge may)$ | $\Delta \neg \exists$. 5 |
| 7. | $\exists y (Fy \wedge \neg Ley)$ | $\Delta \forall$. 1 |
| 8. | $\forall y (Lay \rightarrow may)$ | $\Delta \forall$. 2. |
| 9. | $Fb \wedge Lab$ | $\Delta \exists$. 7 |
| 10. | $\neg (Fb \wedge Mab)$ | $\Delta \forall$. 6. |
| 11. | $Lab \rightarrow Mab$ | $\Delta \forall$. 8. |
| 12. | $\neg Fb$ | $\Delta \wedge$. 9. |



68.

"Όλα τα άτομα είναι θηλαστικά"

∴ Το κεφάλι ενός ατόμου είναι κεφάλι ενός θηλαστικού.

1. $\forall x (Fx \rightarrow Gx)$. Προκ.
 2. $\neg \forall x [\exists y (Fy \wedge Mxy) \rightarrow \exists z (Gz \wedge Mxz)]^{\vee}$ "Άρυσ. συμπίρ."

3. $\exists x \neg [\exists y (Fy \wedge Mxy) \rightarrow \exists z (Gz \wedge Mxz)]^{\vee} \Delta \neg \forall . 2.$

4. $\neg [\exists y (Fy \wedge May) \rightarrow \exists z (Gz \wedge Mxz)]^{\vee} \Delta \exists . 3.$

5. [a. $\exists y (Fy \wedge May)^{\vee}$
 b. $\neg \exists z (Gz \wedge Mxz)^{\vee}$ $\Delta \neg \rightarrow . 4$

6. $\forall z \neg (Gz \wedge Mxz)$ $\Delta \neg \exists . 5b.$

7. $Fb \wedge Mab$ $\Delta \exists . 5a.$

8. Fb $\Delta \wedge . 7$
 Mab

9. $Fb \rightarrow Gb$ $\Delta \forall . 1$

10. $\neg (Gb \wedge Mab)$ $\Delta \forall . 6.$

11. $\neg Fb$ Gb $\Delta \rightarrow . 9$

12. $\neg Gb$ $\neg Mab$ $\Delta \sim \wedge . 10$
 *

6. ε
 "Ο καθένας αγαπά όποιον που αγαπά κάποιον
 "Ο Ρωμαίος αγαπά την Ιουλιέττα.
 "Όσοι αγαπούν την Ιουλιέττα.

- | | | |
|-----|---|---------------------------------------|
| 1. | $\forall x \forall y (\exists z L yz \rightarrow Lxy)$ | Προϋ. |
| 2. | Lmn | Προϋ. |
| 3. | $\neg \forall x Lxn$ | "Αρν. συμπ. |
| 4. | $\exists x \neg Lxn$ | $\Delta \neg \forall . 3.$ |
| 5. | $\neg Lan$ | $\Delta \exists . 4.$ |
| 6. | $\forall y (\exists z L yz \rightarrow L ay)$ | $\forall \forall . 1.$ με χρήση του a |
| 7. | $\exists z Lnz \rightarrow Lan$ | $\Delta \forall . 6.$ $\gg \gg n.$ |
| 8. | $\begin{array}{c} \wedge \\ \sim \exists z Lnz \quad Lan \\ \downarrow \quad \quad \quad * \\ \forall z \neg Lnz \end{array}$ | $\Delta \rightarrow . 7$ |
| 9. | $\forall z \neg Lnz$ | $\Delta \forall \exists . 8.$ |
| 10. | $\sim Lnm$ | $\Delta \forall . 9$ με χρήση του m. |
| 11. | $\forall y (\exists z L yz \rightarrow Lny)$ | $\Delta \forall . 1$ με χρήση του m. |
| 12. | $\exists z Lmz \rightarrow Lnm$ | $\Delta \forall . 11$ με χρήση του m. |
| 13. | $\begin{array}{c} \wedge \\ \sim \exists z Lmz \quad Lnm \\ \downarrow \quad \quad \quad * \\ \forall z \neg Lmz \end{array}$ | $\Delta \rightarrow . 12.$ |
| 14. | $\forall z \neg Lmz$ | $\Delta \sim \exists . 13.$ |
| 15. | $\neg Lmn$
* | $\Delta \forall . 14$ |

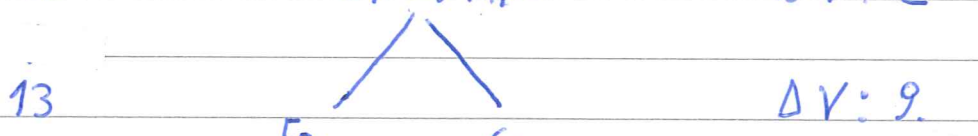
"Ένα δένδροδιάγραμμα μπορεί να αναπτύσσεται επ' άπειρον χιρώ
αυτό να δείχνει ότι το υπο έξιταση έπιχείρημα είναι άπειρο
(βλ. Παράδ. 6α). Όπως σε άλλες περιπτώσεις το δένδρο ολοκληρώνεται
(δηλαδή δεν υπάρχουν άλλοι κανόνες να εφαρμοστούν) αφήνοντας ένα
κλάδο άνοιχτό. Έτσι περίπτωση αυτή ή μη έπιτυχότητα του
έπιχειρήματος έχει αποδειχθεί και από τον άνοιχτό κλάδο
μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο που κάνει τις
Προκείμενες αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές.

Παράδειγμα 1

- | | | |
|-----|--------------------------------------|--------------------------------|
| 1. | $\forall x (Fx \rightarrow Hx)$ | προν. |
| 2. | $\forall x (Gx \rightarrow Hx)$ | προν. |
| 3. | $\neg \forall x (Fx \rightarrow Gx)$ | "Αρνησ. συμπ. |
| 4. | $\exists x \neg (Fx \rightarrow Gx)$ | $\Delta \neg \exists$. 3. |
| 5. | $\neg (Fa \rightarrow Ga)$ | $\Delta \exists$. 4 |
| 6. | Fa
$\neg Ga$ | $\Delta \sim \rightarrow$. 5. |
| 7. | $Fa \rightarrow Ha$ | $\Delta \forall$. 1 |
| 8. | $Ga \rightarrow Ha$ | $\Delta \forall$. 2. |
| 9. | $\neg Fa$ *
Ha | $\Delta \rightarrow$. 7. |
| 10. | $\neg Ga$ *
Ha | $\Delta \rightarrow$. 8. |

Παρέδειγμα 2.

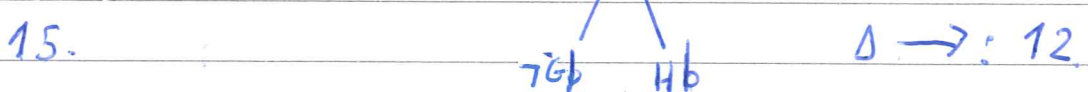
1.	$\forall x (F_x \vee G_x)$	πρ.
2.	$\forall x (G_x \rightarrow H_x)$	πρ.
3.	$\neg (\forall x F_x \vee \forall x H_x) \checkmark$	Άρν. συμπ.
4.	$\neg \forall x F_x \checkmark$	$\Delta \neg \forall : 3.$
	$\neg \forall x H_x \checkmark$	
5.	$\exists x \neg F_x \checkmark$	$\Delta \exists : 4a.$
6.	$\exists x \neg H_x \checkmark$	$\Delta \exists : 4b.$
7.	$\neg Fa$	$\Delta \exists : 5.$
8.	$\neg Hb$	$\Delta \exists : 6.$
9.	$Fa \vee Ga \checkmark$	$\Delta \forall : 1$ με χρήση 200 a
10.	$Fb \vee Gb$	$\Delta \forall : 1$ > b
11.	$Ga \rightarrow Ha \checkmark$	$\Delta \forall : 2$ με χρήση 200 a
12.	$Gb \rightarrow Hb \checkmark$	$\Delta \forall : 2$ > 200 b.



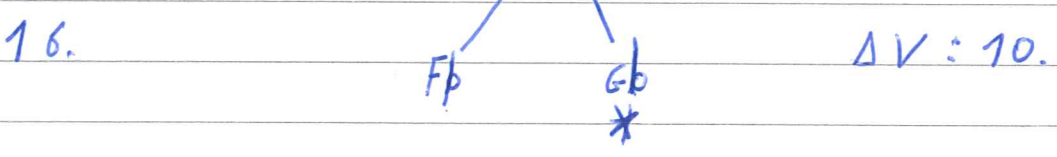
$\Delta \forall : 9.$



$\Delta \rightarrow : 11$



$\Delta \rightarrow : 12.$



$\Delta \forall : 10.$