

Για μάθημα 2/3/2023



Λύση άσκησης

Μας δίνεται ο προτασιακός τύπος

$$[(p \& \neg q) \vee \neg r] \rightarrow \sim [(p \rightarrow q) \& r]$$

και μας ζητείται να εξετάσουμε αν είναι ταυτολογία, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο "μήθους ψευδοποίησης".

Αρχίσαμε υποθέτοντας ότι ο συγκεκριμένος προτασιακός τύπος δεν είναι ταυτολογία, δηλ. ότι παίρνει πηγή 0. Επειδή ο τύπος είναι της μορφής $P \rightarrow Q$, συμπεραίνουμε ότι η ηγουμένη του θα παίρνει πηγή 1 και η επομένη του θα παίρνει πηγή 0. Έτσι έχουμε ότι

| | | |
|---------------------------------|---|-----|
| $(p \& \neg q) \vee \neg r$ | 1 | (1) |
| $\sim [(p \rightarrow q) \& r]$ | 0 | (2) |

Από το (2) συμπεραίνουμε ότι ο προτασιακός τύπος

$(p \rightarrow q) \& r$ παίρνει πηγή 1, οπότε

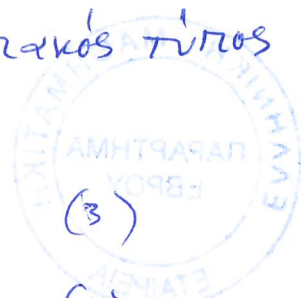
και ο $(p \rightarrow q)$ παίρνει πηγή 1 (3)

και ο r παίρνει πηγή 1. (4)

Από το (3) έπεται ότι ισχύει ένα από τα ακόλουθα:

(3α) και ο p και ο q παίρνουν πηγή 1

(3β) ο p παίρνει πηγή 0.



Όμως τότε ο προτασιακός τύπος $(p \wedge \neg q)$ παίρνει πηγή 0 και, λόγω του (4), ο προτασιακός τύπος $\neg r$ παίρνει πηγή 0. Άρα ο προτασιακός τύπος $(p \wedge \neg q) \vee \neg r$ παίρνει πηγή 0,

πράγμα που αναιφάρκει με το (1).

Συνεπώς ο αρχικός προστ. τύπος είναι ταυτολογία (αφού καταλήξαμε σε άτοπο, υποθέτοντας ότι δεν είναι ταυτολογία).

Στο ίδιο συμπέρασμα θα καταλήξουμε, αν κατασκευάσουμε τον πίνακα αλήθειας του αρχικού προτασιακού τύπου.

| p | q | r | $\neg q$ | $\neg r$ | $p \wedge \neg q$ | $p \rightarrow q$ | $(p \wedge \neg q) \vee \neg r$ | $(p \rightarrow q) \wedge r$ | $\neg[(p \rightarrow q) \wedge r]$ | ΟΛΟΣ |
|---|---|---|----------|----------|-------------------|-------------------|---------------------------------|------------------------------|------------------------------------|------|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Άσκηση άσκησης

Μας δίνεται ο προτασιακός τύπος

$$\sim [(p \rightarrow q) \& r] \rightarrow [(p \& \sim q) \vee \sim r]$$

και μας ζητείται να εξετάσουμε αν είναι ταυτολογία, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο "δηήγορης ψευδοποίησης".

Αρχίζουμε υποθέτοντας ότι ο δεδομένος προτασιακός τύπος δεν είναι ταυτολογία, δηλαδή, παίρνει τιμή 0.

Επειδή ο τύπος είναι της μορφής $P \rightarrow Q$, συμπεραίνουμε ότι η ητανύμετή του, δηλαδή, ο τύπος $\sim [(p \rightarrow q) \& r]$ παίρνει τιμή 1 και η επομέτή του, δηλαδή, ο τύπος $[(p \& \sim q) \vee \sim r]$ παίρνει τιμή 0.

Έπεται ότι ο τύπος $(p \rightarrow q) \& r$ παίρνει τιμή 0 (1)

και ο τύπος $(p \& \sim q)$ παίρνει τιμή 0 (2)

και ο τύπος $\sim r$ παίρνει τιμή 0. (3)

Από το (3) έπεται ότι ο τύπος r παίρνει τιμή 1. (4)

Από το (2) έπεται ότι ο p παίρνει τιμή 0 ή ο $\sim q$ παίρνει τιμή 0.

Προκύπτει λοιπόν ότι ο p παίρνει τιμή 0 ή ο q παίρνει τιμή 1. (*)

Και στις δύο περιπτώσεις του (*), προκύπτει ότι ο

προτασιακός τύπος $(p \rightarrow q)$ παίρνει τιμή 1. (5)

Από τα (4) και (5) συμπεραίνουμε ότι ο προτασ. τύπος

$(p \rightarrow q) \& r$ παίρνει τιμή 1,

πράγμα που οδηγεί σε άτοπο, αφού με το (1).

Αφού λοιπόν καταλήξαμε σε άτοπο, συμπεραίνουμε ότι ο αρχικός προτασ-τύπος είναι ταυτολογία.

Σημείωση. Το ίδιο συμπέρασμα προκύπτει από τον πίνακα αλήθειας που είδαμε πριν.

Στην πραγματικότητα, ο προτασ-τύπος

$$\sim [(p \rightarrow q) \& r]$$

είναι λογικά ισοδύναμος με τον προτασ-τύπο

$$[(p \& \sim q) \vee \sim r],$$

οπότε περιμέναμε αυτά που διαπισώσαμε με τη μέθοδο "μελέτης ψευδοποίησης".