Κεφάλαιο 10

ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Διαθέτουμε πλέον αρκετές γνώσεις και αρκετά εργαλεία για να αντιμετωπίσουμε μια μεγάλη ποικιλία προβλημάτων σχετικά με τις κινήσεις και τις δυνάμεις. Η βασική δομή έχει οικοδομηθεί, έτσι ώστε να μας επιτρέπει να κατανοούμε το είδος εννοιών, ερωτημάτων και μεθόδων αντιμετώπισης που διαθέτει το ρεπερτόριο του φυσικού επιστήμονα. Εξακολουθεί όμως να υπάρχει ένα επικίνδυνο κενό που πρέπει να καλυφθεί, μία κεντρική στήλη που πρέπει να τοποθετηθεί στη θέση της προκειμένου να καταστεί δυνατή η οικοδόμηση του επόμενου επιπέδου.

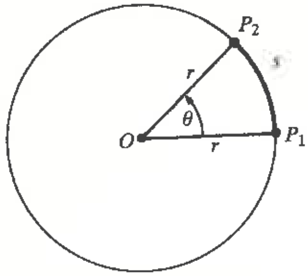
Στα προηγούμενα κεφάλαια εξοικειωθήκαμε πρώτα με την περιγραφή της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης κατά μήκος μιας ευθείας γραμμής, και ιδιαιτέρως με την ιστορικά τόσο σημαντική περίπτωση της ελεύθερης πτώσης. Έπειτα περάσαμε στη γενική κίνηση του βλήματος που συνιστά παράδειγμα κίνησης σε μια επίπεδη επιφάνεια και εξετάζεται ως υπέρθεση δύο απλών κινήσεων. Κατόπιν στραφήκαμε στις *δυνάμεις* που χρειάζονται για να επιταχύνουν τα σώματα κατά μήκος μιας ευθείας γραμμής. Όμως, στη φύση υπάρχει και ένα άλλο είδος συμπεριφοράς, που δεν ανάγεται στους όρους που χρησιμοποιήσαμε ως εδώ. Πρόκειται για την *περιστροφική κίνηση*, δηλαδή την κίνηση ενός αντικειμένου σ' ένα επίπεδο γύρω από ένα κέντρο, υπό την επίδραση μιας δύναμης η οποία μεταβάλλει συνεχώς την κατεύθυνση δράσης της. Εδώ υπάγεται, εξίσου, η κίνηση των πλανητών, των σφονδύλων και των ηλεκτρονίων.

Θα ακολουθήσουμε τον ίδιο τρόπο αντιμετώπισης όπως προηγουμένως: Θα εστιάσουμε την προσοχή μας σε μια απλή περίπτωση αυτού του είδους κίνησης, συγκεκριμένα στην κυκλική κίνηση. Θα πραγματευτούμε πρώτα την κινηματική της περιστροφής χωρίς να αναφερθούμε στις δυνάμεις που εμπλέκονται, και τελικά θα μελετήσουμε τη δυναμική της περιστροφής και τον στενό της σύμμαχο, την ταλάντωση.

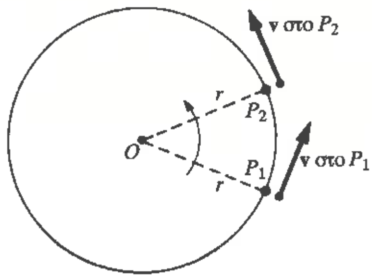
10.1 Η ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΗΣ ΟΜΑΛΗΣ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Σκεφθείτε ένα σημείο που περιστρέφεται με σταθερή ταχύτητα διαγράφοντας μια κυκλική τροχιά γύρω από ένα κέντρο O. Το σημείο μπορεί να είναι μία κηλίδα πάνω σ' έναν δίσκο γραμμοφώνου ή ένας τόπος που βρίσκεται πάνω στην περιστρεφόμενη υδρόγειο ή, κατά ικανοποιητική προσέγγιση, ο πλανήτης Αφροδίτη καθώς ακολουθεί την τροχιά του γύρω από τον Ήλιο.

Για να μπορέσουμε να διερευνήσουμε αυτήν την κίνηση, πρέπει πρώτα να είμαστε σε θέση να την περιγρά-



Σχ. 10.1 Ορισμός μιας γωνίας με μονάδα μέτρησης το ακτίνιο: $\theta = s/r$.



Σχ. 10.2

ψουμε. Πώς θα το πετύχουμε με λιτότητα και ακρίβεια; Χρειάζονται κάποιες απλές νέες έννοιες:

α) Η *συχνότητα* περιστροφής είναι ο αριθμός των περιστροφών που εκτελούνται ανά μονάδα χρόνου (συμβολίζεται με το γράμμα n). Εκφράζεται σε 1/s (ή s^{-1}), αφού η φράση «αριθμός περιστροφών» δεν έχει θέση ανάμεσα σε τόσο θεμελιακά φυσικά μεγέθη όπως η μάζα, το μήκος και ο χρόνος. Έτσι, ένας δίσκος που εκτελεί 78 στροφές ανά λεπτό (rpm) έχει μια συχνότητα περιστροφής 78/60 ή 1,3 s^{-1}.

β) Κατόπιν, ορίζουμε την έννοια της *περιόδου περιστροφής* (συμβολίζεται με T) ως τον χρόνο που απαιτείται για μία πλήρη περιστροφή. Είναι ακριβώς το αντίστροφο της n, και εκφράζεται με μονάδα μέτρησης το δευτερόλεπτο.

$$T = \frac{1}{n}. \tag{10.1}$$

Συνεπώς ο δίσκος θα είχε μια περίοδο περιστροφής 0,77 s.

γ) Έχουμε ανάγκη από μια μονάδα μέτρησης γωνίας. Η γωνία θ που διαγράφεται όταν ένα σημείο κινείται από τη θέση P_1 στη θέση P_2 μιας κυκλικής τροχιάς (Σχ. 10.1) μπορεί, βέβαια, να μετρηθεί σε μοίρες, αλλά εδώ μας εξυπηρετεί καλύτερα να εκφράσουμε τη θ μέσω της εξίσωσης ορισμού

$$\theta = \frac{s}{r}. \tag{10.2}$$

Αυτό το πηλίκο του τόξου προς την ακτίνα εκφράζει ένα μέγεθος χωρίς διαστάσεις. Ωστόσο προσδίδουμε το όνομα *ακτίνιο* (*radian*, rad) σ' αυτό το μέτρο της γωνίας, εν μέρει για να διακρίνεται από τις μοίρες του τόξου.

Προκειμένου να προσδιοριστεί ο συντελεστής μετατροπής μεταξύ αυτών των δύο ειδών γωνιακού μέτρου, σκεφτείτε την ειδική περίπτωση όπου $\theta = 360°$. Γι' αυτήν τη γωνία, $s = 2\pi r$, δηλαδή το αντίστοιχο τόξο ισούται με την περιφέρεια του κύκλου. Άρα $\theta = 2\pi r/r = 2\pi$ ακτίνια. Αν $360° = 2\pi$ ακτίνια, τότε $1° = 0{,}0175$ rad και 1 rad = 57,3°.

δ) Τώρα θα διερευνήσουμε την ταχύτητα ενός σωματιδίου που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση. Η λέξη «ομαλή» σημαίνει, προφανώς, ότι δεν μεταβάλλεται ο ρυθμός περιστροφής (η ταχύτητα s/t). Ωστόσο, για μελλοντικές αναφορές, είναι καλό να θυμόμαστε ότι το διάνυσμα της ταχύτητας που συνδέεται με το περιστρεφόμενο σημείο αλλάζει *κατεύθυνση* από τη μία στιγμή στην επόμενη, μολονότι το μέτρο του, που παριστάνεται από το μήκος των βελών στο Σχ. 10.2, παραμένει εδώ σταθερό.

Ας εστιάσουμε τώρα πλήρως την προσοχή μας στο μέτρο της ταχύτητας, που μας δίνεται και πάλι από τον λόγο του διαστήματος που διανύεται προς τον χρόνο που χρειάζεται για να διανυθεί αυτό το διάστημα. Αν γνωρίζουμε την περίοδο ή τη συχνότητα της κίνησης και την απόσταση r της θέσης του κινητού από το κέντρο του κύκλου, μπορούμε να βρούμε την v απευθείας (συνήθως σε m/s), αν συνειδητοποιήσουμε ότι όταν $t = T$, τότε $s = 2\pi r$, δηλαδή

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi n r. \qquad (10.3)$$

ε) Το μέγεθος v που ορίσαμε με αυτήν την τελευταία εξίσωση, εκφράζει το μέτρο της εφαπτομενικής ή *γραμμικής* ταχύτητας του σημείου κατά μήκος της κατεύθυνσης της τροχιάς του. Ανάλογη προς αυτόν τον χρονικό ρυθμό μεταβολής της διανυόμενης διαδρομής είναι η ισχυρή έννοια της *γωνιακής ταχύτητας* (που συμβολίζεται με το γράμμα ω) που εκφράζει τον χρονικό ρυθμό μεταβολής της γωνίας. Εξ ορισμού, για το είδος κίνησης που μελετάμε εδώ,

$$\omega = \frac{\theta}{t}, \qquad (10.4)$$

ένα μέγεθος του οποίου οι μονάδες είναι s^{-1} ή, πιο συνηθισμένα, rad/s. Αν τυχόν γνωρίζουμε την n ή την T, μπορούμε να βρούμε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας με βάση το γεγονός ότι αν $t = T$, τότε $\theta = 2\pi$, ή

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n. \qquad (10.5)$$

Η σχέση ανάμεσα στην ω και την v είναι προφανής, αν συγκρίνουμε τις Εξ. (10.3) και (10.5):

$$v = \omega r. \qquad (10.6)$$

Ωστόσο ο άμεσος έλεγχος της εξίσωσης ορισμού (10.4) για την ω φανερώνει μια σημαντική διαφορά ανάμεσα στη v και την ω. Όλα τα σημεία ενός στερεού περιστρεφόμενου σώματος (π.χ. ενός δίσκου), όποια και αν είναι η θέση τους πάνω σ' αυτό το σώμα, έχουν την ίδια χρονική στιγμή την *ίδια* ω, ενώ αυτά τα διαφορετικά σημεία έχουν πολύ διαφορετικές τιμές της v, οι οποίες εξαρτώνται από τις αντίστοιχες αποστάσεις τους r από τον άξονα περιστροφής. Ως εκ τούτου, η έννοια της γωνιακής ταχύτητας ω μας δίνει τη δυνατότητα να εισαγάγουμε στα προβλήματα της περιστοφικής κίνησης σταθερότητες που δεν μπορούμε να αποκτήσουμε απευθείας συναρτήσει μόνον της v. Δεν υπάρχει καλύτερος λόγος για να πλάσουμε μία νέα έννοια σε οποιοδήποτε πεδίο της επιστήμης.

Πρόβλημα 10.1 Ποιο είναι το μέγεθος της γωνίας (σε ακτίνια και σε μοίρες) που αντιστοιχεί στο τόξο που διανύεται από μία κηλίδα, που βρίσκεται σ' ένα δίσκο 78 rpm, όταν αυτός περιστρέφεται σταθερά για 5 min; Ποιες είναι οι γραμμικές ταχύτητες δύο σημείων που απέχουν από το κέντρο περιστροφής 3 και 12 cm αντιστοίχως; Ποιες είναι οι αντίστοιχες γωνιακές ταχύτητες;

Πρόβλημα 10.2 Ποιο είναι το μήκος της αυλακιάς που διανύεται από τη βελόνα ενός πικάπ ενόσω αυτό παίζει έναν δίσκο 33 rpm; (Σ' αυτό το πρόβλημα πρέπει να κάνετε και να αναφέρετε ρητά κάποιες εύλογες παραδοχές.)

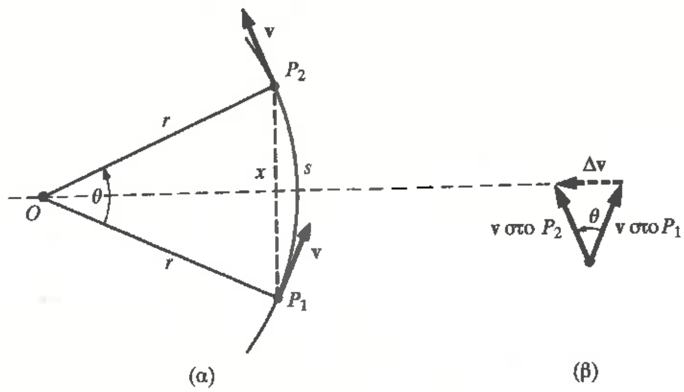
Πρόβλημα 10.3 Βρείτε τη συχνότητα περιστροφής, τη γραμμική ταχύτητα και τη γωνιακή ταχύτητα ενός σημείου που βρίσκεται πάνω στον ισημερινό (ακτίνα της Γης = 6380 km, περίοδος περιστροφής γύρω από τον άξονά της = 23 ώρες 56 λεπτά).

Πρόβλημα 10.4 Υποθέστε ότι σ' ένα σημείο του ισημερινού της Γης έχει εγερθεί ένας ψηλός πύργος. Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του προβλήματος 10.3, υπολογίστε τη γραμμική ταχύτητα ενός αντικειμένου που βρίσκεται στην κορυφή του πύργου. Ένα αντικείμενο που βρίσκεται στη βάση του πύργου κινείται με την ίδια ακριβώς γραμμική ταχύτητα; Αν αφήναμε να πέσει το αντικείμενο που βρίσκεται στην κορυφή (αγνοώντας την αντίσταση του αέρα και υποθέτοντας ότι ο πύργος είναι εντελώς κατακόρυφος), θα περιμένατε να προσγειωθεί ακριβώς στη βάση του πύργου; Αν όχι, προς ποια κατεύθυνση θα περιμένατε να εκτραπεί; (Δεν χρειάζεται να υπολογίσετε το πραγματικό μέγεθος της απόκλισης, αλλά πρέπει να εξηγήσετε ποιοτικά τον λόγο της απόκλισης, καθώς και να αποτιμήσετε το επιχείρημα του Γαλιλαίου που διατυπώθηκε σε μια υποσημείωση κοντά στο τέλος του Υποκεφαλαίου 5.3.)

Πρόβλημα 10.5 Υπολογίστε την κατά προσέγγιση γραμμική ταχύτητα του πλανήτη μας κατά την εκτέλεση της ετήσιας διαδρομής του γύρω από τον Ήλιο (υποθέτοντας ότι διαγράφει κυκλική τροχιά με ακτίνα $1{,}5 \times 10^{11}$ m).

10.2 ΚΕΝΤΡΟΜΟΛΟΣ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Παρατηρήσαμε ότι κατά την κυκλική κίνηση που διεξάγεται με σταθερή ταχύτητα, το διάνυσμα της ταχύτητας, παρόλο που δεν μεταβάλλεται ως προς το μέτρο, αλλάζει συνεχώς κατεύθυνση. Σύμφωνα με τους νόμους του Νεύτωνα για την κίνηση, εάν το διάνυσμα της ταχύτητάς ενός σώματος μεταβάλλεται καθ' οιονδήποτε τρόπο, τότε στο σώμα πρέπει να ασκείται μία δύναμη, αφού διαφορετικά, δηλαδή αν δεν ασκούνταν καμία καθαρή δύναμη, αυτό θα συνέχιζε να κινείται με σταθερή ταχύτητα σε μια ευθεία. Αλλά αν ασκείται κάποια δύναμη, τότε πρέπει να αναπτύσσεται και μία επιτάχυνση. Έτσι, όταν ένα σώμα εκτελεί κυκλική κίνηση με σταθερή ταχύτητα, βρίσκεται στη φαινομενικά παράδοξη κατάσταση να επιταχύνεται χωρίς όμως ποτέ να κινείται πιο γρήγορα (ή πιο αργά)!

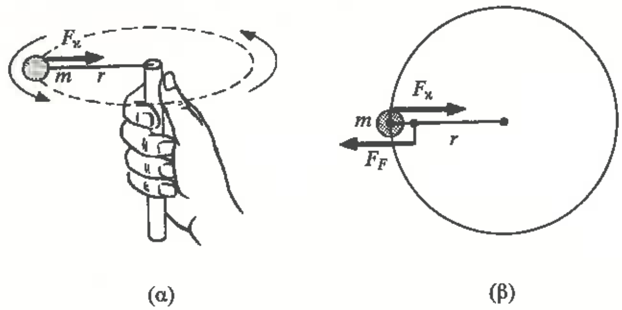


Σχ. 10.3

Προκειμένου να αποσαφηνίσουμε αυτήν την κατάσταση, πρέπει να δώσουμε έμφαση στη διάκριση που κάνει ο φυσικός ανάμεσα στην ταχύτητα και στο μέτρο της. Όπως είδαμε στο Υποκεφάλαιο 8.2, η ταχύτητα αποτελεί ένα *διανυσματικό* μέγεθος, δηλαδή ένα μέγεθος που διαθέτει και μέτρο και κατεύθυνση.* Το μέτρο της ταχύτητας είναι ένα *βαθμωτό* μέγεθος, δηλαδή ένα μέγεθος που δεν χαρακτηρίζεται από καμία κατεύθυνση. Οποιαδήποτε μεταβολή της ταχύτητας συνιστά επιτάχυνση, ανεξάρτητα από το αν μεταβάλλεται το μέτρο ή όχι.

Η μεταβολή της κατεύθυνσης του διανύσματος της ταχύτητας για την περίπτωση της κυκλικής κίνησης δείχνεται στο Σχ. 10.2. Τώρα χρειάζεται να αναλύσουμε αυτήν τη μεταβολή με περισσότερη λεπτομέρεια (Σχ. 10.3). Το διάνυσμα που παριστάνει την «**υ** στο P_2» είναι η συνισταμένη δύο άλλων διανυσμάτων τα οποία πρέπει να προστεθούν μεταξύ τους: το διάνυσμα «**υ** στο P_1» και το διάνυσμα «**Δυ**», το οποίο παριστάνει τη μεταβολή της ταχύτητας που συμβαίνει κατά τη διάρκεια του

* Δείτε το Παράρτημα VIII.



Σχ. 10.4 Μια κεντρομόλος δύναμη ασκείται στην πέτρα, ενώ στο νήμα και στο χέρι ασκείται μια φυγόκεντρος δύναμη.

χρονικού διαστήματος Δt κατά το οποίο το σώμα κινείται, ακολουθώντας την περιφέρεια του κύκλου, από το σημείο P_1 στο σημείο P_2.

Όπως μπορείτε να δείτε στο διάγραμμα, το διάνυσμα $\mathbf{\Delta v}$ κατευθύνεται *προς το κέντρο του κύκλου*. (Μπορεί να δοθεί μια μαθηματική απόδειξη αυτού του γεγονότος, αλλά δεν μας φαίνεται απαραίτητο.) Η επιτάχυνση ορίζεται ως το όριο προς το οποίο τείνει το πηλίκο της μεταβολής της ταχύτητας προς το χρονικό διάστημα, καθώς το τελευταίο γίνεται όλο και μικρότερο:

$$\boldsymbol{a} = \operatorname*{limit}_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right).$$

Η επιτάχυνση είναι επίσης διάνυσμα το οποίο κατευθύνεται προς το κέντρο του κύκλου. Γι' αυτό και ονομάζεται *κεντρομόλος επιτάχυνση* («κεντρομόλος» σημαίνει ότι «τείνει προς το κέντρο»). Η αντίστοιχη δύναμη που, σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, πρέπει να ασκείται στο σώμα για να παράγει αυτήν την επιτάχυνση είναι ένα διάνυσμα που έχει την ίδια κατεύθυνση, $\mathbf{F} = m\boldsymbol{a}$, και το οποίο αποκαλείται *κεντρομόλος δύναμη* (όπου m είναι η μάζα του κινούμενου σώματος).

Δυστυχώς η συνήθης γλώσσα που χρησιμοποιούμε για να περιγράψουμε την κίνηση, εδώ προκαλεί σύγχυση. Έχουμε συνηθίσει ν' ακούμε για «φυγόκεντρο» δύναμη, μία δύναμη που λέγεται ότι δρα σ' ένα περιστρεφόμενο σώμα *απομακρύνοντάς* το από το κέντρο. Δεν θα χρησιμοποιήσουμε αυτόν τον όρο, γιατί, παρά τις συναφείς ψευδαισθήσεις, δεν υπάρχει καμία τέτοια δύναμη. Αν δέσετε ένα βάρος σ' ένα νήμα και αρχίσετε να το περιστρέφετε γύρω από το κεφάλι σας (Σχ. 10.4) θα νομίζετε ότι αισθάνεστε μια τέτοια δύναμη, αλλά αυτή είναι μία δύναμη που ασκείται σε σας που βρίσκεστε στο κέντρο, και όχι η δύναμη που επιδρά στο περιστρεφόμενο σώμα. Στην πραγματικότητα πρόκειται για τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα, εκείνον που αφορά την αντίδραση. Ή, αν το νήμα σπάσει, θα δείτε το αντικείμενο να εκσφενδονίζεται πέρα από την κυκλική τροχιά που ακολουθούσε προηγουμένως. Αλλά ούτε υπάρχει καμία δύναμη που να το έλκει ώστε να εκσφενδονιστεί (δεν υπολογίζουμε τη βαρύτητα που κατευθύνεται προς τα κάτω) ούτε αυτό απομακρύνεται κατά μήκος μιας ακτίνας.

Ο Ισαάκ Νεύτων ήταν ένας από τους πρώτους που αναγνώρισε ότι όλα αυτά τα φαινόμενα οφείλονται στη φυσική τάση – την *αδράνεια* – όλων των σωμάτων να συνεχίζουν να κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση, αν δεν εξαναγκαστούν να κινηθούν διαφορετικά. Αν το νήμα σπάσει τη στιγμή που το βάρος βρίσκεται στο σημείο P_1 (Σχ. 10.3), τότε αυτό θα «εκτοξευθεί εφαπτομενικά» (και όχι κατά μήκος της ακτίνας) – δηλαδή θα συνεχίσει να κινείται προς την κατεύθυνση που δείχνει το βέλος του διανύσματος της ταχύτητας στο σημείο P_1. (Σ' αυτήν την περίπτωση τουλάχιστον, η κοινή έκφραση είναι ακριβής, αφού το διάνυσμα της ταχύτητας όντως βρίσκεται πάνω σε μια γραμμή που εφάπτεται του κύκλου στο σημείο P_1.) Ενόσω το αντικείμενο εξακολουθεί να είναι συνδεδεμένο με το νήμα και να κινείται σε κυκλική τροχιά, πρέπει εσείς να του ασκείτε μια δύναμη που κατευθύνεται προς εσάς – την κεντρομόλο δύναμη – προκειμένου να το εμποδίσετε να εκτοξευθεί. Και εφόσον ασκείτε μία δύναμη πάνω στο νήμα, πρέπει και το νήμα, βάσει του τρίτου νόμου του Νεύτωνα, να ασκεί μια ίση και αντίθετης κατεύθυνσης δύναμη στο χέρι σας. Η δύναμη προς τα έξω που *εσείς* αισθάνεστε αποτελεί την αντίδραση στη δύναμη που εφαρμόζετε.

Ποιο είναι το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης; Με άλλα λόγια πώς εξαρτάται από το μέτρο της ταχύτητας περιστροφής και το μέγεθος της κυκλικής τροχιάς; Η απάντηση σ' αυτό το ερώτημα ήταν καθοριστική όσον αφορά τη θεωρία του Νεύτωνα για το ηλιακό σύστημα. Όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, αποτελούσε ένα απαραίτητο βήμα προς τον νόμο της βαρύτητας. Ο Νεύτωνας επεξεργάστηκε τη θεωρία της κεντρομόλου επιτάχυνσης κατά τη διάρκεια της έκρηξης της δημιουργικής του δραστηριότητας στα χρόνια της Πανούκλας, 1665-66, αν και η δημοσίευσή της, το 1687, πραγματοποιήθηκε 14 χρόνια μετά από τη δημοσίευση του ίδιου αποτελέσματος από τον μεγάλο σύγχρονό του, τον Δανό φυσικό Κρίστιαν Χόυχενς. Το αποτέλεσμα όσον αφορά το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης είναι πολύ απλό:

$$a = \frac{v^2}{r}. \qquad (10.7)$$

Άρα η κεντρομόλος επιτάχυνση αυξάνει ανάλογα με το τετράγωνο της γραμμικής ταχύτητας του σώματος που κινείται στην τροχιά του, αλλά μειώνεται αντιστρόφως ανάλογα προς την ακτίνα του κύκλου.

Πριν στραφούμε στην απόδειξη αυτού του αποτελέσματος, ας συνοψίσουμε τη φυσική του σημασία, παραθέτοντας την πολύ σαφή διατύπωση του Νεύτωνα στις *Αρχές (Principia)* του 1687:

«Ορισμός: Κεντρομόλος δύναμη είναι εκείνη με την οποία τα σώματα έλκονται ή ωθούνται ή με οποιοδήποτε τρόπο τείνουν προς ένα σημείο ανάλογο προς ένα κέντρο. Τέτοιου είδους είναι η βαρύτητα, λόγω της οποίας τα σώματα τείνουν προς το κέντρο της Γης, ο μαγνητισμός λόγω του οποίου το σίδερο τείνει προς τον μαγνητίτη, και εκείνη η δύναμη, ό,τι κι αν είναι, λόγω της οποίας οι πλανήτες εκτρέπονται διαρκώς από τις ευθύγραμμες κινήσεις, τις οποίες κατά τα άλλα θα ακολουθούσαν, και εξαναγκάζονται να περιφέρονται ακολουθώντας καμπυλόγραμμες τροχιές. Μία πέτρα που περιστρέφεται ενώ βρίσκεται σε μια σφεντόνα, προσπαθεί να απομακρυνθεί από το χέρι που τη γυρίζει. Και με αυτήν την προσπάθεια, τεντώνει το λουρί της σφεντόνας, και αυτό γίνεται με τόσο μεγαλύτερη δύναμη όσο μεγαλύτερη είναι η ταχύτητα με την οποία περιφέρεται, και οποτεδήποτε αφεθεί να φύγει, εκσφενδονίζεται μακριά. Εκείνη τη δύναμη που αντιτίθεται σ' αυτήν την προσπάθεια, και διά της οποίας η σφεντόνα διαρκώς τραβά την πέτρα πίσω προς το χέρι και την συγκρατεί στην τροχιά της, αφού κατευθύνεται προς το χέρι που αντιστοιχεί στο κέντρο, την αποκαλώ κεντρομόλο δύναμη. Και πρέπει να κατανοήσουμε ότι το ίδιο συμβαίνει σε όλα τα σώματα που περιφέρονται ακολουθώντας οποιεσδήποτε τροχιές. Όλα προσπαθούν να απομακρυνθούν από τα κέντρα των τροχιών τους. Και αν δεν υπήρχε η αντίθεση μιας ... δύναμης που τα συγκρατεί και τα διατηρεί στις τροχιές τους, την οποία ως εκ τούτου ονομάζω κεντρομόλο, αυτά θα πετάγονταν μακριά ακολουθώντας ευθείες διαδρομές με ομαλή κίνηση ... Ούτε η Σελήνη θα μπορούσε, χωρίς κάποια δύναμη τέτοιου είδους, να διατηρηθεί στην τροχιά της. Αν αυτή η δύναμη ήταν πολύ μικρή, δεν θα μπορούσε να εκτρέψει επαρκώς τη Σελήνη έξω από μία ευθύγραμμη πορεία· αν ήταν πολύ μεγάλη, θα την εξέτρεπε πάρα πολύ, και θα την τραβούσε από την τροχιά της κάτω προς τη Γη. Είναι αναγκαίο η δύναμη να έχει ακριβώς το σωστό μέτρο, και είναι έργο των μαθηματικών να προσδιορίσουν εκείνη τη δύναμη που επαρκεί ακριβώς για να συγκρατεί ένα σώμα σε μια δεδομένη τροχιά, με μια δεδομένη ταχύτητα ...»

10.3 Η ΕΞΑΓΩΓΗ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΕΝΤΡΟΜΟΛΟ ΔΥΝΑΜΗ

Στο Σχ. 10.3, ένα σημείο κινείται ομαλά από το P_1 στο P_2, διαγράφοντας ένα τόξο s που αντιστοιχεί σε μια γωνία θ. Τα μέτρα των ταχυτήτων στα σημεία P_1 και P_2 είναι ίσα, αλλά η κατεύθυνση των διανυσμάτων ανάμεσα στα σημεία P_1 και P_2 μεταβάλλεται κατά τη γωνία θ. Η μεταβολή της ταχύτητας $\Delta \mathbf{v}$ στο Σχ. 10.3(β) υπολογίζεται με τον συνήθη τρόπο. Τώρα προσέξτε ότι το τρίγωνο αυτού του σχήματος και εκείνο που περικλείεται από το P_1OP_2 στο Σχ. 10.3(α), είναι όμοια ισοσκελή τρίγωνα. Άρα $\Delta v/v = x/r$ και $\Delta v = vx/r$. Αν διαιρέσουμε και τα δύο σκέλη με Δt, το χρονικό διάστημα που απαιτείται για τη διεξαγωγή αυτής της κίνησης, βρίσκουμε ότι $\Delta v/\Delta t = vx/r\,\Delta t$. Το αριστερό σκέλος εκφράζει τη μέση επιτάχυνση $\bar{a}$ κατά τη διάρκεια του Δt, και αν, όπως στο Κεφ. 6, περιστέλλουμε το Δt σε όλο και μικρότερες τιμές, τότε στο όριο, καθώς το Δt προσεγγίζει το 0, η μέση επιτάχυνση καθίσταται ίση με τη στιγμιαία επιτάχυνση a:

$$a = \operatorname*{limit}_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right) = \operatorname*{limit}_{\Delta t \to 0}\left(\frac{vx}{r\,\Delta t}\right).$$

Συγχρόνως όμως, καθώς το Δt (και μαζί μ' αυτό και η θ) μειώνεται, το ευθύγραμμο τμήμα x προσεγγίζει όλο και περισσότερο το τόξο s, έτσι ώστε στο όριο $x = s$. Άρα μπορούμε να γράψουμε

$$a = \operatorname*{limit}_{\Delta t \to 0}\left(\frac{v}{r}\,\frac{s}{\Delta t}\right).$$

Παρατηρούμε τελικά ότι καθώς $\Delta t \to 0$, $s/\Delta t \to v$, που είναι η στιγμιαία ταχύτητα του κινούμενου σημείου. Άρα

$$a = \frac{v^2}{r}.$$

Νωρίτερα είχαμε διαπιστώσει ότι $v = \omega r$. Επομένως, η a μπορεί να εκφραστεί και με την εξίσωση

$$a = \omega^2 r.$$

Όπως μπορείτε να διαπιστώσετε από το Σχ. 10.3, η κατεύθυνση της Δv, άρα και η κατεύθυνση της a, είναι κάθετη στη χορδή x. Κατά συνέπεια, στο όριο, καθώς τα σημεία P_1 και P_2 τείνουν να συγχωνευτούν, θα είναι κάθετη στο διάνυσμα της στιγμιαίας ταχύτητας, το οποίο έχει την κατεύθυνση της εφαπτομένης της καμπύλης. Αφού η επιτάχυνση κατευθύνεται προς το κέντρο, μπορούμε να χρησιμοποιούμε τον όρο «κεντρομόλος», και από εδώ και πέρα θα την χαρακτηρίζουμε με τον δείκτη κ. Παρομοίως, η κεντρομόλος δύναμη θα συμβολίζεται με F_κ. Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο, που ισχύει πάντοτε, αυτή ισούται με ma_κ.

Οι φυσικές αιτίες και τα μέσα που προσδίδουν στο περιστρεφόμενο αντικείμενο την απαραίτητη κεντρομόλο δύναμη ποικίλλουν πολύ. Ένας περιστρεφόμενος σφόνδυλος παραμένει αρραγής μέσω της αντοχής τού ίδιου του υλικού του, το οποίο μπορεί να παράσχει την αναγκαία τάση, τουλάχιστον ως ένα βαθμό. Ένα αυτοκίνητο που παίρνει μία στροφή σ' έναν επίπεδο δρόμο, εμποδίζεται από το να φύγει κατά την εφαπτόμενη στη στροφή, από τη δύναμη της τριβής που παρέχει την κεντρομόλο δύναμη καθώς δρα (πλαγίως) στα λάστιχα. Η Σελήνη, όπως εξήγησε πρώτος ο Νεύτωνας, παραμένει δέσμια στην τροχιά της γύρω από τη Γη λόγω της βαρυτικής έλξης που υφίσταται διαρκώς. Το ηλεκτρόνιο που γυρίζει γύρω από έναν ατομικό πυρήνα πετυχαίνει το ίδιο λόγω της ηλεκτρικής έλξης που το τραβά προς το κέντρο. Αλλά σε κάθε περίπτωση, στον βαθμό που η κίνηση είναι ομαλή και κυκλική, $F_\kappa = ma_\kappa$, ή, για να διατυπώσουμε αυτήν την έκφραση σε όλες τις εναλλακτικές της μορφές,

$$F_\kappa = ma_\kappa = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r = m\frac{4\pi^2}{T^2}r = m4\pi^2 n^2 r. \quad (10.8)$$

Παράδειγμα. Βρείτε την κεντρομόλο επιτάχυνση ενός αντικειμένου που βρίσκεται στον ισημερινό.

Λύση: Αυτό το αντικείμενο ακολουθεί μια κυκλική διαδρομή που καλύπτει μια γωνία 2π ακτινίων την ημέρα (= $8{,}6 \times 10^4$ s). Έχουμε $\omega = (2\pi/8{,}6 \times 10^4)$ rad/s = $7{,}3 \times 10^{-5}$ rad/s. Η ακτίνα της Γης είναι περίπου $6{,}4 \times 10^6$ m. Άρα $a_\kappa = \omega^2 r \approx 0{,}034$ m/s^2.

Πρόβλημα 10.6 Βρείτε την κεντρομόλο επιτάχυνση λόγω της περιστροφής της Γης σε μια περιοχή με γεωγραφικό πλάτος 30°. Βρείτε την κεντρομόλο επιτάχυνση ολόκληρης της Γης λόγω της ετήσιας περιφοράς της γύρω από τον Ήλιο. (Κατά προσέγγιση απόσταση = $1{,}5 \times 10^{11}$ m. Η παραδοχή μιας κυκλικής τροχιάς, αν και όχι εντελώς ορθή, είναι εδώ αναγκαία.)

Πρόβλημα 10.7 Αποδείξτε βήμα προς βήμα, ξεκινώντας από πρώτες αρχές, τη σχέση $F_\kappa = m(4\pi^2/T^2)r$, και εξηγήστε σε κάθε στάδιο τι νόμους της Φυσικής, έννοιες, προσεγγίσεις κ.λπ. έχετε εισαγάγει.

Πρόβλημα 10.8 Η στεφάνη ενός σφονδύλου που έχει 3 μέτρα διάμετρο είναι ένας μεταλλικός δακτύλιος με μάζα 1000 kg. Οι ακτίνες μπορούν να αντέξουν μία τάση που φτάνει ως τα 10^6 N. Σε ποια ταχύτητα περιστροφής θα διαλυθεί ο σφόνδυλος; Κατασκευάστε ένα σχέδιο στο οποίο θα δείχνετε πώς θα εκσφενδονιστούν τα κομμάτια.

Πρόβλημα 10.9 Αναφέρετε διάφορα άλλα παραδείγματα περιστοφικής κίνησης, και στην κάθε περίπτωση εξηγήστε πώς παρέχεται η κεντρομόλος δύναμη.

ΠΗΓΕΣ, ΕΡΜΗΝΕΙΕΣ ΚΑΙ ΕΡΓΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

J. Herivel, "Newton's discovery of the law of centrifugal force", *Isis*, τ. 51, σελ. 546-553 (1960). Επίσης, για περαιτέρω συζήτηση και σχόλια δείτε το βιβλίο του ιδίου, *The Background to Newton's Principia*, New York: Oxford University Press, 1965.