ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ
86Κ026. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΥΝΟΛΩΝ
86Υ12. ΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ

Κ. Ι. ΔΗΜΗΤΡΑΚΟΠΟΥΛΟΣ

ΑΘΗΝΑ, ΜΑΪΟΣ 2023

Κεφάλαιο 1

Βασικές έννοιες της θεωρίας συνόλων

1.1 Η έννοια του συνόλου

Ένα *σύνολο* είναι μια αφηρημένη συλλογή διακεκριμένων αντικειμένων που καλούνται *μέλη* ή *στοιχεία* του συνόλου. Αντικείμενα εντελώς διαφορετικής φύσεως μπορούν να είναι μέλη ενός συνόλου, π.χ., το σύνολο των κόκκινων αντικειμένων μπορεί να περιέχει αυτοκίνητα, μπαλόνια ή πίνακες ζωγραφικής. Στην πράξη, μπορούμε αυθαίρετα να συλλέγουμε αντικείμενα σε ένα σύνολο, ακόμη κι όταν δε μοιράζονται καμιά ιδιότητα, εκτός από το να είναι μέλη αυτού του συνόλου. Η θεωρία συνόλων μελετά τέτοιες συλλογές αντικειμένων, αγνοώντας την αληθινή φύση των στοιχείων τους.

Ένα σύνολο μπορεί να έχει πολλά στοιχεία, όπως, π.χ., το σύνολο των ανθρώπων, ή λίγα, όπως, π.χ., το σύνολο των φοιτητών του Τμήματος ΙΦΕ. Ένα σύνολο μπορεί να είναι πεπερασμένο, όπως, π.χ., το σύνολο των φοιτητών που έχουν δηλώσει το μάθημα "Λογική και Θεωρία Συνόλων", ή το σύνολο των φυσικών αριθμών μεταξύ του 7 και του 86.000, ή άπειρο, όπως, π.χ., το σύνολο των εκφράσεων μιας φυσικής γλώσσας ή το σύνολο των φυσικών αριθμών. Αφού μέλη συνόλων μπορεί να είναι αφηρημένα αντικείμενα, ένα σύνολο μπορεί ταυτόχρονα να είναι στοιχείο ενός άλλου συνόλου και, ταυτόχρονα, να έχει άλλα σύνολα ως στοιχεία.

Ένα σύνολο μπορεί να είναι ένα νόμιμο αντικείμενο, ακόμη κι όταν η γνώση μας για τα μέλη του είναι αβέβαιη ή μη πλήρης. Π.χ., το σύνολο των Ελλήνων πρωθυπουργών των τελευταίων 200 χρόνων είναι καλά ορισμένο, παρά το γεγονός ότι τα μέλη του δεν είναι ευρέως γνωστά. Όμοια, το σύνολο όλων των παλαιών φοιτητών του ΕΚΠΑ είναι απόλυτα καθορισμένο, αν και ίσως είναι δύσκολο να εξακριβώσουμε τα στοιχεία του. Για να είναι ένα σύνολο καλά ορισμένο, πρέπει να είναι σαφές *καταρχήν* πώς αποφασίζουμε αν το τυχόν αντικείμενο αποτελεί ή όχι μέλος του.

Κάθε σύνολο με μόνο ένα στοιχείο καλείται *μονοσύνολο* και υπάρχει ένα ειδικό σύνολο, που καλείται *κενό σύνολο*, το οποίο δεν έχει καθόλου στοιχεία. Το κενό σύνολο μπορεί να φαίνεται παράξενο στην αρχή, αλλά είναι η μόνη δυνατή αναπαράσταση συλλογών, όπως το σύνολο των κυκλικών τετραγώνων ή το σύνολο των αντικειμένων που δεν ταυτίζονται με τον εαυτό τους. Επιπλέον, το κενό αύνολο αποτελεί μια μαθηματική ευκολία. Πράγματι, αν τα σύνολα ήταν περιορισμένα να έχουν τουλάχιστον ένα μέλος, πολλές γενικές δηλώσεις για τα σύνολα θα έπρεπε να περιέχουν μια ειδική συνθήκη για το κενό σύνολο, πράγμα που θέλουμε να αποφύγουμε, αφού στα Μαθηματικά επιδιώκουμε τη γενικότητα.

Υιοθετούμε τον ακόλουθο συνολοθεωρητικό συμβολισμό:
Γράφουμε $A, B, C, \ldots$ για να συμβολίσουμε σύνολα και $x, y, z, ...$ ή, μερικές φορές, $a, b, c, \ldots$ για να συμβολίσουμε μέλη συνόλων. Χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\in$ για να συμβολίσουμε τη σχέση του *ανήκειν*, οπότε, π.χ., γράφοντας $a{\in}A$ εννοούμε ότι "το a είναι στοιχείο του A" ή, αλλιώς, "το a ανήκει στο A". Η άρνηση της σχέσης του "ανήκειν" συμβολίζεται με $\notin$, οπότε, π.χ., γράφοντας $a{\notin}A$ εννούμε ότι "το a δεν είναι στοιχείο του A". Επειδή, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, σύνολα μπορούν να είναι μέλη άλλων συνόλων, θα γράφουμε μερικές φορές $A{\in}B$, ὸταν το σύνολο A είναι μέλος του συνόλου B, αγνοώντας τη σύμβαση ότι τα στοιχεία συμβολίζονται με μικρά γράμματα.

1.2 Ορισμοί συνόλων

Υπάρχουν τρεις διαφορετικοί τρόποι να ορίζουμε ένα σύνολο:

(1) με αναγραφή των στοιχείων του, δηλαδή, γράφοντας σε μια σειρά όλα τα στοιχεία του

(2) με περιγραφή των στοιχείων του, δηλαδή, διατυπώνοντας μια ιδιότητα που ικανοποιούν τα στοιχεία του και μόνον αυτά

(3) με αναδρομή, δηλαδή, καθορίζοντας κάποιους κανόνες, από τους οποίους παράγονται τα στοιχεία του.

Στη συνέχεια, συζητάμε χωριστά καθένα από τους τρόπους αυτούς.
Αναγραφή. Όταν το σύνολο είναι πεπερασμένο, τα μέλη του μπορούν, καταρχήν, να γραφούν ένα προς ένα, μέχρι να τα αναφέρουμε όλα. Για να ορίσουμε ένα σύνολο με αναγραφή των στοιχείων του, γράφουμε τα στοιχεία στη σειρά, διαχωρίζοντάς τα με κόμματα και περικλείοντάς τα με άγκιστρα $(\{,\})$. Π.χ., το σύνολο με στοιχεία την πρωτεύουσα της Ελλάδας, τον πρώτο κυβερνήτη της νεότερης Ελλάδας και τον αριθμό τρία θα μπορούσε να γραφεί ως
(1-1) {Αθήνα, Ιωάννης Καποδίστριας, 3}.
Πρέπει να σημειώσουμε ότι, για τον ορισμό ενός συνόλου, χρησιμοποιούμε ονόματα των στοιχείων του, αλλά τα στοιχεία του συνόλου είναι τα αντικείμενα που κατονομάζονται και όχι τα ονόματά τους. Έτσι, το σύνολο στο (1-1) θα μπορούσε να έχει οριστεί ως
(1-2) {Η πρωτεύουσα της Ελλάδας, Ιωάννης Καποδίστριας, 3},

όπου χρησιμοποιήσαμε άλλη περιγραφή της πόλης που ανήκει στο σύνολο. Φυσικά, ένα σύνολο μπορεί να περιέχει γλωσσικά αντικείμενα, όπως ονόματα. Για να αποφεύγεται η σύγχυση, ονόματα που είναι τα ίδια στοιχεία συνόλων γράφονται σε εισαγωγικά, όπως στο σύνολο

(1-3) {"Αθήνα", Ιωάννης Καποδίστριας, 3},

το οποίο είναι διαφορετικό από το σύνολο (1-2). Είναι σημαντικό να συνειδητοποιήσουμε ότι το ίδιο σύνολο μπορεί να οριστεί με πολλές διαφορετικές λίστες, που *εκ πρώτης όψεως* δεν έχουν τίποτε κοινό, εκτός από το γεγονός ότι συμβολίζουν τα ίδια αντικείμενα.

Πρέπει να τονίσουμε ότι η σειρά, με την οποία αναγράφονται τα στοιχεία ενός συνόλου, δεν έχει καμιά ουσιαστική σημασία, δεν υπάρχει, δηλαδή, κάποια έννοια διάταξής τους, που υποδηλώνεται από το συγκεκριμένο συμβολισμό. Ίσως να είναι καλύτερα να χρησιμοποιούμε συμβολισμό όπως ο ακόλουθος

$$(1\text{-}4)\ \left\{\begin{array}{lll} & \text{Αθήνα} & \\ & & 3 \\ \text{Ιωάννης Καποδίστριας} & & \end{array}\right\}$$

για να ορίσουμε το σύνολο (1-1).

Τέλος, σημειώνουμε ότι, γράφοντας το όνομα ενός στοιχείου περισσότερες από μια φορά, δεν αλλάζει τον κατάλογο μελών. Αν γράψουμε, π.χ.,

(1-5) $\{a, b, c, d, e, e, e\}$,

θα έχουμε ορίσει ακριβώς το ίδιο σύνολο, όπως αυτό που θα ορίσουμε τώρα

(1-6) $\{a, b, c, d, e\}$.

Αυτή είναι μια συνέπεια της θεμελιώδους αρχής της θεωρίας συνόλων που λέει ότι, για τυχόν δοθέν αντικείμενο, αυτό είναι ή όχι μέλος δοθέντος συνόλου. Δεν υπάρχει κάτι όπως μισή, πολλαπλή ή σταδιακή σχέση μέλους.

Για μεγάλα πεπερασμένα σύνολα, ο συμβολισμός αναγραφής ίσως δεν είναι πρακτικός και συντομεύεται, αν υπάρχει κάποια προφανής κανονικότητα στον κατάλογο στοιχείων. Π.χ., το σύνολο με στοιχεία τα πολλαπλάσια του 5 μεταξύ του 0 και του 100, μπορεί να συμβολιστεί ως

(1-7) $\{0, 5, 10, 15, ..., 95, 100\}$.

Περιγραφή. Ο ορισμός ενός συνόλου με αναγραφή των στοιχείων του είναι εφικτός, μόνον όταν το σύνολο είναι πεπερασμένο, αν και καταχρηστικά χρησιμοποιούμε μια ελλειπτική μορφή του για άπειρα σύνολα, γράφοντας, π.χ., $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ για το σύνολο των φυσικών αριθμών.

Ο σωστός τρόπος ορισμού ενός άπειρου συνόλου είναι να περιγράψουμε τα στοιχεία του, μέσω κάποιας ιδιότητας που αυτά ικανοποιούν, χρησιμοποιώντας το λεγόμενο "κατηγορηματικό συμβολισμό", όπως, π.χ., στο

(1-8) $\{x|$ο x είναι άρτιος φυσικός μεγαλύτερος από το 3$\}$.

Την έκφραση στο (1-8) διαβάζουμε ως "το σύνολο των x τέτοιων που ο x είναι άρτιος φυσικός μεγαλύτερος από το 3", όπου το σύμβολο x δεν συμβολίζει ένα συγκεκριμένο αντικείμενο, αλλά είναι, όπως λέμε, μια *μεταβλητή*.

Ο κατηγορηματικός συμβολισμός μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για πεπερασμένα σύνολα. Π.χ., το σύνολο

(1-9) $\{x|$ x άρτιος φυσικός μεταξύ του 3 και του 9$\}$

είναι το ίδιο με το σύνολο $\{4,6,8\}$.

Μερικές φορές η περιγραφή ενός συνόλου γίνεται σε σχέση με κάποιο/α δοθέν/τα αντικείμενο/α, που καλούμε *παράμετρο* (*παραμέτρους*). Π.χ., ο ορισμός του συνόλου

(1-10) $\{x|\ x$ φυσικός που διαιρεί το $10\}$

εξαρτάται από τον αριθμό-παράμετρο 10.

Αναδρομή: Ένας άλλος τρόπος ορισμού ενός συνόλου, πεπερασμένου ή άπειρου, είναι αυτός που καλείται "αναδρομικός" και έγκειται στον καθορισμό μιας βάσης και ενός κανόνα, από τα οποία παράγονται όλα τα στοιχεία του συνόλου. Π.χ., το σύνολο $E = \{4, 6, 8, ...\}$ (δηλαδή, το σύνολο που είδαμε στο (1-8)) ορίζεται ως εξής:

(1-11) α) $4 \in E$

β) Αν $x \in E$, τότε $x+2 \in E$

γ) Τίποτε άλλο δεν ανήκει στο E.

Η βάση εδώ είναι ότι το 4 είναι στοιχείο του E και ο κανόνας εκφράζει ότι, αν κάποιο αντικείμενο x ανήκει στο E, τότε και το αντικείμενο $x+2$ ανήκει στο E – το τρίτο μέρος εξασφαλίζει ότι τα μόνα αντικείμενα που είναι στοιχεία του E είναι αυτά που καθορίζονται από τα α), β).

Ο κατηγορηματικός συμβολισμός είναι επικίνδυνος, αν χρησιμοποιηθεί ανεξέλεγκτα, πράγμα στο οποίο επέστησε την προσοχή μας ο B. Russell, ανακαλύπτοντας το 1902 το περίφημο "παράδοξο του Russell", που θα παρουσιάσουμε παρακάτω. Μέχρι την ανακάλυψη του Russell, πιστευόταν ότι οποιαδήποτε ιδιότητα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για τον ορισμό ενός συνόλου. Ο Russell παρατήρησε αρχικά ότι μερικά σύνολα μπορούν να είναι στοιχεία των εαυτών τους, ενώ για άλλα αυτό δεν ισχύει. Π.χ., το σύνολο των αφηρημένων εννοιών περιέχει τον εαυτό του, αφού είναι το ίδιο μια αφηρημένη έννοια, ενώ το σύνολο των ελεφάντων δεν περιέχει τον εαυτό του, αφού δεν είναι το ίδιο ελέφαντας. Έχοντας δεχθεί ότι κάθε ιδιότητα ορίζει ένα σύνολο, οφείλουμε να δεχθούμε την ύπαρξη του συνόλου τα στοιχεία του οποίου ικανοποιούν την ιδιότητα "x δεν ανήκει στον εαυτό του", δηλαδή, την ύπαρξη του συνόλου $R = \{x|x \notin x\}$. Τώρα μπορούμε να αναρωτηθούμε αν το R ανήκει ή όχι στον εαυτό του. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

(α) $R \notin R$, δηλαδή, το R δεν είναι στοιχείο του εαυτού του.
Τότε το R (ως αντικείμενο) ικανοποιεί την ιδιότητα που ορίζει τα στοιχεία του (συνόλου) R, άρα το R ανήκει στο R, δηλαδή, ισχύει $R \in R$, πράγμα που αντιφάσκει με την υπόθεση.

(β) $R \in R$, δηλαδή, το R είναι στοιχείο του εαυτού του.
Τότε το R (ως αντικείμενο) δεν ικανοποιεί την ιδιότητα που ορίζει τα στοιχεία του (συνόλου) R, άρα το R δεν ανήκει στο R, δηλαδή, ισχύει $R \notin R$, οπότε πάλι καταλήγουμε σε αντίφαση.

Το τελικό συμπέρασμα λοιπόν είναι ότι πρέπει να μη δεχθούμε την ύπαρξη του συνόλου R, η οποία δεν αποκλειόταν στη θεωρία συνόλων που είχε αναπτύξει ο Cantor. Η ανακάλυψη του παραδόξου αυτού προκάλεσε μεγάλη κρίση θεμελίων στα Μαθηματικά, αφού ήταν ευρέως διαδεδομένη η άποψη ότι αυτά μπορούσαν να οικοδομηθούν έχοντας ως βάση τη θεωρία συνόλων. Για την αποφυγή του παραδόξου του Russell, προτάθηκαν διάφορες λύσεις, μια από τις οποίες οφείλεται στον ίδιο το Russell και καλείται "θεωρία των τύπων". Η βασική ιδέα της θεωρίας αυτής είναι η κατάταξη των συνόλων σε επίπεδα, σύμφωνα με μια ακολουθία "τύπων" έτσι, ώστε ένα σύνολο να μπορεί να έχει ως στοιχείο μόνο αντικείμενα τύπων κατώτερων από το δικό του, οπότε το ερώτημα κατά πόσον ένα σύνολο περιέχει τον εαυτό του χάνει το νόημά του. Δεν θα επεκταθούμε σχετικά με αυτό το θέμα, σημειώνουμε όμως ότι η πρακτική των μαθηματικών δεν σταμάτησε ποτέ εξαιτίας της κρίσης θεμελίων που προκάλεσε το παράδοξο του Russell.

1.3 Βασικές έννοιες

Στην ενότητα αυτή θα αναφερθούμε στη σχέση της ισότητας συνόλων, στη σχέση του υποσυνόλου και στην έννοια της πληθικότητας.

Αρχίζουμε με την ισότητα συνόλων. Όπως το έχουμε έμμεσα κάνει ήδη, δεχόμαστε την ακόλουθη θεμελιώδη αρχή, η οποία καλείται *Αρχή της Έκτασης* : *Δύο σύνολα ταυτίζονται αν και μόνον αν έχουν τα ίδια μέλη ή, αλλιώς, αν και μόνον αν κάθε στοιχείο του ενός ανήκει στο άλλο και αντίστροφα.*
Με βάση αυτή την αρχή, το ίδιο σύνολο ορίζεται με τους εξής τρόπους:

(1-12) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
(1-13) $\{x|x$ θετικός ακέραιος μικρότερος από $7\}$
(1-14) α) $1{\in}A$
β) Αν $x{\in}A$ και x μικρότερος από 6, τότε $x{+}1{\in}A$
γ) Τίποτε άλλο δεν ανήκει στο A.

Φυσικά γράφουμε $A{=}B$ όταν τα σύνολα A, B ταυτίζονται. Έτσι, π.χ., έχουμε ότι
(1-15) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}{=}\{x|x$ θετικός ακέραιος μικρότερος από $7\}$.

Σημειώνουμε ότι το σύμβολο $=$ χρησιμοποιείται και όταν ορίζουμε σύνολα, ο ρόλος του όμως τότε είναι διαφορετικός. Π.χ., λέγοντας "έστω $B = \{2, 4, 6\}$" εννοούμε ότι το B ορίζεται ως το σύνολο με στοιχεία τα 2, 4, 6 και όχι ότι τα σύνολα B και $\{2, 4, 6\}$, που έχουν ήδη οριστεί, ταυτίζονται. Μερικές φορές, γράφουμε "$=_{\text{ορ}}$" για να αποφύγουμε τη σύγχυση, αλλά συνήθως είναι ξεκάθαρο από το πλαίσιο συζήτησης τι ακριβώς εννοούμε.

Άμεση συνέπεια της αρχής της έκτασης είναι ότι το κενό σύνολο είναι μοναδικό, αφού, αν υπήρχαν δύο σύνολα που καθένα τους δεν είχε στοιχεία, αυτά τα σύνολα θάπρεπε να ταυτίζονται. Το κενό σύνολο συμβολίζεται με $\emptyset$ - ο συμβολισμός $\{\,\}$ θα ήταν αποδεκτός, συνήθως, όμως, δεν χρησιμοποιείται.

Προχωρούμε τώρα στη σχέση του υποσυνόλου. Δεδομένων δύο συνόλων A και B, λέμε ότι

(α) *το A είναι υποσύνολο του B*, και γράφουμε $A{\subseteq}B$, αν κάθε στοιχείο του A είναι στοιχείο και του B.

(β) *το A είναι γνήσιο υποσύνολο του B*, και γράφουμε $A{\subset}B$, αν το A είναι υποσύνολο του B και, επιπλέον, υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του B που δεν ανήκει στο A.

Από τους προηγούμενους ορισμούς, είναι προφανές ότι (α) κάθε σύνολο είναι υποσύνολο του εαυτού του και (β) ισχύει $A{\subseteq}B$ αν και μόνον αν $A{\subset}B$ ή $A{=}B$. Ο λόγος που χρειαζόμαστε και τις δύο αυτές σχέσεις είναι ότι συχνά γνωρίζουμε ότι $A{\subseteq}B$ χωρίς να είμαστε σε θέση να αποφασίσουμε αν $A{=}B$ ή $A{\subset}B$. Π.χ., αν A είναι το σύνολο των κατοίκων της Γης και B το σύνολο των κατοίκων του γαλαξία μας, ισχύει προφανώς ότι $A{\subseteq}B$, αλλά δεν είμαστε σε θέση να αποφασίσουμε αν $A{\subset}B$ ή όχι. Για την άρνηση των σχέσεων $\subseteq$, $\subset$ γράφουμε (αντίστοιχα) $\not\subseteq$, $\not\subset$.

Παραδείγματα που επεξηγούν τις έννοιες αυτές είναι τα ακόλουθα:

(1-16) $\{a,b,c\}{\subseteq}\{s,b,a,e,g,c\}$
$\{a,b,j\}{\not\subseteq}\{s,b,a,e,g,c\}$
$\{a,b,c\}{\subset}\{s,b,a,e,g,c\}$
$\emptyset{\subset}\{a\}$
$\{a,\{a\}\}{\subseteq}\{a,b,\{a\}\}$
$\{\{a\}\}{\not\subseteq}\{a\}$
$\{a\}{\not\subseteq}\{\{a\}\}$, αλλά $\{a\}{\in}\{\{a\}\}$.

Μια σημαντική συνέπεια του ορισμού του $\subseteq$ είναι ότι για κάθε σύνολο A ισχύει $\emptyset{\subseteq}A$. Πράγματι, έστω ότι αυτό δεν αληθεύει, δηλαδή, υπάρχει ένα σύνολο A τέτοιο που $\emptyset{\not\subseteq}A$. Τότε πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του $\emptyset$ το οποίο δεν ανήκει στο A, οπότε πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του $\emptyset$, πράγμα αδύνατο, με βάση τον ορισμό του $\emptyset$. Αφού η υπόθεση ότι το $\emptyset$ δεν είναι υποσύνολο του A μας οδήγησε σε κάτι παράλογο, η υπόθεση αυτή δεν είναι αληθής, άρα ισχύει το ζητούμενο. Ο τρόπος συλλογισμού που μόλις εφαρμόσαμε καλείται *απόδειξη με απαγωγή στο άτοπο*.

Στο σημείο αυτό, πρέπει να τονίσουμε ότι οι σχέσεις $\in$ και $\subseteq$ είναι εντελώς διαφορετικές, παρόλο που αφορούν και οι δύο σχέσεις του μέρους προς το όλο. Μεταξύ άλλων, ένα στοιχείο μπορεί να είναι σύνολ ή να μην είναι, ενώ ένα υποσύνολο είναι πάντα σύνολο. Ο Άρης είναι στοιχείο του συνόλου {Γη, Άρης, Κρόνος}, αλλά δεν είναι υποσύνολό του. Το σύνολο {Άρης} όμως είναι (γνήσιο) υποσύνολο του {Γη, Άρης, Κρόνος}. Ένα άλλο σημείο στο οποίο τα στοιχεία διαφέρουν από τα (υπο)σύνολα είναι ότι, ενώ από τις υποθέσεις $A{\subseteq}B$ και $B{\subseteq}C$ έπεται κατ' ανάγκην ότι $A{\subseteq}C$, από τις υποθέσεις $a{\in}A$ και $A{\in}B$ δεν έπεται κατ' ανάγκην ότι $a{\in}B$. Π.χ., ισχύει ότι $\{a\}{\subseteq}\{a,b\}$ και ότι $\{a,b\}{\subseteq}\{a,b,c\}$, οπότε ισχύει και ότι $\{a\}{\subseteq}\{a,b,c\}$. Από την άλλη πλευρά όμως, δεν μπορούμε από την $a{\in}\{a\}$ και την $\{a\}{\in}\{\{a\},b\}$ να συμπεράνουμε ότι $a{\in}\{\{a\},b\}$ (υποθέτοντας ότι τα a,b είναι διαφορετικά).

Κάποια άλλα παραδείγματα που αναφέρονται σε περιπτώσεις σύγχυσης είναι τα ακόλουθα:

(α) $\emptyset{\subseteq}\{a\}$, ενώ $\{\emptyset\}{\not\subseteq}\{a\}$. Πράγματι, το $\emptyset$, δηλαδή, το μοναδικό στοιχείο του $\{\emptyset\}$, δεν ανήκει στο $\{a\}$.

(β) Έστω $A{=}\{b,\{c\}\}$. Τότε $b{\not\subseteq}A$, αφού το b είναι στοιχείο και όχι σύνολο,

$\{c\}\not\subseteq A$, αφού το c δεν είναι στοιχείο του A, $\{\{c\}\}\subset A$, αφού $\{c\}\in A$ και υπάρχει στοιχείο του A (συγκεκριμένα, το b) που δεν ανήκει στο $\{\{c\}\}$, $\{b\}\notin A$, αφού το $\{b\}$ δεν ταυτίζεται με κανένα στοιχείο του A.

Ερχόμαστε, τέλος, στην έννοια της πληθικότητας. Για τυχόν πεπερασμένο σύνολο A, καλούμε *πληθικότητα ή πληθάριθμο του* A, και συμβολίζουμε $|A|$, το φυσικό αριθμό που συμπίπτει με τον αριθμό των στοιχείων του A. Π.χ., το σύνολο που ορίσαμε στο (1-12) έχει πληθάριθμο 6. Φυσικά, είναι δυνατό δύο σύνολα που δεν ταυτίζονται να έχουν τον ίδιο πληθάριθμο. Τα άπειρα σύνολα έχουν επίσης πληθαρίθμους, που δεν είναι όμως φυσικοί αριθμοί – περισσότερα για το θέμα αυτό θα δούμε στο Κεφάλαιο 3.

1.4 Πράξεις με σύνολα

Όπως με τους αριθμούς, μπορούμε να κάνουμε πράξεις με σύνολα, έχουμε, δηλαδή, κάποιες διαδικασίες, τις οποίες χρησιμοποιούμε για να κατασκευάσουμε νέα σύνολα από ήδη υπάρχοντα. Σκοπός μας στην ενότητα αυτή είναι να ορίσουμε τις πιο στοιχειώδεις από αυτές τις διαδικασίες.

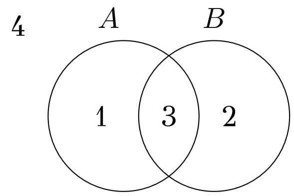
Αρχίζουμε με την πράξη της τομής. Δοθέντων δύο συνόλων A και B, καλούμε τομή των A, B, και συμβολίζουμε $A\cap B$, το σύνολο με στοιχεία ακριβώς τα αντικείμενα που είναι στοιχεία και του A και του B. Με χρήση κατηγορηματικού συμβολισμού, έχουμε

(1-17) $A\cap B = \{x|x\in A \text{ και } x\in B\}$.

Παράδειγμα. Έστω $A=\{a, b\}$, $B=\{c, d\}$ και $C=\{b, d\}$. Τότε

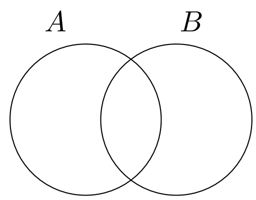
(1-18)
$$\begin{aligned}
&A\cap B = \emptyset\\
&B\cap C = \{d\}\\
&A\cap A = \{a, b\}=A\\
&A\cap\emptyset = \emptyset\\
&(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C) = \emptyset.
\end{aligned}$$

Πριν προχωρήσουμε, θα αναφερθούμε στη *μέθοδο διαγραμμάτων Venn*, την οποία χρησιμοποιούμε για οπτική αναπαράσταση συνόλων και πράξεων με σύνολα. Κάθε σύνολο αντιπροσωπεύεται από μια περιοχή του επιπέδου που περικλείεται από ένα κύκλο ή μια έλλειψη ή ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, τα δε στοιχεία του από σημεία της περιοχής αυτής. Η πιο γενική περίπτωση για δύο σύνολα είναι να τα παραστήσουμε ως αλληλοτεμνόμενες περιοχές, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1-1. Η περιοχή με όνομα 1 περιέχει στοιχεία που είναι στοιχεία του A, αλλά όχι του B. Η περιοχή 2, εκείνα τα πράγματα στο B που δεν ανήκουν στο A. Τέλος, η περιοχή 3 περιέχει στοιχεία και του A και του B. Σημεία στην περιοχή 4 έξω από το διάγραμμα παριστάνουν στοιχεία που δεν ανήκουν σε κανένα από τα δύο σύνολα. Φυσικά, σε συγκεκριμένα παραδείγματα, μια ή περισσότερες από αυτές τις περιοχές μπορεί να είναι κενές.



Σχήμα 1-1: Διάγραμμα Venn δύο τυχόντων συνόλων A και B.

Η τομή δύο τυχόντων συνόλων A και B παριστάνεται με το διάγραμμα Venn του Σχήματος 1-2, όπου η περιοχή που μας ενδιαφέρει είναι διαγραμμισμένη.



Σχήμα 1-2: Συνολοθεωρητική τομή $A \cap B$.

Συνεχίζουμε με την πράξη της ένωσης. Δοθέντων δύο συνόλων A και B, καλούμε *ένωση των* A, B, και συμβολίζουμε $A \cup B$, το σύνολο με στοιχεία ακριβώς τα αντικείμενα που είναι στοιχεία του A ή του B. Με χρήση κατηγορηματικού συλλογισμού έχουμε

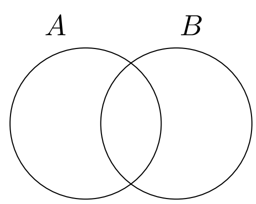
(1-19) $A \cup B = \{x | x \in A \text{ ή } x \in B\}$.

Η διάζευξη "ή" είναι *εγκλειστική*, δηλαδή, επιτρέπει να θεωρούμε αντικείμενα που ανήκουν και στο A και στο B.

Παράδειγμα. Για τα σύνολα A, B, C όπως προηγουμένως, έχουμε

(1-20) $A \cup B = \{a, b, c, d\}$
$A \cup C = \{a, b, d\}$
$B \cup C = \{b, c, d\}$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = \{a, b, c, d\}$
$A \cup \emptyset = \{a, b\} = A$.

Το διάγραμμα Venn για την ένωση δύο τυχόντων συνόλων παριστάνεται στο Σχήμα 1-3.



Σχήμα 1-3: Συνολοθεωρητική ένωση $A \cup B$.

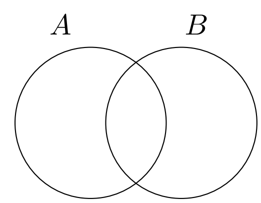
Ερχόμαστε τώρα στην πράξη της διαφοράς. Δοθέντων δύο συνόλων A και B, καλούμε *διαφορά των* A, B, και συμβολίζουμε $A - B$, το σύνολο με στοιχεία εκείνα τα αντικείμενα που ανήκουν στο A αλλά δεν ανήκουν στο B. Με χρήση κατηγορηματικού συμβολισμού έχουμε

(1-21) $A-B=\{x|x\in A$ και $x\notin B\}$.
Μερικές φορές λέμε *σχετικό συμπλήρωμα του* B *ως προς το* A αντί για *διαφορά των* A, B.
Παράδειγμα. Για τα σύνολα A, B, C όπως προηγουμένως, έχουμε

(1-22)
$$A-B=\{a,b\}=A$$
$$B-C=\{c\}$$
$$A-\emptyset=A$$
$$\emptyset-A=\emptyset$$
$$A-A=\emptyset$$
$$B-A=\{c,d\}=B$$
$$(A-B)-C=\{a\}$$
$$A-(B-C)=\{a,b\}=A.$$

Για τα συγκεκριμένα σύνολα A, B που έχουμε ορίσει, βλέπουμε ότι ισχύει $A\cup B=B\cup A$ και $A\cap B=B\cap A$, αλλά $A-B\neq B-A$ (δηλαδή, δεν ισχύει ότι $A-B=B-A$).

Το διάγραμμα Venn για τη συνολοθεωρητική διαφορά $A-B$ φαίνεται στο Σχήμα 1-5.



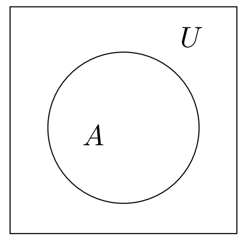
Σχήμα 1-5: Συνολοθεωρητική διαφορά $A-B$.

Η πράξη της διαφοράς συνόλων πρέπει να διακρίνεται από την πράξη του συμπληρώματος συνόλου (ως προς το σύμπαν αναφοράς). Δοθέντος ενός συνόλου A, καλούμε *συμπλήρωμα του* A, και συμβολίζουμε A' ή A^c, το σύνολο με στοιχεία τα αντικείμενα που δεν ανήκουν στο A. Με χρήση κατηγορηματικού συμβολισμού έχουμε
(1-23) $A'=\{x|x\notin A\}$.
Προσοχή όμως: Όταν ορίσαμε τα σύνολα $A\cup B$, $A\cap B$, ήταν σαφές ότι η αναζήτηση των στοιχείων τους γίνεται στα ήδη γνωστά σύνολα A, B. Στην προκείμενη περίπτωση, πού θα αναζητήσουμε τα στοιχεία του A'; Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό, πρέπει να αναφερθούμε σαφώς σε κάτι που συνήθως μένει στο περιθώριο: το *σύμπαν* (*ή πεδίο*) *αναφοράς*. Σε όλες τις αναζητήσεις μας, υπάρχει ένα σύνολο αντικειμένων, εντός του οποίου κινούμαστε, π.χ., το σύνολο των φυσικών αριθμών, αν ασχολούμαστε με τη θεωρία αριθμών. Αυτό το γεγονός δεν πρέπει να μας προβληματίζει καθόλου, ας μη ξεχνάμε ότι, όταν χρησιμοποιούμε λέξεις όπως "όλα", "κάποια" έχουμε κατά νου κάποιο πεδίο αναφοράς. Θα ήταν βέβαια πολύ βολικό να έχουμε ένα καθολικό πεδίο αναφοράς, που θα περιείχε "ο,τιδήποτε", από το οποίο θα μπορούσαν να κατασκευαστούν ενδιαφέροντα σύνολα, αυτό όμως δεν είναι δυνατό, διότι θα διατρέχαμε τον κίνδυνο δημιουργίας παραδόξων, αφού θα είχαμε τη δυνατότητα θεώρησης αντικειμένων όπως το "σύνολο όλων των συνόλων", που είναι προβληματικά. Συνήθως συμβολίζουμε

με U (από τη λέξη universe) το σύμπαν αναφοράς, το οποίο όμως συνήθως δεν ορίζουμε επακριβώς. Το συμπλήρωμα ενός συνόλου ορίζεται με βάση το U, συγκεκριμένα ως

(1-24) $A' = U - A$.

Το διάγραμμα Venn για το συμπλήρωμα του A φαίνεται στο Σχήμα 1-6.



Σχήμα 1-6: Το συνολοθεωρητικό συμπλήρωμα A'.

Ερχόμαστε, τέλος, στην πράξη του δυναμοσυνόλου. Δοθέντος ενός συνόλου A, καλούμε *δυναμοσύνολο του* A, και συμβολίζουμε με $\mathcal{P}(A)$, το σύνολο με στοιχεία ακριβώς τα σύνολα που είναι υποσύνολα του A (το γράμμα $\mathcal{P}$ προέρχεται από τη λέξη powerset). Με χρήση κατηγορηματικού συμβολισμού έχουμε

(1-25) $\mathcal{P}(A)=\{B|B\subseteq A\}$.

Η επιλογή του συνθετικού "δυναμο" οφείλεται στο γεγονός ότι, αν ο πληθάριθμος του A είναι ο φυσικός αριθμός n, τότε ο πληθάριθμος του $\mathcal{P}(A)$ είναι 2^n, δηλαδή, $2\times 2\times ... \times 2$ (n φορές).

Παράδειγμα. Για το σύνολο A που έχουμε θεωρήσει, έχουμε

$$\mathcal{P}(A)=\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}.$$

Σημειώνουμε ότι δεν χρησιμοποιούνται διαγράμματα Venn για την αναπαράσταση δυναμοσυνόλων.

1.5 Άλγεβρα των συνόλων

Από τους ορισμούς της προηγούμενης ενότητας έπονται κάποιες γενικές ταυτότητες που αφορούν σύνολα, τις οποίες καλούμε "νόμους". Μια χρήσιμη επιλογή αυτών φαίνεται στο Σχήμα 1-7, όπου έχουν ομαδοποιηθεί κάτω από τα παραδοσιακά τους ονόματα.

Νόμοι αυτοπάθειας

$X\cup X=X$, $X\cap X=X$

Νόμοι αντιμεταθετικότητας

$X\cup Y=Y\cup X$, $X\cap Y=Y\cap X$

Νόμοι προσεταιριστικότητας

$(X\cup Y)\cup Z=X\cup(Y\cup Z)$
$(X\cap Y)\cap Z=X\cap(Y\cap Z)$

Νόμοι επιμεριστικότητας

$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$

$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

Νόμοι ταυτότητας

$X \cup \emptyset = X, \;\; X \cap \emptyset = \emptyset$

$X \cup U = U, \;\; X \cap U = X$

Νόμοι συμπληρώματος

$X \cup X' = U, \;\; X \cap X' = \emptyset$

$(X')' = X, \;\; X - Y = X \cap Y'$

Νόμοι De Morgan

$(X \cup Y)' = X' \cap Y', \;\; (X \cap Y)' = X' \cup Y'$

Αρχές συνέπειας

$X \subseteq Y$ ανν $X \cup Y = Y, \;\; X \subseteq Y$ ανν $X \cap Y = X$.

Σχήμα 1-7: Θεμελιώδεις συνολοθεωρητικές ισότητες.

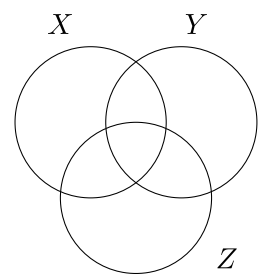
Δεν θα δώσουμε τυπικές αποδείξεις ότι οι νόμοι που αναφέραμε ισχύουν για οποιαδήποτε σύνολα X, Y, Z, αλλά μπορούμε να υποστηρίξουμε την ισχύ τους, αν σκεφθούμε τους ορισμούς ή κατασκευάσουμε κατάλληλα διαγράμματα Venn.

Είναι εύκολο να δούμε ότι, για κάθε σύνολο X, το $X \cup X$ είναι το ίδιο σύνολο με το X, αφού κάθε τι που ανήκει στο X ή στο X είναι το ίδιο με κάθε τι που ανήκει στο X. Όμοια, για κάθε τι που ανήκει στο X και στο X, άρα $X \cap X = X$.

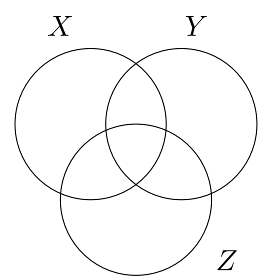
Όμοια, ο,τιδήποτε είναι στο X ή στο Y (ή και στα δύο) είναι το ίδιο με ο,τιδήποτε είναι στο Y ή στο X (ή και στα δύο), οπότε $X \cup Y = Y \cup X$. Το επιχείρημα για την τομή είναι παρόμοιο.

Οι νόμοι προσεταιριστικότητας δηλώνουν ότι η σειρά με την οποία συνδυάζουμε τρία σύνολα με την πράξη της ένωσης δεν έχει σημασία και το ίδιο ισχύει για την πράξη της τομής. Για να δούμε ότι αυτοί οι νόμοι ισχύουν, ας φανταστούμε την κατασκευή των κατάλληλων διαγραμμάτων Venn. Όταν έχουμε περισσότερα από δύο σύνολα, τα διαγράμματα αυτά γίνονται πολύπλοκα, αλλά, για απλές περιπτώσεις, όπως εδώ, αποτελούν πολύτιμο βοήθημα για την κατανόηση των συνολοθεωρητικών νόμων. Ας θεωρήσουμε λοιπόν τρεις αλληλοτεμνόμενους κύκλους με ονόματα X, Y, Z. Πρώτα σκιαγραφούμε το $X \cup Y$ και μετά το Z. Το αποτέλεσμα είναι η διαγράμμιση της πλήρους περιοχής εντός των τριών κύκλων και αυτό αντιστοιχεί στην έκφραση $(X \cup Y) \cup Z$. Μετά ξαναρχίζουμε και διαγραμμίζουμε πρώτα το $Y \cup Z$ και μετά το X. Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο.

Η κατασκευή των διαγραμμάτων Venn για την επεξήγηση των νόμων επιμεριστικότητας είναι λίγο δυσκολότερη. Στο Σχήμα 1-8 φαίνεται ένα διάγραμμα Venn για το σύνολο $X \cap (Y \cup Z)$. Για να το κάνουμε πιο σαφές, το X έχει διαγραμμιστεί με κατακόρυφες γραμμές και το $Y \cup Z$ με οριζόντιες. Η τομή αυτών των δύο συνόλων αναπαρίσταται κατόπιν με την περιοχή με διασταυρώσεις γραμμών. Το Σχήμα 1-9 δείχνει το αντίστοιχο διάγραμμα για το $(X \cap Y) \cup (X \cap Z)$. Το $X \cap Y$ είναι διαγραμμισμένο κατακόρυφα και το $X \cap Z$ οριζόντια. Έτσι, η ένωση αναπαρίσταται με την επιφάνεια που είναι διαγραμμισμένη σε μια (ή και στις δύο) κατευθύνσεις. Όμοια κατασκευάζεται το διάγραμμα Venn για τον πρώτο νόμο επιμεριστικότητας.



Σχήμα 1-8: Διάγραμμα Venn για το $X \cap (Y \cup Z)$.



Σχήμα 1-9: Διάγραμμα Venn για το $(X \cap Y) \cup (X \cap Z)$.

Οι νόμοι ταυτότητας είναι προφανείς, με βάση τους ορισμούς της ένωσης, της τομής, του κενού συνόλου και του σύμπαντος αναφοράς. Ο,τιδήποτε είναι στο X ή στο $\emptyset$ είναι το ίδιο με ο,τιδήποτε είναι στο X κτλ. Οι νόμοι συμπληρώματος μπορούν να κατανοηθούν με όμοιο τρόπο, με βάση τους ορισμούς και μια ματιά στα διαγράμματα Venn των Σχημάτων 1-5 και 1-6.

Οι νόμοι De Morgan αποτελούν ένα συμμετρικό ζευγάρι. Ο πρώτος εκφράζει ότι κάθε τι που δεν ανήκει ούτε στο X ούτε στο Y είναι το ίδιο με κάθε τι που δεν ανήκει στο X και δεν ανήκει στο Y. Ο δεύτερος εκφράζει ότι κάθε τι που δεν ανήκει και στο X και στο Y δεν είναι στο X ή δεν είναι στο Y (ή σε κανένα από τα δύο). Αυτή η περίπτωση είναι λιγότερο προφανής, αλλά γίνεται ξεκάθαρη μέσω ενός διαγράμματος Venn.

Οι νόμοι συνέπειας ονομάζονται έτσι, διότι αφορούν την αμοιβαία συνέπεια των ορισμών της ένωσης, της τομής και του υποσυνόλου. Αν σκεφτούμε ένα διάγραμμα Venn στο οποίο ο κύκλος για το X κείται ολόκληρος μέσα στον κύκλο για το Y (αναπαριστώντας ότι $X \subseteq Y$), τότε είναι εύκολο να δούμε ότι $X \cup Y = Y$. Από την άλλη πλευρά, αν ξέρουμε ότι $X \cup Y = Y$, τότε, στο συνηθισμένο διάγραμμα Venn, η περιοχή που αντιστοιχεί σε στοιχεία που είναι στο X αλλά όχι στο Y πρέπει να είναι κενή (αλλιώς η ένωση δεν θα ήταν ίση με Y). Έτσι, τα στοιχεία του Y βρίσκονται όλα μέσα στον κύκλο του Y και συνεπώς $X \subseteq Y$. Η άλλη περίπτωση είναι όμοια.

Στη συνέχεια, θα δείξουμε πώς αυτές οι ισότητες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την απλοποίηση συνολοθεωρητικών εκφράσεων ή την απόδειξη σχέσεων μεταξύ συνόλων. Η ιδέα είναι ότι, σε κάθε συνολοθεωρητική έκφραση, ένα σύνολο μπορεί πάντα να αντικατασταθεί από ένα ίσο του. Το αποτέλεσμα θα είναι τότε μια έκφραση που συμβολίζει το ίδιο σύνολο με την αρχική έκφραση. Π.χ., στην $A\cap(B\cup C)'$ μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $(B\cup C)'$ με το ισοδύναμό του $B'\cap C'$ (χρησιμοποιώντας τον πρώτο νόμο De Morgan) και να πάρουμε $A\cap(B'\cap C')$. Αφού τα $(B\cup C)'$ και $B'\cap C'$ ἐχουν τα ίδια μέλη, το ίδιο ισχύει και για τα $A\cap(B\cup C)'$ και $A\cap(B'\cap C')$.

Συνήθως γράφουμε τέτοιες αποδείξεις ως μια κατακόρυφη ακολουθία, στην οποία κάθε γραμμή δικαιολογείται με αναφορά στο νόμο που χρησιμοποιείται για να προκύψει από την προηγούμενη γραμμή. Η μέθοδος αυτή είναι ουσιαστικά η ίδια με αυτή που θα χρησιμοποιήσουμε αργότερα για την κατασκευή αποδείξεων σε αξιωματικά συστήματα.

Παράδειγμα. Να απλοποιηθεί η έκφραση $(A\cup B)\cup(B\cap C)'$.

1.	$(A\cup B)\cup(B\cap C)'$	
2.	$(A\cup B)\cup(B'\cup C')$	ν. DeMorgan
3.	$A\cup(B\cup(B'\cup C'))$	ν. προσεταιριστικότητας
4.	$A\cup((B\cup B')\cup C')$	ν. προσεταιριστικότητας
5.	$A\cup(U\cup C')$	ν. συμπληρώματος
6.	$A\cup(C'\cup U)$	ν. αντιμεταθετικότητας
7.	$A\cup U$	ν. ταυτότητας
8.	U	ν. ταυτότητας

Παράδειγμα. Να δείξετε ότι, αν $A\subseteq B$, τότε $B'\subseteq A'$.

Έστω ότι $A\subseteq B$. Με βάση την πρώτη αρχή συνέπειας, για να δείξουμε ότι $B'\subseteq A'$, αρκεί να δείξουμε ότι $B'\cup A'=A'$. Αποδεικνύουμε λοιπόν το δεύτερο.

1.	$B'\cup A'$	
2.	$(B\cap A)'$	ν. DeMorgan
3.	$(A\cap B)'$	ν. αντιμεταθετικότητας
4.	A'	2η αρχή συνέπειας.

Σημειώνουμε ότι, ενώ είναι σχετικά απλό να επαληθεύουμε ότι μια δοθείσα απόδειξη όπως η παραπάνω είναι σωστή, είναι σχετικά δύσκολο να βρίσκουμε μια απόδειξη για μια δοθείσα σχέση - μερικές φορές χρειάζονται πολλές ανεπιτυχείς προσπάθειες μέχρι να ανακαλύψουμε το δρόμο που οδηγεί στο ζητούμενο.

Ασκήσεις

1. Θεωρούμε τα εξής σύνολα: $A=\{a,b,c,2,3,4\}$, $B=\{a,b\}$, $C=\{c,2\}$, $D=\{b,c\}$, $E=\{a,b,\{c\}\}$, $F=\emptyset$ και $G=\{\{a,b\},\{c,2\}\}$.

Ποιές από τις ακόλουθες σχέσεις αληθεύουν;

$c{\in}A$	$B{\subseteq}A$	$E{\subseteq}F$	$D{\subseteq}G$	$c{\in}F$
$D{\subseteq}A$	$B{\in}G$	$G{\subseteq}A$	$\{c\}{\in}E$	$A{\subseteq}C$
$B{\subseteq}G$	$\{\{c\}\}{\subseteq}E$	$\{c\}{\in}C$	$F{\subseteq}A$	$\{B\}{\subseteq}G$

2. (α) Ορίστε τα ακόλουθα σύνολα με περιγραφή και αναδρομή:
   $\{5, 10, 15, 20, ...\}$ $\{0, 2, -2, 4, -4, 6, -6, ...\}$
   $\{300, 301, ..., 399, 400\}$

   (β) Ορίστε τα ακόλουθα σύνολα με αναγραφή των στοιχείων τους:
   $\{x|x$ είναι φωνήεν$\}$, $\{x|x^2{-}x{-}2{=}0\}$
   $\{x|x$ είναι ψηφίο του αριθμού $2324\}$

3. Έστω $A{=}\{2, 3, 4\}$, $B{=}\{x|x$ άρτιος$\}$, $C{=}\{x|x^2{-}6x{+}8 = 0\}$. Εξετάστε ποιές από τις ακόλουθες προτάσεις αληθεύουν:
$$A{\subset}B,\ C{\subset}A,\ C{\subseteq}B,\ B{\subseteq}A.$$

4. Έστω $S_1{=}\{\{\emptyset\}, \{A\}, A\}$, $S_2{=}A$, $S_3{=}\{A\}$, $S_4{=}\emptyset$, $S_5{=}\{\emptyset\}$ και $S_6{=}\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Ποιά από τα σύνολα αυτά ανήκουν στο S_1; Ποιά είναι υποσύνολα του S_1; Ποιά είναι στοιχεία του S_6; Ποιά είναι υποσύνολα του S_6;

5. Έστω $A{=}\{a, b, c\}$, $B{=}\{c, d\}$, $C{=}\{d, e, f\}$. Βρείτε τα σύνολα:
$$A{\cup}B,\ A{\cap}B,\ A{\cup}(B{\cap}C),\ B{\cup}\emptyset,\ A{\cap}(B{\cup}C),\ A{-}B.$$

6. Έστω ότι θεωρούμε ως σύμπαν αναφοράς το σύνολο $\bigcup\{A, B, C, D, E, F, G\}$, όπου τα A, ..., G είναι όπως στην άσκηση 1. (Με $\bigcup\{A, B, ..., G\}$ συμβολίζουμε το σύνολο $A{\cup}B{\cup}\ldots{\cup}G$ – δεν υπάρχει ανάγκη για παρενθέσεις, με βάση το νόμο προσεταιριστικότητας.) Βρείτε τα:
$$A{\cap}(B{\cup}C),\ (B{\cup}C) - (C{\cup}D),\ (A{\cap}C){-}(A{\cap}D),\ G',$$
$$D'{\cap}E',\ F{\cap}(A{-}B),\ (C{\cup}D){\cap}U,\ G{\cup}F',\ (B{\cap}C)'.$$

7. Βρείτε τα στοιχεία των $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$, $\mathcal{P}(\emptyset)$, $\mathcal{P}(\{0, \{1, 2\}\})$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a, b\}))$.

8. Έστω A τυχόν σύνολο. Εξετάστε ποιές από τις ακόλουθες προτάσεις αληθεύουν:
$$A{\in}\mathcal{P}(A),\ A{\subset}\mathcal{P}(A),\ \{A\}{\in}\mathcal{P}(A),\ \{A\}{\subseteq}\mathcal{P}(A).$$

9. Κατασκευάστε διαγράμματα Venn για καθεμιά από τις ακόλουθες περιπτώσεις (όπου τα A, B, C είναι τυχόντα σύνολα):
   (α) $A{\subseteq}B$, $C{\subseteq}B$, $A{\cap}C = \emptyset$,
   (β) $A{\subseteq}B$, $C{\not\subseteq}B$, $A{\cap}C{\neq}\emptyset$,
   (γ) $A{\subset}C$, $B{\cap}C = \emptyset$.

10. Δείξτε ότι, για οποιαδήποτε σύνολα A, B, αν $A \cap B = \emptyset$, τότε $A \cup B' = B'$ και $B \cap A' = B$.

11. Δείξτε ότι, για οποιαδήποτε σύνολα A, B, C, ισχύει:

$$((A \cup C) \cap (B \cup C')) \subseteq (A \cup B).$$

12. Δείξτε ότι, για αοποιαδήποτε σύνολα A, B, C, ισχύει:

$$(A - B) - C = (A - C) - (B - C).$$

13. Ορίζουμε τη *συμμετρική διαφορά* $A + B$ των συνόλων A, B ως το σύνολο με στοιχεία τα στοιχεία του A ή του B που δεν ανήκουν και στα δύο, δηλαδή, $A + B = (A \cup B) - (A \cap B)$. Δείξτε ότι:

    (α) $A + B = (A - B) \cup (B - A)$

    (β) $A + B = B + A$

    (γ) $((A - B) + (B - A)) = A + B$.

    Βρείτε τα $A + A$, $A + U$, $A + \emptyset$ και $A + B$, αν $A \subseteq B$ (για το τελευταίο).

Κεφάλαιο 2

Σχέσεις και συναρτήσεις

2.1 Καρτεσιανά γινόμενα

Στην ενότητα αυτή, σκοπός μας είναι να ορίσουμε την πράξη του Καρτεσιανού γινομένου, που δεν είναι τόσο στοιχειώδης όσο οι πράξεις που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Για τον ορισμό αυτό είναι απαραίτητη η έννοια του *διατεταγμένου ζεύγους*, που θα ορίσουμε πρώτα.

Όπως αναφέραμε, δεν υπάρχει επιβεβλημένη σειρά στα στοιχεία ενός συνόλου, σε πολλές περιπτώσεις όμως απαιτείται η τακτοποίηση των στοιχείων σε μια σειρά. Δοθέντων δύο αντικειμένων a και b, καλούμε *διατεταγμένο ζεύγος των* a, b, και συμβολίζουμε $\langle a,b\rangle$, το σύνολο με στοιχεία τα $\{a\}$, $\{a,b\}$, δηλαδή
(2-1) $\langle a,b\rangle=\{\{a\},\{a,b\}\}$.

Το a καλείται *πρώτη συντεταγμένη* και το b *δεύτερη συντεταγμένη*. Ο ορισμός αυτός, που οφείλεται στον von Neumann, εξασφαλίζει τη διαφορά του στοιχείου που εμφανίζεται πρώτο από εκείνο που εμφανίζεται δεύτερο. Συγκεκριμένα, για κάθε a, b, c, d ισχύει:

$$\langle a,b\rangle=\langle c,d\rangle \text{ αν και μόνον αν } a=c \text{ και } b=d,$$

οπότε για κάθε a, b ισχύει:

$$\langle a,b\rangle=\langle b,a\rangle \text{ αν και μόνον αν } a=b.$$

Ο ορισμός αυτός μπορεί να επεκταθεί σε διατεταγμένες τριάδες και γενικά διατεταγμένες n-άδες, για κάθε φυσικό αριθμό $n\geq 4$. Οι διατεταγμένες τριάδες, π.χ., ορίζονται ως εξής:
(2-2) $\langle a,b,c\rangle=\langle\langle a,b\rangle,c\rangle$.

Τώρα είμαστε σε θέση να ορίσουμε τη νέα πράξη συνόλων. Δοθέντων συνόλων A και B, καλούμε *Καρτεσιανό γινόμενο των* A, B, και συμβολίζουμε $A\times B$, το σύνολο με στοιχεία ακριβώς τα διατεταγμένα ζεύγη που κατασκευάζονται αν πάρουμε ως πρώτες συντεταγμένες τα στοιχεία του A και ως δεύτερες τα στοιχεία του B. Με χρήση κατηγορηματικού συμβολισμού, έχουμε
(2-3) $A\times B=\{\langle x,y\rangle|x\in A \text{ και } y\in B\}$.

Η επιλογή της λέξης "γινόμενο" οφείλεται στο γεγονός ότι, για πεπερασμένα A, B, αν ο πληθάριθμος του A είναι m και ο πληθάριθμος του B είναι n, τότε ο πληθάριθμος του $A{\times}B$ είναι $m{\cdot}n$.

Σημειώνουμε ότι, σύμφωνα με τον ορισμό, αν $A{=}\emptyset$ ή $B{=}\emptyset$, τότε $A{\times}B{=}\emptyset$.

Παράδειγμα: Έστω $A = \{a, b, c\}$ και $B = \{1, 2\}$. Τότε

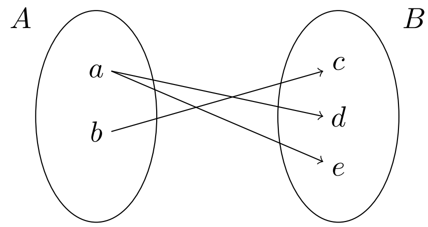
$$\text{(2-4)} \quad \begin{aligned} A{\times}B &= \{\langle a,1\rangle, \langle a,2\rangle, \langle b,1\rangle, \langle b,2\rangle, \langle c,1\rangle, \langle c,2\rangle\} \\ B{\times}A &= \{\langle 1,a\rangle, \langle 2,a\rangle, \langle 1,b\rangle, \langle 2,b\rangle, \langle 1,c\rangle, \langle 2,c\rangle\} \\ B{\times}B &= \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}. \end{aligned}$$

Είναι σπουδαίο να θυμόμαστε ότι τα στοιχεία ενός Καρτεσιανού γινομένου δεν είναι διατεταγμένα μεταξύ τους. Αν και κάθε στοιχείο του γινομένου είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος, το ίδιο το Καρτεσιανό γινόμενο είναι ένα μη διατεταγμένο σύνολο.

Δοθέντος ενός συνόλου M με στοιχεία διατεταγμένα ζεύγη, το M μπορεί να θεωρηθεί ως υποσύνολο ενός Καρτεσιανού γινομένου $A{\times}B$ για πολλές επιλογές των συνόλων A, B. Τα μικρότερα A και B για τα οποία ισχύει $M{\subseteq}A \times B$ μπορούν να βρεθούν, παίρνοντας $A{=}\{a|\langle a,b\rangle{\in}M$ για κάποιο $b\}$ και $B{=}\{b|\langle a,b\rangle{\in}M$ για κάποιο $a\}$. Αυτά τα σύνολα καλούνται *προβολές του M πάνω στην πρώτη και στη δεύτερη συντεταγμένη* αντίστοιχα. Π.χ., αν $M = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 3,2\rangle\}$, το σύνολο $\{1,3\}$ είναι η προβολή πάνω στην πρώτη συντεταγμένη και το $\{1,2\}$ η προβολή πάνω στη δεύτερη συντεταγμένη. Έτσι, το $\{1,3\}{\times}\{1,2\}$ είναι το μικρότερο Καρτεσιανό γινόμενο που περιέχει το M, δηλαδή, του οποίου το M είναι υποσύνολο. Άλλα παραδείγματα Καρτεσιανών γινομένων $A{\times}B$ για τα οποία ισχύει $M{\subseteq}A{\times}B$ είναι τα σύνολα $\{1,2,3\}{\times}\{1,2\}$, $\{1,3\}{\times}\{1,2,3\}$.

2.2 Σχέσεις

Έχουμε ένα φυσικό τρόπο κατανόησης σχέσεων ως το είδος των πραγμάτων που ισχύουν ή δεν ισχύουν μεταξύ αντικειμένων. Π.χ., η σχέση "μητέρα του" ισχύει μεταξύ οποιασδήποτε μητέρας και των παιδιών της, αλλά όχι μεταξύ, ας πούμε, των ίδιων των παιδιών. Αντικείμενα σ' ένα σύνολο μπορεί να σχετίζονται με αντικείμενα στο ίδιο ή σε κάποιο άλλο σύνολο. Με τη συνολοθεωρητική έννοια, μια *σχέση R από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B* είναι απλώς ένα υποσύνολο του Καρτεσιανού γινομένου $A{\times}B$. Αν μια σχέση ισχύει για στοιχεία ενός συνόλου A, τότε λέμε ότι είναι *σχέση στο A*. Αν η σχέση R ισχύει για τα αντικείμενα a και b, τότε, αντί για $\langle a,b\rangle{\in}R$ γράφουμε Rab ή aRb. Η προβολή της R πάνω στην πρώτη συντεταγμένη καλείται *πεδίο ορισμού* της R και η προβολή πάνω στη δεύτερη συντεταγμένη καλείται *πεδίο τιμών* της R. Τα στοιχεία του πεδίου ορισμού καλούνται *πρότυπα ή ορίσματα* και τα στοιχεία του πεδίου τιμών καλούνται *εικόνες*. Π.χ., η σχέση "μητέρα του/της" ορίζεται πάνω στο σύνολο A όλων των ανθρώπων και είναι ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών στο $A{\times}A$ τέτοιο που σε κάθε ζεύγος το πρώτο μέλος είναι μητέρα του δεύτερου μέλους. Την ίδια σχέση μπορούμε να θεωρήσουμε ως σχέση από το σύνολο των γυναικών C στο σύνολο των ανθρώπων A. Μπορούμε οπτικά να αναπαραστήσουμε μια σχέση R μεταξύ των συνόλων A και B με ένα διάγραμμα Venn ως εξής:



Σχήμα 2-1: Σχέση $R{:}A \to B$.

Στο Σχήμα 2-1, $A=\{a, b\}$ και $B = \{c, d, e\}$ και τα βέλη αντιπροσωπεύουν τα στοιχεία της σχέσης $R=\{\langle a, d\rangle, \langle a, e\rangle, \langle b, c\rangle\}$. Σημειώνουμε ότι μια σχέση μπορεί να συσχετίζει ένα αντικείμενο στο πεδίο ορισμού της με περισσότερα από ένα αντικείμενα στο πεδίο τιμών της.

Το *συμπλήρωμα* μιας σχέσης $R \subseteq A \times B$, συμβολικά R', ορίζεται ως το συμπλήρωμα του συνόλου R ως προς το σύνολο $A \times B$, δηλαδή,
(2-5) $R'=(A \times B)-R$.
Παρατηρούμε ότι $(R')'=R$.

Η *αντίστροφη* μιας σχέσης $R \subseteq A \times B$, συμβολικά R^{-1}, έχει ως στοιχεία της όλα τα στοιχεία της R, με αντεστραμμένες τις πρώτες και τις δεύτερες συντεταγμένες τους.

Π.χ., έστω $A=\{1, 2, 3\}$ και $R \subseteq A \times A$ η σχέση $\{\langle 3, 2\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$, που είναι η σχέση "μεγαλύτερος από" στο A. Η συμπληρωματική σχέση R' είναι η $\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$, η σχέση "μικρότερος από ή ίσος με" σχέση στο A. Η αντίστροφη της R, R^{-1}, είναι η $\{\langle 2, 3\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle\}$, η "μικρότερος από" σχέση στο A. Σημειώστε ότι $(R^{-1})^{-1}=R$ και ότι, αν $R \subseteq A \times B$, τότε $R^{-1} \subseteq B \times A$, αλλά $R' \subseteq A \times B$.

Ανάλογοι ορισμοί μπορούν να δοθούν για τριμελείς, τετραμελείς κτλ. σχέσεις.

2.3 Συναρτήσεις

Μια συνάρτηση είναι, από συνολοθεωρητική σκοπιά, μια ειδική σχέση. Μια σχέση R από το A στο B είναι *συνάρτηση* αν και μόνον αν ικανοποιεί τις επόμενες συνθήκες:

(1) κάθε στοιχείο του A αντιστοιχίζεται σε τουλάχιστον μία εικόνα και

(2) κάθε στοιχείο του A αντιστοιχίζεται το πολύ σε μία εικόνα.

Με άλλα λόγια, ένα υποσύνολο του Καρτεσιανού γινομένου $A \times B$ καλείται συνάρτηση, μόνο στην περίπτωση που κάθε στοιχείο του A εμφανίζεται ακριβώς μία φορά ως πρώτη συντεταγμένη στα στοιχεία του συνόλου αυτού.

Ως παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τα σύνολα $A=\{a, b, c\}$ και $B=\{1, 2, 3, 4\}$. Οι ακόλουθες σχέσεις από το A στο B είναι συναρτήσεις:

(2-6) $P = \{\langle a, 1\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle c, 3\rangle\}$
$Q = \{\langle a, 3\rangle, \langle b, 4\rangle, \langle c, 1\rangle\}$
$R = \{\langle a, 3\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle c, 2\rangle\}$.

Οι ακόλουθες σχέσεις από το A στο B δεν είναι συναρτήσεις:

(2-7) $S = \{\langle a, 1\rangle, \langle b, 2\rangle\}$
$T = \{\langle a, 2\rangle\langle b, 3\rangle, \langle a, 3\rangle, \langle c, 1\rangle\}$
$V = \{\langle a, 2\rangle, \langle a, 3\rangle, \langle b, 4\rangle\}$.

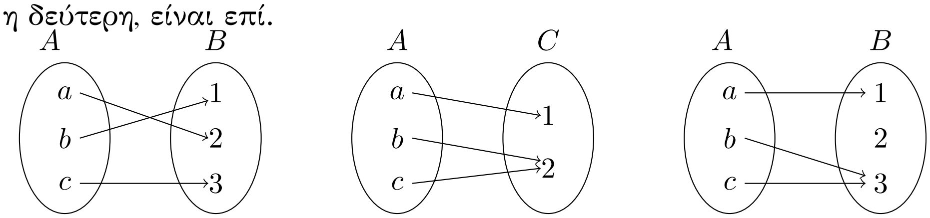
Η σχέση S δεν ικανοποιεί τη συνθήκη (1), διότι το πεδίο ορισμού, δηλαδή, το $\{a, b\}$ δεν ισούται με το A. Η σχέση T δεν ικανοποιεί τη συνθήκη (2), αφού το a σχετίζεται και με το 2 και με το 3. Για τη σχέση V δεν ικανοποιείται ούτε η συνθήκη (1) ούτε η συνθήκη (2).

Αφού οι συναρτήσεις είναι σχέσεις, χρησιμοποιούμε και για αυτές την ορολογία που αναφέρεται σε σχέσεις. Έτσι, αν μια συνάρτηση είναι υποσύνολο του $A \times B$, τότε λέμε ότι είναι *από το* A *στο* B, ενώ, αν είναι υποσύνολο του $A \times A$, τότε λέμε ότι είναι *στο* A. Για το συμβολισμό συναρτήσεων, συνήθως χρησιμοποιούμε τα γράμματα f, g, h, ..., ενώ για το συμβολισμό σχέσεων τα $R, S, T, \ldots$ Αν f είναι μια συνάρτηση από το A στο B, γράφουμε $f{:}A \to B$. Ο συνήθης τρόπος να εκφράσουμε ότι μια συνάρτηση δίνει μια τιμή σε ένα όρισμα είναι να γράφουμε πρώτα το όνομα της συνάρτησης, μετά το όρισμα μέσα σε παρενθέσεις, μετά το σύμβολο της ισότητας και τέλος την τιμή. Έτσι, π.χ., γράφουμε $f(a) = 2$ για να δηλώσουμε το γεγονός ότι η συνάρτηση f δίνει τιμή 2 στο όρισμα a.

Αντί για "συνάρτηση" λέμε και "απεικόνιση" ή "αντιστοιχία". Επίσης, όταν $f(2) = b$ λέμε "η f απεικονίζει το 2 στο b", θεωρώντας ότι η συνάρτηση f είναι ένας κανόνας μετασχηματισμού ορισμάτων σε τιμές. Αυτή η θεώρηση οφείλεται κυρίως στον τρόπο που βλέπουμε στα Μαθηματικά τις συναρτήσεις, δηλαδή, να ορίζονται μέσω τύπων που αναφέρονται σε πράξεις. Π.χ., γράφοντας $f(x) = 2x + 1$ εννοούμε τη συνάρτηση που απεικονίζει το 1 στο 3, το 2 στο 5 κτλ. (υποθέτοντας ότι θεωρούμε ως πεδίο ορισμού της το σύνολο των θετικών ακεραίων αριθμών). Τη συνάρτηση αυτή μπορούμε να δούμε με δύο τρόπους:

1. ως κανόνα που λέει "για να βρούμε την τιμή $f(x)$, πολλαπλασιάζουμε το x με 2 και προσθέτουμε 1" ή
2. ως το σύνολο (2-8) $\{\langle x, y\rangle | y = 2x + 1\}$ (όπου τα x και y είναι ακέραιοι)

Μερικές φορές είναι χρήσιμο να δηλώσουμε συγκεκριμένα αν το πεδίο τιμών μιας συνάρτησης από το A στο B ισούται με B. Αν το πεδίο τιμών μιας συνάρτησης ισούται με B, τότε η συνάρτηση είναι *επί του* B. Στο Σχήμα 2-2 φαίνονται τα διαγράμματα τριών συναρτήσεων f, g, h, από τις οποίες μόνο οι δύο, η πρώτη και η δεύτερη, είναι επί.



Σχήμα 2-2: Επεξήγηση των επί συναρτήσεων.

Μια συνάρτηση $f{:}A{\to}B$ καλείται *ένα-προς-ένα* συνάρτηση μόνο στην περίπτωση που διαφορετικά στοιχεία του A αντιστοιχίζονται σε διαφορετικά στοιχεία του B. Η συνάρτηση f στο Σχήμα 2-2 είναι ένα-προς-ένα, αλλά η g δεν είναι (αφού και το b και το c αντιστοιχίζονται στο 2) ούτε η h είναι (αφού $h(b){=}h(c){=}3$). Η συνάρτηση f που ορίζεται στο (2-8) είναι ένα-προς-ένα, αφού για κάθε περιττό ακέραιο y υπάρχει ένας μοναδικός ακέραιος x τέτοιος που $y{=}2x{+}1$. Σημειώστε ότι η f δεν είναι επί του συνόλου των ακεραίων, αφού κανένας άρτιος ακέραιος δεν είναι τιμή της f για κάποιο όρισμα x.

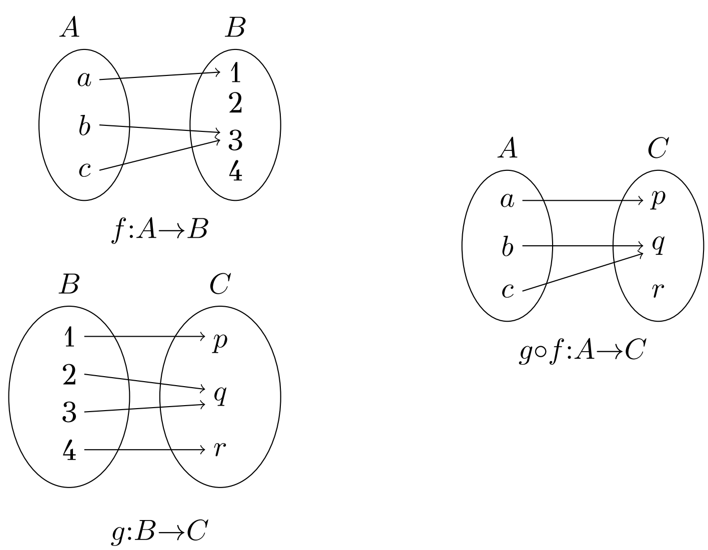
Μια συνάρτηση που είναι ένα-προς-ένα και επί (π.χ., η f στο Σχήμα 2-2) καλείται *ένα-προς-ένα αντιστοιχία*. Τέτοιες συναρτήσεις έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον, διότι οι αντίστροφές τους είναι επίσης συναρτήσεις. Για κάθε συνάρτηση f, αφού η f είναι σχέση, πάντα ορίζεται η αντίστροφη σχέση f^{-1}, η οποία όμως μπορεί να μην είναι συνάρτηση, διότι δεν ικανοποιείται είτε το πρώτο είτε το δεύτερο μέρος του ορισμού συνάρτησης. Έτσι, η αντίστροφη σχέση της g στο Σχήμα 2-2 δεν είναι συνάρτηση, αφού δεν ισχύει γι' αυτήν το πρώτο μέρος (το 2 απεικονίζεται στο b και στο c), ενώ η h^{-1} στο ίδιο σχήμα δεν είναι συνάρτηση, διότι δεν ισχύει γι' αυτήν το δεύτερο μέρος (το 2 δεν έχει αντίστοιχο).

2.4 Σύνθεση

Αν έχουμε δύο συναρτήσεις $f{:}A{\to}B$ και $g{:}B{\to}C$, μπορούμε να ορίσουμε μια νέα συνάρτηση από το A στο C, που καλείται *σύνθεση* των f και g και συμβολίζεται με $g{\circ}f$. Η σύνθεση συναρτήσεων ορίζεται ως εξής:

(2-9) $g{\circ}f{=}\{\langle x,z\rangle |$ για κάποιο $y, \langle x,y\rangle \in f$ και $\langle y,z\rangle \in g\}$.

Το Σχήμα 2-3 δείχνει δύο συναρτήσεις f και g και τη σύνθεσή τους.

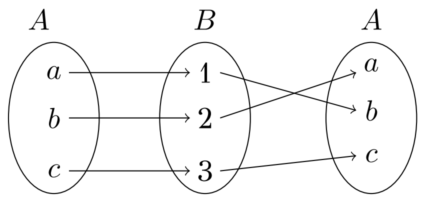


Σχήμα 2-3: Σύνθεση δύο συναρτήσεων f και g.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, η f είναι στο B και η g επί του C, ενώ καμιά τους δεν είναι ένα-προς-ένα. Αυτό δείχνει ότι μπορούμε να σχηματίσουμε συνθέσεις από συναρτήσεις που δεν έχουν αυτές τις ειδικές ιδιότητες. Για να ορίζεται καλά η σύνθεση δύο συναρτήσεων f και g, αρκεί το πεδίο τιμών της f να περιέχεται στο πεδίο ορισμού της g – αν αυτό δεν ισχύει, δηλαδή, αν υπάρχει y στο πεδίο τιμών της f που δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της g, τότε δεν ορίζεται η $g \circ f$.

Σημειώνουμε ότι, στο συμβολισμό $g \circ f$, εμφανίζεται πρώτη η συνάρτηση που εφαρμόζεται δεύτερη – η τιμή της f στο όρισμα a είναι $f(a)$ και η τιμή της g στο όρισμα $f(a)$ είναι $g(f(a))$ και, με βάση τον ορισμό της σύνθεσης, πρέπει το $g(f(a))$ και το $(g \circ f)(a)$ να είναι το ίδιο αντικείμενο. Προσοχή λοιπόν, στη σειρά, αφού δεν ισχύει γενικά ότι $f \circ g = g \circ f$, όπως φαίνεται στο ακόλουθο.

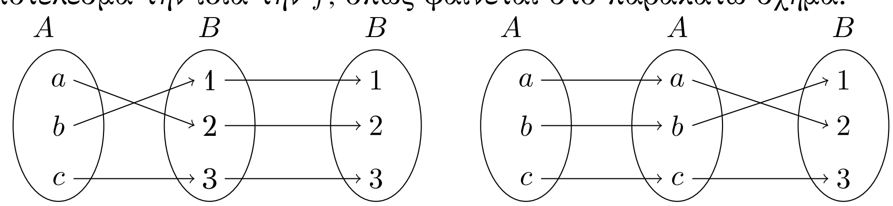
<u>Παράδειγμα:</u>



$f{:}A{\to}B$ $\quad$ $g{:}B{\to}A$

$$g \circ f = \{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle c,c\rangle\} \neq \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,3\rangle\} = f \circ g.$$

Μια συνάρτηση $f{:}A{\to}A$ τέτοια που $f = \{\langle x,x\rangle | x \in A\}$ καλείται *ταυτοτική συνάρτηση* και συμβολίζεται με id_A. Αυτή η συνάρτηση απεικονίζει κάθε στοιχείο του A στον εαυτό του (παρατηρούμε ότι η ταυτοτική συνάρτηση στο A είναι φυσικά μια σχέση που θα αποκαλούσαμε και "ταυτοτική σχέση στο A"). Αν συνθέσουμε μια συνάρτηση $f{:}A{\to}B$ με την id_B ή την id_A με την f, θα πάρουμε ως αποτέλεσμα την ίδια την f, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



$f{:}A{\to}B$ $\quad$ $id_B{:}B{\to}B$ $\qquad$ $id_A{:}A{\to}A$ $\quad$ $f{:}A{\to}B$

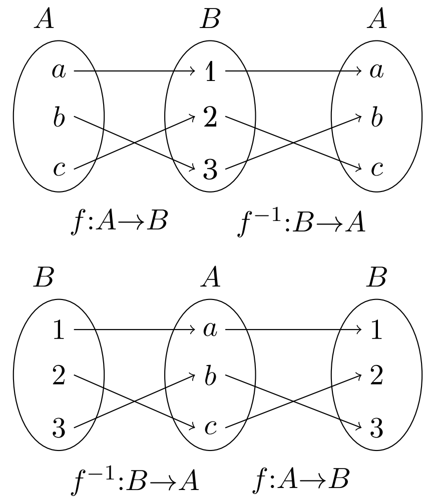
$id_B \circ f = f$ $\qquad$ $f \circ id_A = f$

Σχήμα 2-4: Σύνθεση με μια ταυτοτική συνάρτηση.

Για κάθε συνάρτηση $f{:}A{\to}B$ που είναι ένα-προς-ένα αντιστοιχία (οπότε η αντίστροφη είναι επίσης συνάρτηση), ισχύουν οι ακόλουθες εξισώσεις:

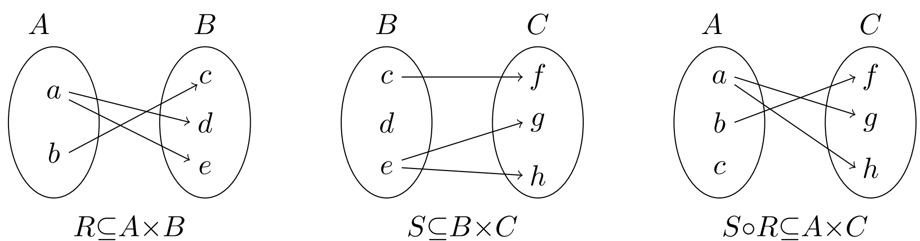
(2-10) $f^{-1} \circ f = id_A, \;\; f \circ f^{-1} = id_B,$

οι οποίες φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 2-5: Σύνθεση ένα-προς-ένα αντιστοιχίας με την αντίστροφή της.

Ο ορισμός της σύνθεσης δεν χρειάζεται να περιοριστεί σε συναρτήσεις, αλλά μπορεί να εφαρμοστεί γενικά για σχέσεις. Αν έχουμε δύο σχέσεις $R \subseteq A \times B$ και $S \subseteq B \times C$, η σύνθεση των R και S, συμβολικά $S \circ R$, είναι η σχέση $\{\langle x, z \rangle |$ για κάποιο $y, \langle x, y \rangle \in R$ και $\langle y, z \rangle \in S\}$. Ένα παράδειγμα φαίνεται στο Σχήμα 2-6.



Σχήμα 2-6: Σύνθεση δύο σχέσεων R και S.

Για κάθε σχέση $R \subseteq A \times B$ έχουμε επίσης τα εξής:

(2-11) $id_B \circ R = R$ και $R \circ id_A = R$.

Σημειώνουμε ότι όλοι οι ορισμοί που δώσαμε για συναρτήσεις μπορούν να δοθούν για συναρτήσεις με περισσότερες από μια μεταβλητή - μια συνάρτηση μπορεί να έχει ως πεδίο ορισμού της ένα σύνολο από διατεταγμένες n-άδες, για κάθε $n \geq 2$, αλλά κάθε τέτοια n-άδα θα απεικονίζεται σε μια μοναδική τιμή στο πεδίο τιμών. Π.χ., υπάρχει μια συνάρτηση που απεικονίζει κάθε ζεύγος φυσικών αριθμών στο άθροισμά τους.

2.5 Ιδιότητες σχέσεων

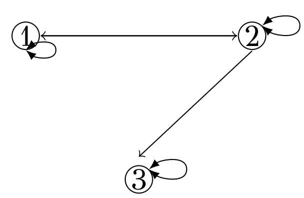
Στην ενότητα αυτή θα ορίσουμε κάποιες πολύ χρήσιμες ιδιότητες διμελών σχέσεων σε ένα σύνολο.

Ανακλαστικότητα
Μια σχέση R στο A είναι *ανακλαστική* αν και μόνον αν τα ζευγάρια της μορφής $\langle x, x\rangle$ ανήκουν στην R, για κάθε $x \in A$. Π.χ., ας πάρουμε το σύνολο $A = \{1, 2, 3\}$ και τις σχέσεις
(2-12) $\{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,1\rangle\}$, $\{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$.
Η πρώτη είναι ανακλαστική, διότι περιέχει τα ζεύγη $\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle$, ενώ η δεύτερη δεν είναι, διότι δεν περιέχει το ζεύγος $\langle 3,3\rangle$. Ένας άλλος τρόπος να διατυπωθεί ο ορισμός της ανακλαστικότητας είναι να πούμε ότι μια σχέση R στο A είναι ανακλαστική αν και μόνον αν η id_A, η ταυτοτική σχέση στο A, είναι υποσύνολο της R. Η σχέση "έχει τα ίδια γενέθλια με" είναι ανακλαστική στο σύνολο των ανθρώπων.
Συμμετρικότητα
Μια σχέση R στο σύνολο A είναι *συμμετρική* αν και μόνον αν, για κάθε ζευγάρι $\langle x, y\rangle$ στην R, το ζευγάρι $\langle y, x\rangle$ είναι επίσης στην R. Είναι σπουδαίο ότι ο ορισμός αυτός δεν απαιτεί κάθε διατεταγμένο ζευγάρι του $A \times A$ να είναι στην R. Για να είναι μια σχέση R συμμετρική πρέπει πάντα να αληθεύει ότι, <u>αν</u> ένα ζευγάρι είναι στην R, <u>τότε</u> το ζευγάρι με τα στοιχεία αντεστραμμένα είναι επίσης στην R. Τα ακόλουθα είναι παραδείγματα συμμετρικών σχέσεων στο $\{1, 2, 3\}$:
(2-13) $\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}, \{\langle 1,3\rangle, \langle 3,1\rangle\}$, $\{\langle 2,2\rangle\}$.
Η $\{\langle 2,2\rangle\}$ είναι συμμετρική σχέση, διότι, για κάθε ζεύγος σ' αυτήν, δηλαδή, το $\langle 2,2\rangle$, αληθεύει ότι το διατεταγμένο ζευγάρι με αντίστροφα το πρώτο και το δεύτερο μέλος, δηλαδή, το $\langle 2,2\rangle$, είναι στη σχέση. Ένα παράδειγμα μη συμμετρικής σχέσης είναι "ξάδελφος του/ης" στο σύνολο των ανθρώπων (δεν είναι συμμετρική, διότι το δεύτερο μέλος μπορεί να είναι άντρας). Είναι, όμως, συμμετρική, αν οριστεί στο σύνολο των γυναικών.
Οι ακόλουθες σχέσεις στο $\{1, 2, 3\}$ δεν είναι συμμετρικές:
(2-14) $\{\langle 2,3\rangle, \langle 1,2\rangle\}, \{\langle 3,3\rangle, \langle 1,3\rangle\}$, $\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,3\rangle\}$.
Μεταβατικότητα
Μια σχέση R είναι *μεταβατική* αν και μόνον αν για όλα τα ζευγάρια $\langle x, y\rangle$ και $\langle y, z\rangle$ στην R, το ζευγάρι $\langle x, z\rangle$ ανήκει επίσης στην R. Επειδή δεν είναι ανάγκη τα x, y, z να είναι όλα διαφορετικά, η ακόλουθη σχέση ικανοποιεί τον ορισμό της μεταβατικότητας για $x{=}y{=}z{=}2$.
(2-16) $\{\langle 2,2\rangle\}$.
Η σχέση που δίνεται στο (2-17) δεν είναι μεταβατική,
(2-17) $\{\langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 2,2\rangle\}$
διότι τα $\langle 3,2\rangle$ και $\langle 2,3\rangle$ είναι στοιχεία, αλλά το $\langle 3,3\rangle$ δεν είναι.
Μερικά επιπλέον παραδείγματα μεταβατικών σχέσεων είναι τα ακόλουθα:
(2-18) $\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,3\rangle\}$, $\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$.
Η σχέση "είναι πρόγονος του" είναι μεταβατική στο σύνολο των ανθρώπων.
Ολικότητα
Μια σχέση R στο A είναι *ολική* αν και μόνον αν για κάθε δύο διαφορετικά στοιχεία x και y στο A ισχύει $\langle x, y\rangle \in R$ ή $\langle y, x\rangle \in R$ (ή και τα δύο). Ο ορισμός της ολικότητας, όπως και αυτός της ανακλαστικότητας, αναφέρεται σε όλα τα στοιχεία του συνόλου A. Επιπλέον, τα ζευγάρια που αναφέρονται στον ορισμό

καθορίζεται ρητά ότι περιέχουν μη ταυτόσημα πρώτα και δεύτερα στοιχεία. Ζευγάρια της μορφής $\langle x, x\rangle$ δεν απαγορεύονται σε μια ολική σχέση, αλλά είναι άσχετα με τον καθορισμό της ολικότητας.
Οι ακόλουθες σχέσεις στο $\{1, 2, 3\}$ είναι ολικές:
(2-19) $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle\}, \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$.
Οι ακόλουθες σχέσεις στο $\{1, 2, 3\}$ δεν είναι ολικές:
(2-20) $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle\}, \{\langle 1, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 2\rangle\}$.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα σχέσεων που ορίζονται από κατηγορήματα, εξετάζοντας ποιές από τις ιδιότητες που ορίσαμε έχει καθεμιά.
(2-21) Παράδειγμα: R_π είναι η σχέση "είναι πατέρας του/της" στο σύνολο όλων των ανθρώπων. Η R_π δεν είναι ανακλαστική (κανένας δεν είναι πατέρας του εαυτού του), δεν είναι συμμετρική (αν ο x είναι πατέρας του y, τότε ποτέ δεν είναι αλήθεια ότι ο y είναι πατέρας του x), δεν είναι μεταβατική (αν ο x είναι πατέρας του y και ο y είναι πατέρας του z, τότε ο x είναι παππούς αλλά όχι πατέρας του z) και δεν είναι ολική (υπάρχουν διαφορετικά άτομα x και y στο A τέτοια που ούτε ο x είναι πατέρας του y ούτε ο y είναι πατέρας του x).
(2-22) Παράδειγμα: R είναι η σχέση "μεγαλύτερος από" ορισμένη στο σύνολο $\mathbb{Z}^+=\{1, 2, 3, 4, ...\}$ των θετικών ακεραίων. Το $\mathbb{Z}^+$ περιέχει άπειρο πλήθος στοιχείων και το ίδιο κάνει και η R, αλλά είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε τις σχετικές ιδιότητες της R από τη γνώση μας των γενικών ιδιοτήτων των ακεραίων. Η R δεν είναι ανακλαστική (κανείς ακέραιος αριθμός δεν είναι μεγαλύτερος από τον εαυτό του), δεν είναι συμμετρική (από την $x>y$ δεν έπεται η $y>x$), είναι όμως μεταβατική (αν $x>y$ και $y>z$, τότε $x>z$) και ολική (για κάθε ζεύγος διαφορετικών ακέραιων x και y, ισχύει ή $x>y$ ή $y>x$).
(2-23) Παράδειγμα: R_α είναι η σχέση "έχει την ίδια ηλικία με", στο σύνολο των ανθρώπων. Η R_α είναι ανακλαστική (καθένας έχει την ίδια ηλικία με τον εαυτό του), συμμετρική (αν ο x έχει την ίδια ηλικία με τον y, τότε και ο y έχει την ίδια ηλικία με τον x), μεταβατική (αν οι x, y έχουν την ίδια ηλικία και το ίδιο οι y, z, τότε ο x έχει την ίδια ηλικία με τον z), αλλά όχι ολική (υπάρχουν διαφορετικά άτομα στο A που δεν έχουν την ίδια ηλικία).

Για την καλύτερη κατανόηση των ιδιοτήτων μιας σχέσης, χρησιμοποιούμε διαγράμματα, στα οποία τα στοιχεία του συνόλου παριστάνονται από σημεία με ονόματα και το γεγονός ότι ένα ζεύγος $\langle a, b\rangle$ ανήκει στη σχέση παριστάνεται με ένα βέλος που ξεκινά από το a και τελειώνει στο b. Π.χ., η σχέση $R=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$ αναπαρίσταται στο ακόλουθο διάγραμμα:



Σχήμα 2-7: Διάγραμμα σχέσης.

Είναι προφανές από το παραπάνω διάγραμμα ότι η σχέση είναι ανακλαστική, αφού κάθε σημείο φέρει ένα βρόχο. Η σχέση είναι μη συμμετρική, διότι το 3 δε σχετίζεται με το 2, ενώ το 2 σχετίζεται με το 3. Είναι μη μεταβατική, αφού το 1 σχετίζεται με το 2 και το 2 με το 3, αλλά δεν υπάρχει κατ' ευθείαν βέλος από το 1 στο 3.

Αν μια σχέση είναι ολική, κάθε ζευγάρι διαφορετικών σημείων στο διάγραμμά της θα είναι απ' ευθείας ενωμένο με ένα βέλος. Βλέπουμε ότι η R δεν είναι ολική, αφού δεν υπάρχει κατ' ευθείαν διασύνδεση μεταξύ του 1 και του 3 στο Σχήμα 2-7.

Συνήθως μπορούμε αμέσως να συμπεράνουμε ποιές ιδιότητες έχει η αντίστροφη R^{-1} ή η συμπληρωματική R' μιας σχέσης R, με βάση τις ιδιότητές της.

Π.χ., ας πάρουμε μια ανακλαστική σχέση R στο A. Από τον ορισμό της ανακλαστικότητας, για κάθε $x \in A$ ισχύει $\langle x, x\rangle \in R$. Αφού η R^{-1} περιέχει όλα τα στοιχεία R, αλλά με τα μέλη τους αντεστραμμένα, κάθε ζευγάρι $\langle x, x\rangle$ είναι επίσης στην R^{-1}. Έτσι, η αντίστροφη της R είναι επίσης ανακλαστική. Η συμπληρωματική σχέση R' περιέχει όλα τα στοιχεία του $A \times A$ που δεν ανήκουν στην R. Αφού η R περιέχει κάθε ζευγάρι της μορφής $\langle x, x\rangle$ για $x \in A$, η R' δεν περιέχει κανένα από αυτά. Συνεπώς η συμπληρωματική σχέση δεν είναι ανακλαστική.

Ως ένα άλλο παράδειγμα, ας πάρουμε μια συμμετρική σχέση R στο A. Έχει άραγε το συμπλήρωμά της αυτή την ιδιότητα; Ας υποθέσουμε ότι το συμπλήρωμα R' δεν είναι συμμετρική σχέση και ας δούμε τι μπορούμε να συμπεράνουμε από αυτή την υπόθεση. Αν η R' δεν είναι συμμετρική, τότε υπάρχει κάποιο ζεύγος $\langle x, y\rangle \in R'$ τέτοιο που $\langle y, x\rangle \notin R'$, από τον ορισμό της συμμετρικότητας. Αφού $\langle y, x\rangle \notin R'$, το $\langle y, x\rangle$ πρέπει να ανήκει στο συμπλήρωμα της R', που είναι η ίδια η R. Επειδή η R είναι συμμετρική, το $\langle x, y\rangle$ πρέπει επίσης να ανήκει στην R. Αλλά ένα και το αυτό διατεταγμένο ζεύγος δεν μπορεί ν' ανήκει στην R και στο συμπλήρωμά της R', έτσι η υπόθεση ότι το συμπλήρωμα R' δεν είναι συμμετρικό οδηγεί σε κάτι παράλογο. Αυτό σημαίνει ότι η υπόθεση δεν μπορεί να είναι αληθής και το συμπλήρωμα R' πρέπει να είναι συμμετρική σχέση.

Στο Διάγραμμα 2-8 δίνουμε ένα κατάλογο ιδιοτήτων σχέσεων και των αντιστρόφων και συμπληρωματικών τους. Αυτές μπορούν ν' αποδειχθούν με βάση τους ορισμούς των εννοιών και τους νόμους της θεωρίας συνόλων.

R (όχι $\emptyset$)	R^{-1}	R'
ανακλαστική	ανακλαστική	όχι ανακλαστική
συμμετρική	συμμετρική	συμμετρική
μεταβατική	μεταβατική	εξαρτάται από την R
ολική	ολική	εξαρτάται από την R

Διάγραμμα 2-8: Διατήρηση ιδιοτήτων μιας σχέσης στην αντίστροφη και στη συμπληρωματική της.

2.6 Σχέσεις ισοδυναμίας και διαμερίσεις

Μια ιδιαίτερα σημαντική κατηγορία σχέσεων είναι οι *σχέσεις ισοδυναμίας*. Αυτές είναι σχέσεις που είναι ανακλαστικές, συμμετρικές και μεταβατικές. Η ισότητα είναι το πιο γνωστό παράδειγμα σχέσης ισοδυναμίας. Άλλα παραδείγματα είναι "έχει το ίδιο ύψος με" και "έχει την ίδια ηλικία με". Η χρήση σχέσεων ισοδυναμίας σ' ένα σύνολο έχει ως αποτέλεσμα τη διαίρεσή του σε υποσύνολα, τα στοιχεία καθενός από τα οποία θεωρούνται ως ισοδύναμα.

Για κάθε σχέση ισοδυναμίας, υπάρχει ένας φυσιολογικός τρόπος να διαιρέσουμε το σύνολο, πάνω στο οποίο είναι ορισμένη, σε ξένα ανά δύο υποσύνολα που καλούνται *κλάσεις ισοδυναμίας.*Έστω ότι η R είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο A. Για τυχόν $x{\in}A$, καλούμε *κλάση ισοδυναμίας του* x, και συμβολίζουμε με $[x]$, το σύνολο $\{y{\in}A|xRy\}$. Η σχέση "έχει την ίδια ηλικία με" διαιρεί το σύνολο των ανθρώπων σε ηλικιακές ομάδες, δηλαδή, σύνολα ανθρώπων της ίδιας ηλικίας, Κάθε ζευγάρι διαφορετικών κλάσεων ισοδυναμίας δίνει ξένα σύνολα, διότι κάθε άτομο ανήκει σε μόνο μια κλάση ισοδυναμίας, Αυτό ισχύει ακόμη κι αν κάποιος είναι 120 χρονών και είναι το μόνο άτομο αυτής της ηλικίας, οπότε καταλαμβάνει μια κλάση μόνο του.

Δοθέντος ενός μη κενού συνόλου A, μια *διαμέριση* του A είναι μια συλλογή από μη κενά υποσύνολα του A τέτοια που

1. για κάθε δύο διαφορετικά υποσύνολα X και Y ισχύει $X{\cap}Y{=}\emptyset$ και
2. η ένωση όλων των υποσυνόλων της συλλογής ισούται με A.

Η έννοια της διαμέρισης δεν ορίζεται για το κενό σύνολο. Τα υποσύνολα που είναι στοιχεία της διαμέρισης καλούνται *κύτταρα* της διαμέρισης.

Π.χ., έστω $A = \{a, b, c, d, e\}$. Τότε το $C = \{\{a, c\}, \{b, e\}, \{d\}\}$ είναι μια διαμέριση του A, διότι κάθε ζεύγος κυττάρων έχει κενή τομή

$$\{a, c\} \cap \{b, e\} = \emptyset,\ \{b, e\} \cap \{d\} = \emptyset \text{ και } \{a, c\} \cap \{d\} = \emptyset$$

και η ένωση των κυττάρων ισούται με A: $\{a, c\}{\cup}\{b, e\}{\cup}\{d\}{=}A$.

Τα ακόλουθα τρία σύνολα είναι επίσης διαμερίσεις του A:

(2-24) $C_1{=}\{\{a, c, d\}, \{b, e\}\}$, $C_2{=}\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}\}$,
$C_3{=}\{\{a, b, c, d, e\}\}$

Τα ακόλουθα σύνολα δεν είναι διαμερίσεις του A:

(2-25) $C_4{=}\{\{a, b, c\}, \{b, d\}, \{e\}\}$, $C_5{=}\{\{a\}, \{b, e\}, \{c\}\}$.

Το C_4 δεν ικανοποιεί τον ορισμό, διότι $\{a, b, c\}{\cap}\{b, d\} \neq \emptyset$ και το C_5 δεν τον ικανοποιεί, διότι $\{a\}{\cup}\{b, e\}{\cup}\{c\}{\neq}A$.

Υπάρχει μια φυσιολογική αντιστοιχία μεταξύ διαμερίσεων και σχέσεων ισοδυναμίας. Αν έχουμε μια διαμέριση ενός συνόλου A, τότε η σχέση

$$R = \{\langle x, y\rangle|\ \text{τα } x \text{ και } y \text{ ανήκουν στο ίδιο κύτταρο της διαμέρισης}\}$$

είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο A. Αντίστροφα, αν μας δοθεί μια σχέση ισοδυναμίας R στο A, προκύπτει η ακόλουθη διαμέριση του A:

$$C_R=\{[x]|x \in A\}.$$

Δηλαδή, οι κλάσεις ισοδυναμίας που καθορίζονται από την R είναι απλά τα κύτταρα της διαμέρισης C_R, που λέμε ότι *επάγεται στο* A *από την* R.

Ως ένα παράδειγμα, ας θεωρήσουμε το σύνολο $A=\{1,2,3,4,5\}$ και τη σχέση ισοδυναμίας

(2-26) $R=\{\langle 1,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 4,5\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 5,2\rangle, \langle 5,4\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 2,5\rangle\}$.

Σ' αυτή τη σχέση, τα 1 και 3 σχετίζονται μεταξύ τους με όλους τους δυνατούς τρόπους, όπως και τα 2, 4 και 5, αλλά κανένα στοιχείο της πρώτης ομάδας δεν σχετίζεται με κανένα στοιχείο της δεύτερης. Συνεπώς η R ορίζει τις κλάσεις ισοδυναμίας $\{1,3\}$ και $\{2,4,5\}$ και η αντίστοιχη διαμέριση που επάγεται στο A είναι η ακόλουθη

(2-27) $C_R=\{\{1,3\},\{2,4,5\}\}$.

Δοθείσης της διαμέρισης

(2-28) $C=\{\{1,2\},\{3,5\},\{4\}\}$,

η σχέση R_C που αποτελείται από τα διατεταγμένα ζευγάρια $\langle x,y\rangle$ τέτοια που τα x και y είναι στο ίδιο κύτταρο της διαμέρισης είναι η ακόλουθη:

(2-29) $R_C=\{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle 5,3\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 4,4\rangle\}$.

Η R_C φαίνεται ότι είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική, συνεπώς είναι μια σχέση ισοδυναμίας.

Ένα άλλο παράδειγμα είναι η σχέση ισοδυναμίας "βρίσκεται στην ίδια ήπειρο με" στο σύνολο

A=\{Γαλλία, Χιλή, Νιγηρία, Ισημερινός, Λουξεμβούργο, Ζάμπια, Γκάνα, Άγιος Μαρίνος, Ουρουγουάη, Κένυα, Ουγγαρία\}.

Η σχέση αυτή διαμερίζει το A σε τρεις κλάσεις ισοδυναμίας:

A_1 = \{Γαλλία, Λουξεμβούργο, Άγιος Μαρίνος, Ουγγαρία\}
A_2 = \{Χιλή, Ισημερινός, Ουρουγουάη\}
A_3 = \{Νιγηρία, Ζάμπια, Γκάνα, Κένυα\}.

Ασκήσεις

1. Έστω $A=\{b,c\}$ και $B=\{2,3\}$.

   (α) Ορίστε τα ακόλουθα σύνολα με αναγραφή των στοιχείων τους:
   $A\times B$, $B\times A$, $A\times A$, $(A\cup B)\times B$, $(A-B)\times(B-A)$, $(A\times B)\times B$.

   (β) ποιές από τις ακόλουθες προτάσεις αληθεύουν;
   $\emptyset\subseteq A\times A$ $\quad$ $(A\times B)\cup(B\times A)=\emptyset$ $\quad$ $\langle c,c\rangle\subseteq A\times A$
   $A\times A\subseteq B\times A$ $\quad$ $\{\langle b,3\rangle,\langle 3,b\rangle\}\subseteq(A\times B)\cup(B\times A)$

2. Θεωρούμε την ακόλουθη σχέση από το A στο $A\cup B$, όπου A, B είναι τα σύνολα της άσκησης 1: $R=\{\langle b,b\rangle, \langle b,2\rangle, \langle c,2\rangle, \langle c,3\rangle\}$.
   Βρείτε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της R. Βρείτε την αντίστροφη σχέση και τη συμπληρωματική της R. Ισχύει ότι $(R')^{-1}=(R^{-1})'$;

3. Έστω R η σχέση στο σύνολο των φυσικών αριθμών που ορίζεται ως $\{\langle x,y\rangle | 2x{+}4y{=}16\}$. Βρείτε τα στοιχεία της R. Ποιό είναι το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της R; Βρείτε την αντίστροφη και τη συμπληρωματική της R.

4. Έστω R η σχέση "είναι αδελφός του/της" και S η σχέση "είναι αδελφή του/της". Περιγράψτε τις σχέσεις $R{\cap}S$, $R{\cup}S$, $R{-}S$.

5. Δείξτε ότι για τυχόντα σύνολα A, B, C, D:
$$(A{\cap}B){\times}(C{\cap}D){=}(A{\times}C){\cap}(B{\times}D).$$

6. Έστω $A = \{a, b, c\}$ και $B = \{1, 2\}$. Πόσες διαφορετικές σχέσεις υπάρχουν από το A στο B; Πόσες από αυτές είναι συναρτήσεις από το A στο B; Πόσες από τις συναρτήσεις είναι επί και πόσες 1-1; Πόσες από τις συναρτήσεις έχουν αντίστροφες που είναι συναρτήσεις;

7. Έστω f, g συναρτήσεις στο σύνολο των θετικών ακέραιων που ορίζονται από τους τύπους: $f(x){=}x^2{+}3x{+}1$, $g(x){=}2x{-}3$. Βρείτε τύπους που ορίζουν τις συναρτήσεις $f{\circ}g$, $g{\circ}f$.

8. Θεωρούμε τις σχέσεις $R{=}\{\langle a,1\rangle, \langle b,3\rangle, \langle c,3\rangle\}$ και $S{=}\{\langle 1,p\rangle, \langle 2,q\rangle, \langle 3,q\rangle, \langle 4,r\rangle\}$. Δείξτε ότι $(S{\circ}R)^{-1}{=}R^{-1}{\circ}S^{-1}$. Ισχύει αυτό για οποιεσδήποτε σχέσεις R, S;

9. Καθορίστε τις ιδιότητες των ακόλουθων σχέσεων στο σύνολο των ανθρώπων:
   (α) είναι παιδί του/της
   (β) είναι αδελφός του/της
   (γ) είναι απόγονος του/της

   Ποιές από τις απαντήσεις σας θα αλλάξουν, αν αυτές οι σχέσεις οριστούν στο σύνολο των ανδρών;

10. Έστω ότι R, S είναι σχέσεις στο σύνολο A. Ποιές από τις ακόλουθες προτάσεις αληθεύουν;
    (α) Αν η R είναι μεταβατική και η S είναι μεταβατική, τότε η $R{\cup}S$ είναι μεταβατική.
    (β) Αν η R είναι ανακλαστική και η S είναι ανακλαστική, τότε η $R{\cap}S$ είναι ανακλαστική.

11. Θεωρούμε τις σχέσεις στο σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών που ορίζονται από τις εκφράσεις "x είναι πολλαπλάσιο του y", "το γινόμενο των x, y ισούται με το τετράγωνο κάποιου αριθμού". Για καθεμιά, εξετάστε αν είναι ανακλαστική, συμμετρική, μεταβατική.

12. Έστω ότι R, S είναι σχέσεις ισοδυναμίας στο σύνολο A. Δείξτε ότι η $R{\cap}S$ είναι επίσης σχέση ισοδυναμίας στο A.

13. Έστω ότι η σχέση R στο σύνολο A είναι ανακλαστική και μεταβατική. Θεωρούμε τη σχέση S στο A που ορίζεται ως εξής:

$$xSy \text{ ανν } (xRy \text{ και } yRx).$$

Δείξτε ότι η S είναι σχέση ισοδυναμίας στο A.

14. Έστω $A=\{1,2,3,4\}$. Προσδιορίστε τις ιδιότητες καθεμιάς από τις επόμενες σχέσεις, τις αντίστροφές τους και τις συμπληρωματικές τους. Αν κάποια είναι σχέση ισοδυναμίας, βρείτε τη διαμέριση που επάγει στο A.

$$R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 4,1\rangle\}$$
$$R_2=\{\langle 3,4\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 1,3\rangle\}$$
$$R_3=\{\langle 2,4\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 4,2\rangle\}.$$

Βρείτε τη σχέση ισοδυναμίας που επάγει τη διαμέριση $C=\{\{1\},\{2,3\},\{4\}\}$ στο A. Πόσες διαφορετικές διαμερίσεις του A είναι δυνατές;

Κεφάλαιο 3

Πληθικοί αριθμοί

Στις προηγούμενες ενότητες, είδαμε σύνολα, όπως το σύνολο των φυσικών αριθμών, που διαισθητικά θεωρούμε ως άπειρα. Τώρα θέλουμς να εξετάσουμε την έννοια του απείρου με περισσότερες λεπτομέρειες.

Μια απόπειρα να οριστεί η έννοια του απείρου με όρους όπως "ατελείωτος" ή "αδύνατος να καταλογογραφηθεί" θα ήταν μη ικανοποιητική, διότι οι εκφράσεις αυτές είναι εξίσου ασαφείς με τον όρο που θέλουμε να ορίσουμε. Το ζητούμενο είναι να δοθεί ένας ορισμός που χρησιμοποιεί συνολοθεωρητικές έννοιες και συμφωνεί με τη διαισθητική χρήση του όρου "άπειρος". Καταρχάς πρέπει να συμφωνήσουμε τι εννοούμε όταν λέμε ότι δύο σύνολα έχουν το ίδιο μέγεθος ή το ίδιο πλήθος στοιχείων.

3.1 Ισοδύναμα σύνολα

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο σύνολα, πεπερασμένα με τη διαισθητική έννοια και θέλουμε να δούμε αν αυτά έχουν το ίδιο μέγεθος. Π.χ., ας πούμε ότι έχουμε ένα σύνολο αντιγράφων ενός εγγράφου και ένα σύνολο ταχυδρομικών θυρίδων και θέλουμε να δούμε αν έχουμε τόσα αντίγραφα όσες είναι οι θυρίδες. Αυτό που θα κάνουμε είναι να τοποθετήσουμε ακριβώς ένα αντίγραφο σε κάθε θυρίδα με τη σειρά, μέχρι να τελειώσουν τα διαθέσιμα αντίγραφα. Αν στο τέλος υπάρχει αντίγραφο σε κάθε θυρίδα, τότε τα δύο σύνολα έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων, αλλιώς τα μεγέθη τους είναι άνισα. Αυτήν ακριβώς την ιδέα χρησιμοποιούμε και στη θεωρία συνόλων για να ορίσουμε την έννοια της *ισοδυναμίας* ή *ισοπληθικότητας*.

Λέμε ότι δύο σύνολα A και B είναι *ισοδύναμα* ή *ισοπληθικά* αν και μόνον αν υπάρχει μια ένα-προς-ένα αντιστοιχία μεταξύ τους, δηλαδή, μια συνάρτηση $f{:}A{\to}B$ που είναι ένα-προς-ένα. Γράφουμε $A{\sim}B$ για να συμβολίσουμε ότι τα A, B είναι ισοδύναμα.

Σημειώνουμε ότι, αν δύο σύνολα είναι ίσα, τότε είναι προφανώς ισοδύναμα. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει, αφού μια αντιστοιχία μπορεί να συσχετίζει μεταξύ τους διαφορετικά αντικείμενα, όπως τα αντίγραφα και τις θυρίδες παραπάνω.

Ο ορισμός που δώσαμε συμφωνεί απόλυτα με τον τρόπο που μεταχειριζόμαστε τα διαισθητικά πεπερασμένα σύνολα. Έτσι, οποιοδήποτε σύνολο με τέσσερα στοιχεία μπορεί να τεθεί σε ένα-προς-ένα αντιστοιχία με οποιοδήποτε άλλο σύνολο που έχει ακριβώς τέσσερα στοιχεία, αλλά δεν είναι ισοδύναμο με κανένα πεπερασμένο σύνολο που έχει λιγότερα ή περισσότερα στοιχεία. Επιπλέον, δεν είναι δυνατόν ένα πεπερασμένο σύνολο να είναι ισοδύναμο με κάποιο γνήσιο υποσύνολό του.

Τα διαισθητικά άπειρα σύνολα συμπεριφέρονται με εντελώς διαφορετικό τρόπο. Πράγματι, ας θεωρήσουμε το σύνολο των θετικών ακεραίων $\mathbb{Z}^+{=}\{1,2,3,...\}$ και το σύνολο των άρτιων θετικών ακεραίων $\mathbb{Z}^+_\alpha{=}\{2,4,6,...\}$. Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι η συνάρτηση $f{:}\mathbb{Z}^+{\to}\mathbb{Z}^+_\alpha$ με $f(x){=}2x$, δηλαδή, η συνάρτηση που σε κάθε θετικό ακέραιο αντιστοιχεί το διπλάσιό του, είναι μια ένα-προς-ένα αντιστοιχία. Πράγματι, η f είναι ένα-προς-ένα, διότι για οποιουσδήποτε θετικούς ακέραιους x και y, αν $f(x){=}f(y)$, δηλαδή, $2x{=}2y$, τότε $x{=}y$. Επίσης, η f είναι επί, αφού για οποιονδήποτε θετικό ακέραιο z υπάρχει θετικός ακέραιος x τέτοιος που $2x{=}z$, δηλαδή, $f(x){=}z$.

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbb{Z}^+ & = & \{ & 1, & 2, & 3, & ... & \} \\ & f & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & ... & \\ \mathbb{Z}^+_\alpha & = & \{ & 2, & 4, & 6, & ... & \} \end{array}$$

Συνεπώς, με βάση τον προηγούμενο ορισμό, τα δύο σύνολα είναι ισοδύναμα, πράγμα εκπληκτικό, αφού το $\mathbb{Z}^+_\alpha$ είναι γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{Z}^+$. Ενώ λοιπόν συνήθως δεχόμαστε ότι κάθε σύνολο έχει μεγαλύτερο μέγεθος από κάθε γνήσιο υποσύνολό του, αυτό δεν ισχύει αν χρησιμοποιήσουμε την έννοια της ισοδυναμίας για τη μέτρηση των μεγεθών των συνόλων. Τα σύνολα που δεν έχουν αυτή την ιδιότητα είναι ακριβώς αυτά που είναι διαισθητικά άπειρα. Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε την έννοια του απείρου ως εξής:

Ορισμός. Έστω A τυχόν σύνολο. Λέμε ότι το A είναι *άπειρο* ανν το A είναι ισοδύναμο με κάποιο γνήσιο υποσύνολό του.

Ας δούμε άλλο ένα παράδειγμα απείρου συνόλου.

Παράδειγμα: Το σύνολο A^* των πεπερασμένων ακολουθιών από στοιχεία του συνόλου $A{=}\{a,b\}$ είναι άπειρο.

Πράγματι, ας θεωρήσουμε το εξής γνήσιο υποσύνολο του A^*:

$$B{=}\{b, ba, bb, baa, bab, ...\},$$

δηλαδή, το σύνολο των ακολουθιών που αρχίζουν με b. Τότε η απεικόνιση που ορίζεται ως εξής:

$$\begin{array}{cccccccccc} A^* & = & \{ & e, & a & b & aa & ab & ... & \} \\ & g & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & ... & \\ B & = & \{ & b, & ba & bb & baa & bab & ... & \} \end{array}$$

δηλαδή, η συνάρτηση που αντιστοιχεί σε κάθε ακολουθία $x{\in}A^*$ την ακολουθία $bx{\in}B$, είναι μια ένα-προς-ένα αντιστοιχία (όπου με e συμβολίζουμε την κενή ακολουθία στοιχείων του A).

3.2 Πληθάριθμοι συνόλων

Από τον ορισμό της έννοιας της ισοδυναμίας έχουμε ότι, για οποιαδήποτε σύνολα A, B, C:

(α) $A{\sim}A$

(β) αν $A{\sim}B$, τότε $B{\sim}A$

(γ) αν $A{\sim}B$ και $B{\sim}C$, τότε $A{\sim}C$.

Συνεπώς μπορούμε να θεωρήσουμε την $\sim$ ως μια γενικευμένη σχέση ισοδυναμίας πάνω στη συλλογή όλων των συνόλων (είναι γνωστό ότι η συλλογή αυτή δεν αποτελεί σύνολο). Με βάση αυτά που είπαμε στην ενότητα 2, η συλλογή όλων των συνόλων διαμερίζεται σε γενικευμένες κλάσεις ισοδυναμίας, σε καθεμιά από τις οποίες έχουν ομαδοποιηθεί σύνολα ισοδύναμα μεταξύ τους. Σε κάθε τέτοια κλάση αντιστοιχούμε ένα αριθμό που καλούμε *πληθικό αριθμό* ή *πληθάριθμο*, ο οποίος αντιστοιχεί στο μέγεθος, δηλαδή, στο πλήθος των στοιχείων, κάθε συνόλου που ανήκει στην κλάση αυτή (ο ακριβής τρόπος με τον οποίο γίνεται αυτό απειτεί εργαλεία που δεν θα συζητήσουμε εδώ). Τον πληθικό αριθμό ενός τυχόντος συνόλου A συμβολίζουμε με $|A|$. Ο πληθικός αριθμός του συνόλου των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ συμβολίζεται με $\aleph_0$.

Λέμε ότι ένα σύνολο είναι *απαριθμήσιμο* ή *απαριθμήσιμα άπειρο* ανν ο πληθικός του αριθμός είναι ο $\aleph_0$, δηλαδή, το σύνολο είναι ισοδύναμο με το $\mathbb{N}$. Ας δούμε μερικά παραδείγματα τέτοιων συνόλων.

Παράδειγμα. Το σύνολο των ακεραίων, συμπεριλαμβάνοντας το μηδέν, δηλαδή, το $\mathbb{Z}{=}\{0, +1, -1, +2, -2, ...\}$ είναι απαριθμήσιμο. Μια ένα-προς-ένα αντιστοιχία με το $\mathbb{N}$ είναι

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbb{Z} & = & \{ & 0, & +1, & -1, & +2, & -2, & ... & \} \\ & F & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ \mathbb{N} & = & \{ & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & ... & \} \end{array}$$

Η συνάρτηση $F{:}\mathbb{Z}{\to}\mathbb{N}$ ορίζεται από

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = 0 \\ 2x{-}1, & \text{αν } x \text{ θετικός} \\ -2x, & \text{αν } x \text{ αρνητικός.} \end{cases}$$

Ότι η F είναι πράγματι ένα-προς-ένα αντιστοιχία μπορούμε να το δούμε αν παρατηρήσουμε ότι οι θετικοί αριθμοί στο $\mathbb{Z}$ αντιστοιχούν σε περιττούς αριθμούς στο $\mathbb{N}$ και οι αρνητικοί αριθμοί στο $\mathbb{Z}$ αντιστοιχούν σε άρτιους αριθμούς στο $\mathbb{N}$ (με το 0 ν' αντιστοιχεί στο 0).

Παράδειγμα. Το σύνολο των αντίστροφων των φυσικών αριθμών χωρίς το 0, δηλαδή, το $S=\{\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},...\}$, είναι απαριθμήσιμα άπειρο, όπως φαίνεται από την ακόλουθη ένα-προς-ένα αντιστοιχία με το $\mathbb{N}$:

$$\begin{array}{ccccccccc} S & = & \{ & \frac{1}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{4}, & ... & \} \\ & G & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ \mathbb{N} & = & \{ & 0, & 1, & 2, & 3, & ... & \} \end{array} \qquad G(x)=\frac{1}{x}-1.$$

Υπάρχουν άραγε σύνολα με περισσότερα στοιχεία από το σύνολο των φυσικών αριθμών; Ένα τέτοιο σύνολο φαίνεται διαισθητικά να είναι το Καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Όταν τα ζεύγη απαριθμούνται με τη σειρά που φαίνεται στο επόμενο σχήμα, όμως, βλέπουμε ότι ορίζεται μια ένα-προς-ένα αντιστοιχία μεταξύ του $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ και του $\mathbb{N}$, αν και σ' αυτή την περίπτωση είναι κάπως δύσκολο ν' αποδείξουμε ότι η αντιστοιχία είναι ένα-προς-ένα.

$$\begin{array}{ccccccccc} <0,0> & \rightarrow & <0,1> & & <0,2> & & <0,3> & ... \\ & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow \\ <1,0> & & <1,1> & & <1,2> & & <1,3> & ... \\ & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow \\ <2,0> & & <2,1> & & <2,2> & & <2,3> & ... \\ & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \end{array}$$

Μια απαρίθμηση των στοιχείων του $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

Θα μπορούσε κάποιος να σκεφθεί ότι υπάρχουν περισσότεροι ρητοί αριθμοί από φυσικούς αριθμούς, αφού υπάρχουν άπειροι ρητοί μεταξύ δύο οποιωνδήποτε φυσικών αριθμών (υπενθυμίζουμε ότι ένας αριθμός είναι ρητός, αν μπορεί να γραφεί ως πηλίκο $\frac{x}{y}$ δύο ακεραίων x, y, όπου $y\neq 0$). Όμως μπορεί ν' αποδειχθεί ότι το σύνολο των ρητών και το σύνολο των φυσικών έχουν τον ίδιο πληθάριθμο.

Για να ορίσουμε μια αντιστοιχία, γράφουμε τους θετικούς ρητούς αριθμούς σε ένα πίνακα ως εξής:

$$\begin{array}{cccccc} 1/1, & 2/1, & 3/1, & 4/1, & 5/1, & ... \\ 1/2, & 2/2, & 3/2, & 4/2, & ... & ... \\ 1/3, & 2/3, & 3/3, & ... & ... & ... \\ 1/4, & 2/4, & ... & ... & ... & ... \\ 1/5, & ... & ... & ... & ... & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Πρώτα ορίζουμε μια αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων αυτού του καταλόγου και των θετικών ακέραιων ως εξής: αρχίζοντας από την πάνω αριστερή γωνία, μετράμε τα στοιχεία των διαδοχικών διαγωνίων από την πρώτη σειρά μέχρι την πιο αριστερή στήλη. Οι πρώτοι όροι αυτής της αντιστοιχίας είναι: ο 1/1 στο 1, ο 2/1 στο 2, ο 1/2 στο 3, ο 3/1 στο 4, ο 2/2 στο 5 κτλ. Αυτό μοιάζει με την αρίθμηση στο προηγούμενο σχήμα. Στη συνέχεια, αντιστοιχούμε στους αρνητικούς ρητούς αρνητικούς ακέραιους και στο 0 το 0, οπότε παίρνουμε μια πλήρη αντιστοιχία μεταξύ των ακεραίων και των ρητών. Κατόπιν χρησιμοποιούμε την υπάρχουσα αντιστοιχία μεταξύ των φυσικών και των ακεραίων αριθμών. Οι ρητοί αριθμοί θα έχουν εμφανιστεί περισσότερες από μια φορές σ' αυτή τη διαδικασία, π.χ., ο 1/2 εμφανίζεται και ως 2/4, 3/6 κτλ. Αυτό όμως δεν αποτελεί ουσιαστικό πρόβλημα: έχοντας βρει μια ένα-προς-ένα αντιστοιχία μεταξύ αυτού του μεγαλύτερου συνόλου και του συνόλου των φυσικών αριθμών, μπορούμε να διατρέξουμε τον κατάλογο διαγράφοντας κάθε εμφάνιση ενός ρητού αριθμού που έχει ήδη εμφανιστεί σε άλλη μορφή, μεταφέροντας τους επόμενους όρους ψηλότερα στον κατάλογο για να γεμίσουμε τα κενά.

Με όμοιο τρόπο, μπορούμε να δείξουμε ότι τα σύνολα των διατεταγμένων τριάδων, τετράδων κτλ. φυσικών αριθμών είναι απαριθμήσιμα. Θεωρώντας λοιπόν τα σύνολα $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ κτλ., δε θα βρούμε σύνολο με πληθικό αριθμό διαφορετικό από τον $\aleph_0$. Κάποτε έγινε η υπόθεση ότι δεν υπήρχαν σύνολα με πληθικότητα μεγαλύτερη από $\aleph_0$, αλλά ο Georg Cantor (1845-1918), ο μαθηματικός που ανέπτυξε μεγάλο μέρος της θεωρίας συνόλων, απέδειξε ότι αυτό δεν αληθεύει, αποδεικνύοντας ότι το σύνολο [0,1], δηλαδή, το σύνολο των πραγματικών αριθμών μεταξύ του 0 και του 1 (συμπεριλαμβανομένων των 0 και 1) δεν είναι απαριθμήσιμο.

Οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούνται από τους ακέραιους, τους άλλους ρητούς αριθμούς και τους άρρητους αριθμούς, όπως είναι οι $\sqrt{5}$, π, $\frac{1}{3}\sqrt[3]{2}$ κτλ, που δεν είναι εκφράσιμοι ως πηλίκα ακεραίων αριθμών. Στην ανάλυση αποδεικνύεται ότι κάθε πραγματικός αριθμός μπορεί να γραφεί ως ένας ακέραιος (συμπεριλαμβάνεται το 0) που ακολουθείται από ένα απείρως μακρύ δεκαδικό κλάσμα στα δεξιά του δεκαδικού σημείου. Το κλάσμα 1/3, π.χ., μπορεί να γραφεί ως 0.33333..., όπου οι τελείες δηλώνουν ότι η ακολουθία των 3 είναι άπειρη. Κλάσματα όπως το 1/2 μπορούν ν' αναπαρασταθούν ως 0.5 ή 0.50 ή 0.500 κτλ. ή, αλλιώς, ως το άπειρα επαναλαμβανόμενο δεκαδικό 0.499999... Η απόδειξη της τελευταίας δήλωσης θα απαιτούσε γνώσεις γεωμετρικών σειρών, αλλά μπορεί να φανεί πιο εύλογη, αν σκεφθούμε τα εξής: $\frac{1}{9}$=0.11111..., $1=9(\frac{1}{9})=9(0.11111...)=0.99999...$ Το δεκαδικό κλάσμα ενός άρρητου αριθμού είναι επίσης απείρως μακρύ, αλλά, αντίθετα με ό,τι συμβαίνει για ένα ρητό αριθμό, δεν έχει επαναλαμβανόμενες ακολουθίες ψηφίων.

Η απόδειξη του Cantor ότι το [0,1] δεν είναι απαριθμήσιμο χρησιμοποιεί το γεγονός ότι κάθε αριθμός σ' αυτό το σύνολο αναπαρίσταται με μοναδικό τρόπο από μια ακολουθία που αποτελείται από το 0 και ένα δεκαδικό κλάσμα με άπειρο μήκος. Για να εξασφαλίσουμε ότι αυτή η αναπαραάσταση είναι μοναδική για κάθε στοιχείο του συνόλου, παίρνουμε επίσης κάθε ρητό αριθμό που μπορεί να γραφεί με μια άπειρη ακολουθία από 0, π.χ. 0.5000..., με τη μορφή που έχει μια άπειρη ακολουθία από 9, π.χ., 0.4999... Τώρα κάνουμε την υπόθεση που πρόκειται να δείξουμε ότι είναι ψευδής, δηλαδή, ότι το σύνολο [0,1] είναι απαριθμήσιμο. Αν αυτό ισχύει τότε τα στοιχεία του μπορούν να τεθούν σε μια γραμμική ακολουθία με ένα πρώτο μέλος κτλ., και αυτή η ακολουθία θα περιέχει κάθε στοιχείο του [0,1]. Αυτή η ακολουθία x_1, x_2, x_3, ..., δίνεται στο ακόλουθο σχήμα, όπου τα a είναι τα ψηφία σε κάθε δεκαδικό κλάσμα. Το a_{13}, π.χ., είναι το τρίτο ψηφίο στο δεκαδικό μέρος του πρώτου αριθμού της ακολουθίας.

$$\begin{gathered} x_1 = 0.a_{11}a_{12}a_{13}...a_{1n}... \\ x_2 = 0.a_{21}a_{22}a_{23}...a_{2n}... \\ x_3 = 0.a_{31}a_{32}a_{33}...a_{3n}... \\ ..... \\ x_n = 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}...a_{nn}... \\ ..... \end{gathered}$$

Υποτιθέμενη απαρίθμηση του [0,1].

Τώρα δείχνουμε ότι υπάρχει ένας αριθμός y στο σύνολο [0,1] που δεν υπάρχει στην ακολουθία $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, ... Αυτός ο αριθμός ορίζεται ως εξής: το ακέραιο μέρος του είναι 0, το πρώτο δεκαδικό του ψηφίο a_{y1} είναι διαφορετικό από το a_{11}, το δεύτερο δεκαδικό του ψηφίο a_{y2} είναι διαφορετικό από το a_{22} και, γενικά, το n-οστό του δεκαδικό ψηφίο είναι διαφορετικό από το a_{nn}. Συνεπώς το y δεν μπορεί να ισούται με το x_1, διότι διαφέρει από αυτό στο πρώτο δεκαδικό ψηφίο (– έχουμε συμφωνήσει ότι κάθε αριθμός έχει μια μοναδική αναπαράσταση στον κατάλογο). Όμοια, το y δεν μπορεί να ισούται με το x_2, διότι διαφέρει από αυτό στο δεύτερο δεκαδικό ψηφίο, και, γενικά, το y δεν μπορεί να ισούται με κανένα αριθμό x_n, διότι αυτός διαφέρει από το y τουλάχιστον στο n-οστό δεκαδικό ψηφίο. Όμως ο y είναι ένας αριθμός μεταξύ 0 και 1, αφού είναι της μορφής $y = 0.a_{y1}a_{y2}a_{y3}...a_{yn}...$ Συνεπώς η υπόθεσή μας ότι τα στοιχεία του [0,1] μπορούν να τεθούν σε μια γραμμική ακολουθία δεν ισχύει και το σύνολο είναι μη απαριθμήσιμο.

Η παραπάνω απόδειξη λέμε ότι χρησιμοποιεί ένα *διαγώνιο επιχείρημα*, αφού το y ορίζεται με τρόπο που το ανάπτυγμά του να διαφέρει κατά σειρά από τα ψηφία στη διαγώνιο του πίνακα. Σημειώνουμε ότι η απόδειξη αυτή είναι περίπτωση εφαρμογής της μεθόδου *απαγωγής σε άτοπο*, την οποία θα συζητήσουμε εκτενώς αργότερα.

Έτσι, η πληθικότητα του συνόλου [0,1] είναι μεγαλύτερη από $\aleph_0$, αλλά δεν καθορίζεται επακριβώς ποιά είναι. Ο Cantor μπόρεσε να δείξει ότι το [0,1] είναι ισοδύναμο με το δυναμοσύνολο των ακεραίων. Άλλα σύνολα με την ίδια πληθικότητα είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών, το σύνολο των σημείων μιας γραμμής (οποιουδήποτε μήκους), το σύνολο των σημείων ενός επιπέδου, το σύνολο των σημείων στον n-διάστατο χώρο (για κάθε πεπερασμένο n).

Τους πληθικούς αριθμούς άπειρων συνόλων μπορούμε να μεταχειριστούμε όπως τους φυσικούς αριθμούς, με την έννοια ότι ορίζονται για αυτούς πράξεις, όπως η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός, και μια σχέση, όπως η σχέση $\leq$ στους φυσικούς αριθμούς. Για τον ορισμό των πράξεων, δείτε την Άσκηση 8, ενώ η $\leq$ ορίζεται ως εξής:

Ορισμός. Έστω ότι A, B είναι τυχόντα σύνολα. Λέμε ότι *ο πληθικός αριθμός του A είναι μικρότερος από ή ίσος με τον πληθικό αριθμό του B*, και συμβολίζουμε με $|A| \leq |B|$, ανν υπάρχει $f : A \to B$ που είναι ένα-προς-ένα.
Επίσης, γράφουμε $|A| < |B|$ ανν ισχύει ότι $|A| \leq |B|$ αλλά δεν ισχύει $A \sim B$.

Παράδειγμα. Για κάθε σύνολο A: $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$.
Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f{:}A \to \mathcal{P}(A)$ που αντιστοιχεί σε κάθε στοιχείο x του A το μονοσύνολο $\{x\} \in \mathcal{P}(A)$. Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι η f είναι ένα-προς-ένα.

Η σχέση $\leq$ είναι ολική στη συλλογή των πληθαρίθμων, δηλαδή, για τυχόντες πληθαρίθμους κ, λ ισχύει $\kappa \leq \lambda$ ή $\lambda \leq \kappa$. Αυτό το φαινομενικά απλό γεγονός εξασφαλίζεται μόνο αν δεχθούμε το λεγόμενο *Αξίωμα Επιλογής*. Μια άλλη σημαντική ιδιότητα της σχέσης $\leq$ είναι η ακόλουθη.
Θεώρημα Schröder-Bernstein. Για οποιουσδήποτε πληθικούς αριθμούς κ, λ, αν $\kappa \leq \lambda$ και $\lambda \leq \kappa$, τότε $\kappa = \lambda$.

Μέχρι τώρα, έχουμε δει μόνο δύο πληθικούς αριθμούς άπειρων συνόλων, δηλαδή, τον $\aleph_0$ και τον πληθικό αριθμό του [0,1]. Μήπως δεν υπάρχουν άλλοι; Το ακόλουθο θεώρημα εξασφαλίζει την ύπαρξη πληθώρας άπειρων πληθαρίθμων.
Θεώρημα (Cantor). Για κάθε σύνολο A: $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.
Απόδειξη. Με βάση το προηγούμενο παράδειγμα, αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε σύνολο A, το A δεν είναι ισοδύναμο με το δυναμοσύνολό του.
Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι, για κάποιο σύνολο A, το A είναι ισοδύναμο με το $\mathcal{P}(A)$, δηλαδή, υπάρχει μια ένα-προς-ένα αντιστοιχία $f{:}A \to \mathcal{P}(A)$. Μερικά στοιχεία του A θα έχουν, ενδεχομένως, αντιστοιχηθεί σε υποσύνολα του A στα οποία ανήκουν και άλλα στοιχεία του A θα έχουν, ενδεχομένως, αντιστοιχηθεί σε υποσύνολα του A στα οποία δεν ανήκουν. Ας ορίσουμε το σύνολο B, παίρνοντας κάθε στοιχείο του A που αντιστοιχίζεται σε υποσύνολό του που δεν περιέχει αυτό το στοιχείο, δηλαδή,

$$B = \{x \in A | x \notin f(x)\}.$$

Προφανώς ισχύει $B \subseteq A$ και συνεπώς το B είναι ένα από τα στοιχεία του $\mathcal{P}(A)$. Από την υπόθεση, η f είναι επί, άρα υπάρχει ακριβώς ένα στοιχείο του A που απεικονίζεται στο B, ας το ονομάσουμε y. 'Αραγε ισχύει ότι $y \in B$;

1. Έστω ότι $y \in B$. Τότε το y είναι στοιχείο του συνόλου στο οποίο απεικονίζεται, δηλαδή, του B. Έτσι, αν $y \in B$, τότε $y \notin B$. Άτοπο.
2. Έστω ότι $y \notin B$. Τότε το y είναι ένα από εκείνα τα στοιχεία που δεν ανήκουν στο σύνολο στο οποίο απεικονίζονται, άρα πρέπει να ανήκει στο B. Έτσι, αν $y \notin B$, τότε $y \in B$. Πάλι καταλήξαμε σε άτοπο.

Συνεπώς δεν αληθεύει ότι τα A, $\mathcal{P}(A)$ είναι ισοδύναμα και άρα ο πληθικός αριθμός του A είναι μικρότερος από τον πληθικό αριθμό του $\mathcal{P}(A)$, δηλαδή, ισχύει το ζητούμενο.

Ως πόρισμα του σημαντικού αυτού θεωρήματος, έχουμε ότι το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ έχει πληθικό αριθμό μεγαλύτερο από τον $\aleph_0$, ο πληθικός αριθμός του $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ είναι μεγαλύτερος από τον πληθικό αριθμό του $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ κτλ. Δημιουργείται λοιπόν μια ιεραρχία από όλο και μεγαλύτερους άπειρους πληθικούς αριθμούς:

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < \ldots,$$

όπου χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $2^{\aleph_0}$, $2^{2^{\aleph_0}}$ κτλ., σε αναλογία με το συμβολισμό της δύναμης για πεπερασμένους πληθαρίθμους – αν ένα σύνολο έχει n στοιχεία, όπου n φυσικός, τότε το δυναμοσύνολό του έχει 2^n στοιχεία.

Ένα πρόβλημα που παρέμεινε άλυτο για πολλά χρόνια ήταν το κατά πόσον υπάρχουν άπειροι πληθικοί αριθμοί διαφορετικοί από τους $\aleph_0$, $2^{\aleph_0}$ κτλ. Η *Υπόθεση του Συνεχούς* (ΥΣ) έλεγε ότι δεν υπάρχει πληθικός αριθμός κ τέτοιος που $\aleph_0 < \kappa < 2^{\aleph_0}$ ή, με άλλα λόγια, ότι δεν υπάρχει άπειρο σύνολο με μέγεθος μεταξύ εκείνου του $\mathbb{N}$ και εκείνου του $\mathbb{R}$. Ο K. Gödel απέδειξε (το 1938) ότι η ΥΣ είναι συμβιβαστή με τις συνήθεις αρχές της θεωρίας συνόλων, ενώ ο P. J. Cohen απέδειξε (το 1963) ότι η άρνηση της ΥΣ είναι επίσης συμβιβαστή με τις αρχές αυτές. Κατά συνέπεια, η ΥΣ είναι *ανεξάρτητη* από τα συνήθη αξιώματα της θεωρίας συνόλων[1].

Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι η σχέση της ισοδυναμίας μεταξύ συνόλων είναι πράγματι γενικευμένη σχέση ισοδυναμίας.

2. Δείξτε ότι το σύνολο ακεραίων δυνάμεων του 10 είναι απαριθμήσιμο.

3. Δείξτε ότι το σύνολο των αρνητικών ακεραίων είναι άπειρο.

4. Υποθέτουμε ότι ισχύουν τα εξής για την αγγλική γλώσσα:
   (α) Υπάρχει ένα πεπερασμένο αλφάβητο για την κατασκευή προτάσεων, που αποτελείται από 26 γράμματα, ένα σύνολο σημείων στίξης και το κενό.
   (β) Κάθε πρόταση είναι μια πεπερασμένη ακολουθία στο αλφάβητο του (α).
   (γ) Δεν υπάρχει άνω φράγμα για το μήκος αγγλικών προτάσεων. Π.χ., έχοντας μια πρόταση, μπορούμε να φτιάξουμε μια μεγαλύτερη, ενώνοντάς την με μια άλλη.

   Ποιά είναι η πληθικότητα του συνόλου όλων των αγγλικών προτάσεων; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

5. Δείξτε ότι $[0,1]{\sim}(0,1)$ και ότι $[0,1]{\sim}[2,4]$.

6. Δείξτε ότι, για οποιαδήποτε σύνολα A, B: $A{\times}B{\sim}B{\times}A$.

7. Δείξτε ότι, για οποιαδήποτε σύνολα A, B, αν τα A, B είναι απαριθμήσιμα, τότε και το $A{\times}B$ είναι απαριθμήσιμο.

8. **Ορισμός.** Έστω ότι A και B είναι ξένα σύνολα και $a{=}|A|$ και $b{=}|B|$. Ορίζουμε πληθική πρόσθεση, συμβολικά $\oplus$, και πληθικό πολλαπλασιασμό, συμβολικά $\otimes$, ως εξής:

$$a{\oplus}b{=}|(A{\cup}B)|$$
$$a{\otimes}b{=}|(A{\times}B)|.$$

[1] Ο αναγνώστης μπορεί να βρει περισσότερες πληροφορίες για το θέμα στο άρθρο [1].

(α) Δείξτε ότι το άθροισμα και το γινόμενο των $|A|, |B|$ δεν εξαρτάται από τα συγκεκριμένα σύνολα A, B, δηλαδή, αν $A{\sim}C$, $B{\sim}D$, $A{\cap}B{=}\emptyset$, $C{\cap}D{=}\emptyset$, τότε $|A{\cup}B|{=}|C{\cup}D|$ και $|A{\times}B| = |C{\times}D|$.
(β) Δείξτε ότι ισχύει η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα για την $\oplus$ και τον $\otimes$.

9. Όταν προσθέτουμε ή πολλαπλασιάζουμε πληθικούς αριθμούς πεπερασμένων συνόλων, το αποτέλεσμα είναι το ίδιο με εκείνο που δίνει η αντίστοιχη πράξη στους φυσικούς αριθμούς. Όταν, όμως, ένα τουλάχιστον από τα θεωρούμενα σύνολα είναι άπειρο, τότε οι πράξεις δίνουν μη αναμενόμενα αποτελέσματα. Βρείτε παραδείγματα συνόλων A και B για τα οποία ισχύουν:

   (α) $\aleph_0 \oplus 1{=}\aleph_0$ (γ) $\aleph_0 \otimes 2{=}\aleph_0$
   (β) $\aleph_0{\oplus}\aleph_0{=}\aleph_0$ (δ) $\aleph_0{\otimes}\aleph_0{=}\aleph_0$.

10. Μπορεί ν' αποδειχθεί ότι το $\aleph_0$ είναι ο μικρότερος άπειρος πληθικός αριθμός. Ας θεωρήσουμε το ακόλουθο υποθετικό αντιπαράδειγμα σ' αυτό τον ισχυρισμό. Επιλέγουμε ένα πληθικό αριθμό κ τέτοιο που $2^{\kappa}{=}\aleph_0$. Ο κ δεν μπορεί να είναι πεπερασμένος, διότι το 2 υψωμένο σε οποιοδήποτε πεπερασμένο εκθέτη είναι πεπερασμένο. Επίσης ο κ δεν μπορεί ούτε να ισούται με $\aleph_0$, αφού $2^{\aleph_0}{>}\aleph_0$, με βάση το θεώρημα του Cantor. Συνεπώς ο κ είναι άπειρος πληθικός αριθμός μικρότερος από τον $\aleph_0$. Τι δεν είναι σωστό σ' αυτό το επιχείρημα;

Κεφάλαιο 4

Λογική δηλώσεων

4.1 Η συμβολική γλώσσα

Η συμβολική γλώσσα της λογικής δηλώσεων είναι πολύ απλή και έχει μόνο τρεις κατηγορίες συμβόλων:

(α) τις δηλωτικές μεταβλητές $p, q, r, \ldots$, με τόνους, όταν χρειάζονται.

(β) το μονομελή τελεστή $\sim$ και τους διμελείς συνδέσμους $\&, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

(γ) τις παρενθέσεις (,).

Οι δηλωτικές μεταβλητές αντιπροσωπεύουν απλές (ή ατομικές) δηλώσεις της ελληνικής γλώσσας, δηλαδή, προτάσεις που μπορούν να χαρακτηριστούν ως αληθείς ή ψευδείς και δεν περιέχουν εμφανίσεις συνδετικών λέξεων/εκφράσεων, όπως "και", "ή" κτλ. Ο τελεστής $\sim$ αντιπροσωπεύει τη λέξη "δεν", όπως στην πρόταση "Ο Γιάννης δεν θα φύγει" ή την έκφραση "δεν ισχύει ότι", όπως στην πρόταση "Δεν ισχύει ότι ο Γιάννης θα φύγει". Οι σύνδεσμοι $\&, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ θεωρούνται ως αντίγραφα των ελληνικών λέξεων/εκφράσεων "και", "ή", "αν ..., τότε ...", "αν και μόνον αν". Τέλος, οι παρενθέσεις παίζουν το ρόλο σημείων στίξεως, όπως το κόμμα στην ελληνική γλώσσα.

Είναι σημαντικό ότι η λογική δηλώσεων είναι σχεδιασμένη για να αντανακλά ορισμένες κατασκευές στις φυσικές γλώσσες, όπως είναι η ελληνική. Σημειώνουμε ότι η λογική δηλώσεων μπορεί να θεωρεί ως απλή (δηλωτική) πρόταση μια πολύπλοκη συντακτικά πρόταση μιας φυσικής γλώσσας. Π.χ., η πρόταση "Το ακατάπαυστο κάπνισμα του Γιάννη έχει θυμώσει αφάνταστα τη Μαρία" δεν περιέχει κανένα από τους καθορισμένους προτασιακούς συνδέσμους κι έτσι θα αναπαρασταθεί ως μια ατομική δήλωση στη λογική δηλώσεων.

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσουμε κάτι σχετικό με την ορολογία. Θα λέμε ότι μια πρόταση όπως η "Ο Γιάννης καπνίζει" εκφράζει μια *δήλωση* ή αποτελεί μια *δηλωτική πρόταση*. Χρησιμοποιούμε τη λέξη "δήλωση" για να αποφύγουμε τη χρήση του πιο συνηθισμένου όρου "πρόταση", ο οποίος χρησιμοποιείται, μερικές φορές, στα ελληνικά για να αποδοθεί οποιοσδήποτε από τους αγγλικούς όρους "statement", "sentence", "proposition", των οποίων τα νοήματα είναι διαφορετικά[1].

Όπως στα ελληνικά, όπου με χρήση απλών δηλώσεων και συνδετικών λέξεων/εκφράσεων, κατασκευάζονται σύνθετες προτάσεις, έτσι και εδώ, μπορούμε να κατασκευάσουμε σύνθετες εκφράσεις από τα σύμβολα που αναφέρθηκαν παραπάνω, τις οποίες καλούμε "δηλωτικούς τύπους".

Ορισμός.

1. Κάθε δηλωτική μεταβλητή είναι δηλωτικός τύπος.
2. Κάθε δηλωτικός τύπος με το σύμβολο "$\sim$" (άρνηση) μπροστά του είναι επίσης δηλωτικός τύπος.
3. Κάθε δύο (όχι απαραίτητα διαφορετικοί) δηλωτικοί τύποι μπορούν να φτιάξουν έναν άλλο δηλωτικό τύπο, αν γράψουμε το σύμβολο "&" (σύζευξη) ή το "$\vee$" (διάζευξη) ή το "$\rightarrow$" (συνεπαγωγή) ή το "$\leftrightarrow$" (διπλή συνεπαγωγή ή ισοδυναμία) μεταξύ τους και περικλείσουμε το αποτέλεσμα σε παρενθέσεις.
4. Δηλωτικοί τύποι είναι μόνο οι εκφράσεις της συμβολικής γλώσσας της λογικής δηλώσεων που μπορούν να παραχθούν από πεπερασμένο πλήθος εφαρμογών των 1.–3. παραπάνω.

Στη συνέχεια, δίνουμε μερικά παραδείγματα προτασιακών τύπων, που κατασκευάζονται με βάση τον προηγούμενο ορισμό.

(4-1) p
q'
$(p \vee q)$
$\sim (p' \leftrightarrow p')$
$\sim r$
$\sim\sim r$
$(((p\&q) \vee \sim q') \rightarrow r) \leftrightarrow s)$.

Οι ακόλουθες εκφράσεις δεν είναι δηλωτικοί τύποι:

(4-2) pq
$\vee p$
$\sim \vee pq$
$p \vee q$ (λείπουν οι εξωτερικές παρενθέσεις)
$\sim (p)$ (δε χρειάζονται παρενθέσεις για ατομικούς προτασιακούς τύπους).

Σημείωση. Συνήθως παραλείπουμε τα εξωτερικά ζεύγη παρενθέσεων, για να αυξήσουμε την αναγνωσιμότητα. Π.χ., θα γράφουμε $p \vee (q\&r)$ αντί για $(p \vee (q\&r))$ (η πρώτη έκφραση μπορεί να θεωρηθεί ως άτυπη συντομογραφία της δεύτερης).

[1]Όμως, ακόμη και στα αγγλικά, μερικές φορές γίνεται σύγχυση των νοημάτων των τριών αυτών όρων και αυτός είναι ο λόγος που η λογική δηλώσεων αναφέρεται άλλοτε ως "statement logic", άλλοτε ως "sentential logic" και άλλοτε ως "propositional logic". Σχετικά με το νόημα των όρων αυτών, ο αναγνώστης μπορεί να διαβάσει το άρθρο [6].

4.2 Σημασιολογία: Τιμές και πίνακες αλήθειας

Η σημασιολογία της δηλωτικής λογικής είναι σχεδόν τόσο απλή όσο το συντακτικό της. Κάθε ατομική δήλωση υποτίθεται ότι αντιστοιχίζεται σε μια από τις *τιμές αλήθειας* 1 (που καλείται επίσης *αληθής*) ή 0 (*ψευδής*). Συστήματα με περισσότερες από δύο τιμές αλήθειας έχουν επίσης μελετηθεί, αλλά δεν θα μας απασχολήσουν εδώ. Κάθε σύνθετος δηλωτικός τύπος δέχεται επίσης μια τιμή αλήθειας που προσδιορίζεται από

(1) τις τιμές αλήθειας των συντακτικών του συνιστωσών δηλώσεων και
(2) τη συντακτική δομή του, δηλαδή, τους συνδέσμους του και τη διευθέτησή τους μέσα στον τύπο αυτό.

Π.χ., η τιμή αλήθειας του τύπου $(p\&q)$ θα προσδιοριστεί από τις τιμές αλήθειας των p και q και από τις αποκαλούμενες *αληθοσυναρτησιακές* ιδιότητες του συνδέσμου &. Οι τελευταίες δίδονται από ένα *πίνακα αλήθειας* που δίνει την τιμή αλήθειας ενός τύπου ως συνάρτηση των τιμών αλήθειας των άμεσων συστατικών του μερών όταν ο κύριος σύνδεσμος είναι ο &. Στη συνέχεια, δίνουμε τους πίνακες αλήθειας για τους πέντε συνδέσμους, μαζί με μερικές παρατηρήσεις για το πώς αυτοί συγκρίνονται με τα ελληνικά αντίγραφά τους. Με P, Q κτλ. θα συμβολίζουμε τυχόντες δηλωτικούς τύπους, ατομικούς ή σύνθετους.

Άρνηση. Η άρνηση κάνει αντίθετη την τιμή αλήθειας της δήλωσης στην οποία εφαρμόζεται. Για κάθε τύπο P, αν ο P είναι αληθής, τότε ο $\sim P$ είναι ψευδής, και, αντίστροφα, αν ο P είναι ψευδής, τότε ο $\sim P$ είναι αληθής. Αυτό συμπυκνώνεται στον πίνακα αλήθειας παρακάτω.

P	$\sim P$
1	0
0	1

Πίνακας 4-1: Πίνακας αλήθειας για την άρνηση.

Η λογική άρνηση είναι φυσικά σχεδιασμένη να αντανακλά την προτασιακή άρνηση στη φυσική γλώσσα. Στα ελληνικά, αυτό συχνά εκφράζεται με την εισαγωγή της λέξης "δεν" μέσα στη φράση. Το σημασιολογικό αποτέλεσμα είναι γενικά η παραγωγή μιας πρότασης με αντίθετη τιμή αλήθειας από την αρχική.

Σύζευξη. Αν συνδέσουμε δύο δηλωτικές προτάσεις (στα ελληνικά) με τη λέξη "και", το αποτέλεσμα είναι, γενικά, αληθές, αν και τα δύο μέρη είναι αληθή, και ψευδές, αν μόνο ένα είναι ψευδές ή και τα δύο είναι ψευδή. Ο πίνακας αλήθειας για το λογικό σύνδεσμο & κατασκευάζεται ανάλογα:

P	Q	$(P\&Q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Πίνακας 4-2: Πίνακας αλήθειας για τη σύζευξη.

Σημειώνουμε ότι οι P και Q είναι μεταβλητές που συμβολίζουν οποιονδήποτε (δηλωτικό) τύπο και ότι υπάρχουν τέσσερις σειρές στον πίνακα που αντιστοιχούν στους τέσσερις τρόπους ν' αντιστοιχίσουμε δύο τιμές αλήθειας ανεξάρτητα σε δύο δηλώσεις.

Όπως αναμένουμε, υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες το & δεν αντιστοιχεί ακριβώς στην ελληνική προτασιακή σύζευξη. Η τελευταία φέρει μερικές φορές μια χρονική έννοια που λείπει από το λογικό σύνδεσμο όπως, π.χ., στις προτάσεις "Ο Γιάννης έκανε μπάνιο και ντύθηκε", "Ο Γιάννης ντύθηκε και έκανε μπάνιο". Στη δηλωτική λογική, ο τύπος $(p\&q)$ έχει πάντα την ίδια τιμή αλήθειας με τον τύπο $(q\&p)$. Επιπλέον, ενώ ο $(p\&p)$ είναι απόλυτα σωστά σχηματισμένος (και έχει την ίδια τιμή αλήθειας με τον p), μια πρόταση όπως η "Ο Γιάννης καπνίζει και ο Γιάννης καπνίζει" είναι παράξενη και θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί μόνο σε ειδικές συνθήκες (ίσως ως γραφικός τρόπος να πούμε ότι ο Γιάννης καπνίζει ακατάπαυστα).

Όταν μεταφράζουμε από τα ελληνικά στη δηλωτική λογική τον προτασιακό σύνδεσμο "αλλά" συχνά τον αποδίδουμε ως &. Έτσι, η δήλωση "Ο Γιάννης καπνίζει αλλά η Τζένη ροχαλίζει" ίσως μεταφραστεί ως $(p\&q)$, όπου το σύμβολο & δεν φέρει καμιά έννοια αντίθεσης ή αίσθησης απροσδόκητου, όπως ο ελληνικός σύνδεσμος. Παρόμοιες παρατηρήσεις θα μπορούσαν να γίνουν για τις φράσεις "εν τούτοις", "αν και", "παρά το γεγονός ότι" και παρόμοιες.

Η ελληνική λέξη "και" χρησιμοποιείται και για συνένωση ονομάτων, ρημάτων κτλ. Π.χ.,"Ο Γιάννης και η Μαρία καπνίζουν και πίνουν", αλλά τίποτε στη λογική γλώσσα μας δεν αντιστοιχεί σ' αυτή τη χρήση (υπενθυμίζουμε ότι αγνοούμε την εσωτερική δομή των απλών προτάσεων). Μερικές φορές, προτάσεις που περιέχουν σύζευξη μπορούν να θεωρηθούν ως ελλειπτικές μορφές προτασιακών συζεύξεων. Π.χ., η πρόταση "Ο Γιάννης και η Μαρία καπνίζουν" μπορεί να θεωρηθεί ως συντομευμένη μορφή της πρότασης "Ο Γιάννης καπνίζει και η Μαρία καπνίζει" και έτσι να μεταφραστεί σε κάτι όπως ο τύπος $(p\&q)$. Δεν μπορούν, όμως, όλες οι περιπτώσεις φραστικών συζεύξεων να ιδωθούν με τον ίδιο τρόπο, όπως φαίνεται από παραδείγματα, π.χ., από την πρόταση "Η Μαρία ανακάτεψε κόκκινο και μπλε χρώμα".

Διάζευξη. Ο λογικός σύνδεσμος $\vee$ έχει τον ακόλουθο πίνακα αλήθειας:

P	Q	$(P \vee Q)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Πίνακας 4-3: Πίνακας αλήθειας για τη διάζευξη.

Έτσι, η διάζευξη δύο δηλώσεων είναι αληθής, αν τουλάχιστον ένα από τα μέρη είναι αληθές, και είναι ψευδής, αν και τα δύο μέρη ψευδή. Χονδρικά το ελληνικό αντίστοιχο είναι ο προτασιακός σύνδεσμος "ή", όπως στην πρόταση "Ο Γιάννης καπνίζει ή η Τζένη ροχαλίζει". Ο λογικός σύνδεσμος είναι η καλούμενη *εγκλειστική διάζευξη*, που είναι αληθής όταν και τα δύο μέρη είναι αληθή. Θεωρείται γενικά ότι το ελληνικό "ή" έχει επίσης μια αποκλειστική έννοια, που αποκλείει τη δυνατότητα να είναι και τα δύο μέρη αληθή ("Μπορείτε να φάτε σούπα ή μπορείτε να φάτε σαλάτα, αλλά όχι και τα δύο").

Είναι όμως αμφιλεγόμενο, αν η ελληνική λέξη είναι πράγματι ασαφής ή αν η έννοια εγκλεισμού ή αποκλεισμού τέτοιων διαζευκτικών προτάσεων καθορίζεται με βάση το πλαίσιο συζήτησης και άλλους ρεαλιστικούς παράγοντες. Οι λατινικές λέξεις "vel" και "aut" έχουν συχνά αναφερθεί ως παραδείγματα διαζεύξεων σε φυσική γλώσσα που φέρουν, αντίστοιχα, την εγκλειστική κι αποκλειστική έννοια, αλλά ακόμα και εδώ τα πράγματα δεν είναι εντελώς σαφή. Σε κάθε περίπτωση, ο λογικός σύνδεσμος $\vee$ είναι ξεκάθαρα εγκλειστικός, όπως φαίνεται από την πρώτη σειρά του πίνακα αλήθειας. Δεν υπάρχει συνηθισμένο σύμβολο για την αποκλειστική λογική διάζευξη, αλλά, αν υπήρχε, ο πίνακας αλήθειάς του θα ήταν όπως ο πίνακας 4-3, με τη διαφορά ότι θα είχε 0 στην πρώτη σειρά.

Παρατηρήσεις παρόμοιες με αυτές που έγιναν στην περίπτωση της σύζευξης μπορούν να γίνουν για τη διάζευξη. Π.χ., η πρόταση "Ο Γιάννης ή η Μαρία καπνίζει" μπορεί να θεωρηθεί ως ελλειπτική μορφή για την πρόταση "Ο Γιάννης καπνίζει ή η Μαρία καπνίζει" και συνεπώς μπορεί να αναπαρασταθεί ως $(p \vee q)$. Μια προβληματική περίπτωση είναι η πρόταση "Ένας γιατρός ή οδοντογιατρός μπορεί να γράφει συνταγές", όπου η πρόθεση ερμηνείας είναι ότι και οι γιατροί και οι οδοντογιατροί μπορούν να γράφουν συνταγές (θα ήταν ψευδής, αν οι γιατροί μπορούσαν, ενώ οι οδοντογιατροί δεν μπορούσαν, ας πούμε). Έτσι, η καλύτερη μετάφραση γι' αυτήν την πρόταση θα ήταν της μορφής $(p \& q)$, όχι $(p \vee q)$.

Συνεπαγωγή. Ο σύνδεσμος "αν ..., τότε ..." χρησιμοποιείται στα ελληνικά με ένα πλήθος διαφορετικών τρόπων και έχει γίνει αντικείμενο πολλών συζητήσεων. Ο αντίστοιχος στη λογική γλώσσα μας, ο $\rightarrow$, μοιράζεται ένα κρίσιμο χαρακτηριστικό με όλες τις χρήσεις σε φυσική γλώσσα, δηλαδή, ότι όταν η "αν"-δήλωση (η ηγούμενη) είναι αληθής και η "τότε"-δήλωση (η επόμενη) είναι ψευδής, ολόκληρη η συνεπαγωγική δήλωση είναι ψευδής. Π.χ., η πρόταση "Αν η Μαρία είναι στο πάρτυ, τότε ο Γιάννης είναι (επίσης) στο πάρτυ" είναι ψευδής, αν η Μαρία είναι στο πάρτυ, αλλά ο Γιάννης δεν είναι. Αυτό αντανακλάται στη δεύτερη σειρά του πίνακα αλήθειας για τον $\rightarrow$:

P	Q	$(P \rightarrow Q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Πίνακας 4-4: Πίνακας αλήθειας για τη συνεπαγωγή.

Η $(P \rightarrow Q)$ είναι αληθής σε όλες τις άλλες περιπτώσεις και αυτή η πλευρά της σημασιολογίας της συνεπαγωγής είναι η πιο αμφιλεγόμενη. Αν ρωτηθούμε για την τιμή αλήθειας της πρότασης "Αν η Μαρία είναι στο πάρτυ, τότε ο Γιάννης είναι (επίσης) στο πάρτυ" στην περίπτωση που η Μαρία δεν είναι στο πάρτυ, ίσως προβληματιστούμε. Ίσως πούμε ότι η συνεπαγωγική δήλωση δεν έχει σαφώς καθορισμένη τιμή αλήθειας ή ότι δεν προκύπτει ερώτημα για την τιμή αλήθειας της. Ακόμα και στην περίπτωση που και η Μαρία και ο Γιάννης δεν είναι στο πάρτυ, ίσως διστάσουμε να πούμε ότι η συνεπαγωγή είναι αληθής, αφού θα αναμέναμε να προσδιοριστεί κάποια λογική ή αιτιώδης σύνδεση μεταξύ της ηγουμένης και της επομένης, πριν μπορέσουμε να προσδιορίσουμε την πραγματική τιμή αλήθειας. Εδώ φαίνεται ότι έχουμε μια περίπτωση, όπου οι ελληνικοί και οι λογικοί σύνδεσμοι διαφέρουν πολύ. Πώς μπορούμε να δικαιολογήσουμε την επιλογή μας της τιμής 1 (αληθής) σ' αυτές τις περιπτώσεις;

Η απάντηση μπορεί να δικαιολογηθεί με δύο τρόπους:

- Σε μια δίτιμη λογική, αν μια δήλωση δεν είναι ψευδής, τότε πρέπει να είναι αληθής - δεν υπάρχει καμιά άλλη επιλογή.
- Αυτός ο ορισμός της συνεπαγωγής αρκεί για την ανάλυση έγκυρων και άκυρων επιχειρημάτων στα μαθηματικά και έτσι φέρει το βάρος της παράδοσης.

Δεν ισχύει όμως αυτό χωρίς μερικές ενοχλητικές και, μερικές φορές, παράδοξες περιπτώσεις.

Διπλή συνεπαγωγή. Ο πίνακας αλήθειας για τη διπλή συνεπαγωγή είναι ο ακόλουθος:

P	Q	$(P \leftrightarrow Q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Πίνακας 4-5: Πίνακας αλήθειας για τη διπλή συνεπαγωγή.

Ελληνικές εκφράσεις που μεταφράζονται ως διπλή συνεπαγωγή είναι οι "αν και μόνον αν", "μόνο στην περίπτωση που" και "ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ισχύει". Μερικές φορές είναι δύσκολο να κρίνουμε, αν μερικές δηλώσεις στη συνήθη γλώσσα θα έπρεπε να παρασταθούν από τη συνεπαγωγή ή τη διπλή συνεπαγωγή. Π.χ., η δήλωση "Θα φύγω αύριο, αν μου επισκευάσουν το αυτοκίνητο" ίσως σημαίνει ότι η επισκευή του αυτοκινήτου είναι ικανή συνθήκη για να φύγω αύριο (αν και ίσως αναχωρήσω οπωσδήποτε αύριο), αλλά ίσως προορίζεται να σημαίνει ότι η επισκευή του αυτοκινήτου είναι όχι μόνο ικανή, αλλά επίσης αναγκαία συνθήκη για να φύγω αύριο (δηλαδή, δεν θα φύγω αύριο, εκτός αν το αυτοκίνητο επισκευαστεί). Η δεύτερη ερμηνεία επιβάλλεται, όταν ο σύνδεσμος είναι "αν και μόνον αν": "Θα φύγω αύριο αν και μόνον αν μου επισκευάσουν το αυτοκίνητο". Στα μαθηματικά, αυτός ο σύνδεσμος συχνά γράφεται σύντομα ως "ανν". Τυπικοί ορισμοί μαθηματικών όρων πάντα τον χρησιμοποιούν. Η συνηθισμένη μορφή είναι

(4-3) Το X καλείται Y (ή είναι Y) ανν το X έχει την ιδιότητα P.

Η χρήση του "αν" αντί για "ανν" θα άφηνε ανοικτό το ενδεχόμενο ότι το X ίσως επίσης καλείται Y και σε άλλες περιπτώσεις. Το “αν και μόνον αν” δίνει ένα σωστό ορισμό, περιορίζοντας τα X που καλούνται Y μόνο σε αυτές τις περιπτώσεις που το X έχει την ιδιότητα P.

Οι πίνακες αλήθειας παρέχουν μια γενική και συστηματική μέθοδο να υπολογίζουμε την τιμή αλήθειας οποιασδήποτε δήλωσης, όσο πολύπλοκη κι αν είναι. Ο αριθμός των γραμμών στον πίνακα αλήθειας καθορίζεται από την απαίτηση να ληφθούν υπόψη όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί τιμών αλήθειας ατομικών δηλώσεων. Γενικά, υπάρχουν 2^n γραμμές όταν εμπλέκονται n ατομικές δηλώσεις. Η σειρά υπολογισμού της τιμής των συνιστωσών δηλώσεων είναι από την πιο βαθιά τοποθετημένη προς την πιο εξωτερικά τοποθετημένη. Έτσι, για να κατασκευάσουμε ένα πίνακα αλήθειας για τη δήλωση $((p\&q)\rightarrow\sim(p\vee r))$, προχωρούμε ως εξής:

(α) κατασκευάζουμε στήλες για τις ατομικές δηλώσεις p, q και r,

(β) κατασκευάζουμε στήλες για τις δηλώσεις $(p\&q)$ και $(p\vee r)$,

(γ) κατασκευάζουμε στήλη για τη δήλωση $\sim(p\vee r)$, παίρνοντας τις αντίθετες των τιμών για τη δήλωση $(p\vee r)$,

(δ) κατασκευάζουμε τη στήλη αλήθειας για την πλήρη δήλωση, εφαρμόζοντας τον πίνακα συνεπαγωγής στη στήλη της $(p\&q)$ και στη στήλη της $\sim(p\vee r)$.

Η πλήρης διαδικασία φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα.

p	q	r	$(p\&q)$	$(p\vee r)$	$\sim(p\vee r)$	$((p\&q)\rightarrow\sim(p\vee r))$
1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	0	0	1	1

Πίνακας 4-6: Πίνακας αλήθειας για τη δήλωση $((p\&q)\rightarrow\sim(p\vee r))$.

Προφανώς οι πίνακες αλήθειας μπορεί να γίνουν πολύπλοκοι, όταν εμπλέκονται περισσότερες από τρεις ατομικές δηλώσεις, και εύκολα γίνονται σφάλματα γραφής. Αλλά κατ’ αρχήν μπορούμε να κατασκευάσουμε τον πλήρη πίνακα, για κάθε σύνθετη δήλωση.

4.3 Ταυτολογίες, αντιφάσεις και ενδεχόμενα

Οι δηλώσεις μπορούν να ταξινομηθούν, ως προς τους πίνακες αλήθειας, σε τρεις κατηγορίες:

(α) *ταυτολογίες*, που είναι δηλώσεις που έχουν πάντα τιμή αλήθειας 1, οποιαδήποτε κι αν είναι η αρχική αντιστοίχιση τιμών αλήθειας στις ατομικές δηλώσεις τους β) *αντιφάσεις*, που είναι δηλώσεις που έχουν πάντα τιμή αλήθειας 0, οποιαδήποτε κι αν είναι η αρχική αντιστοίχιση τιμών αλήθειας στις ατομικές δηλώσεις τους

γ) *ενδεχόμενα*, που είναι δηλώσεις που παίρνουν τουλάχιστον μία φορά τιμή 1 και τουλάχιστον μία φορά τιμή 0.

Μερικά παραδείγματα από το κάθε είδος δηλώσεων είναι τα ακόλουθα:
ταυτολογίες: $(p\vee{\sim}p)$, $(p\rightarrow p)$, $(p\rightarrow(q\rightarrow p))$, ${\sim}(p\&{\sim}p)$
αντιφάσεις: ${\sim}(p\vee{\sim}p)$, $(p\&{\sim}p)$, ${\sim}((p\vee q)\leftrightarrow(q\vee p))$
ενδεχόμενα: p, $(p\vee p)$, $((p\vee q)\rightarrow q)$, $((p\rightarrow q)\rightarrow p)$.

Ας δούμε, π.χ., τους πίνακες αλήθειας για τις δηλώσεις $(p\vee{\sim}p)$, $(p\&{\sim}p)$:

p	${\sim}p$	$(p\vee{\sim}p)$
1	0	1
0	1	1

Πίνακας 4-7: Πίνακας αλήθειας για την ταυτολογία $(p\vee{\sim}p)$.

p	$\sim p$	$(p\& \sim p)$
1	0	0
0	1	0

Πίνακας 4-8: πίνακας αλήθειας για την αντίφαση $(p\&{\sim}p)$.

Μια σημαντική ιδιότητα των ταυτολογιών και των αντιφάσεων είναι ότι μπορούμε ν' αντικαταστήσουμε τις ατομικές δηλώσεις που εμφανίζονται σ' αυτές με οποιεσδήποτε δηλώσεις, χωρίς να επηρεάσουμε την τιμή αλήθειας της αρχικής έκφρασης. Π.χ., αν στην ταυτολογία $(p\vee{\sim}p)$ αντικαταστήσουμε την p με τη δήλωση $(q\rightarrow r)$, η έκφραση που προκύπτει, δηλαδή, η $((q\rightarrow r)\vee{\sim}(q\rightarrow r))$ είναι πάλι ταυτολογία, όπως φαίνεται στον Πίνακα 4-9. Γενικά, η αντικατάσταση της p στην $(p\vee{\sim}p)$ από την τυχούσα δήλωση Q παράγει μια δήλωση της μορφής $(Q\vee \sim Q)$. Οποιαδήποτε κι αν είναι η τιμή αλήθειας της Q σε οποιαδήποτε συγκεκριμένη γραμμή, η τιμή αλήθειας της ${\sim}Q$ είναι η αντίθετη, οπότε η μία πρέπει να είναι αληθής και η άλλη ψευδής. Η διάζευξη των Q και ${\sim}Q$ είναι συνεπώς αληθής σε κάθε γραμμή του πίνακα αλήθειας. Επειδή η Q μπορεί να είναι απολύτως οποιαδήποτε δήλωση, βλέπουμε ότι αυτή η ταυτολογία (στην πραγματικότητα, κάθε ταυτολογία) είναι αληθής λόγω της μορφής της, δηλαδή, της διευθέτησης των (ατομικών) δηλώσεων και των συνδέσμων και όχι λόγω των συγκεκριμένων δηλώσεων από τις οποίες είναι κατασκευασμένη. Οι ίδιες σκέψεις εφαρμόζονται, λέξη προς λέξη, στις αντιφάσεις.

q	r	$(q\rightarrow r)$	${\sim}(q\rightarrow r)$	$((q\rightarrow r)\vee{\sim}(q\rightarrow r))$
1	1	1	0	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

Πίνακας 4-9: Πίνακας που δείχνει ότι η $((q\rightarrow r)\vee{\sim}(q\rightarrow r))$ είναι ταυτολογία.

Συχνά είναι πολύ σημαντικό να ξέρουμε αν μια συγκεκριμένη δήλωση είναι ή όχι ταυτολογία, αλλά, αφού οι μεγάλοι πίνακες αλήθειας είναι άβολοι, υπάρχει μια απλή δοκιμασία "γρήγορης διάψευσης (ή ψευδοποίησης)", που ψάχνει συστηματικά για μια γραμμή στην οποία η τελική τιμή είναι 0. Αν το ψάξιμο ολοκληρωθεί, χωρίς να βρεθεί καμιά τέτοια γραμμή, τότε ξέρουμε στα σίγουρα ότι η δήλωση υπό εξέταση είναι ταυτολογία. Η μέθοδος αυτή είναι μια εφαρμογή της γενικής μεθόδου της *απαγωγής σε άτοπο*. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια γραμμή με τελική τιμή 0 και συλλογιζόμαστε "προς τα πίσω", ξεκινώντας από αυτή την υπόθεση για να βρούμε μια αντιστοίχιση τιμών αλήθειας στις ατομικές δηλώσεις, χωρίς να συναντήσουμε αλληλοσυγκρουόμενες αντιστοιχίσεις.

Παράδειγμα. Ας ελέγξουμε ότι η δήλωση $(p{\to}(q{\to}p))$ είναι ταυτολογία. Αρχίζουμε υποθέτοντας ότι υπάρχει γραμμή με τελική τιμή 0. Γράφουμε το 0 κάτω από τον κύριο σύνδεσμο, δηλαδή, τον τελευταίο που προστέθηκε κατά την κατασκευή του τύπου.

$$\begin{array}{ccc} (p & \to & (q \to p)) \\ & 0 & \end{array}$$

Ξεκινώντας από αυτή την υπόθεση, συμπεραίνουμε ότι η ηγούμενη αυτής της συνεπαγωγής είναι αληθής και η επόμενη ψευδής, αφού αυτή είναι η μόνη 0 - περίπτωση για συνεπαγωγές.

$$\begin{array}{ccccc} (p & \to & (q & \to & p)) \\ 1 & 0 & & 0 & \end{array}$$

Κατόπιν συμπληρώνουμε την 1 - αντιστοίχιση για την p παντού (αφού η αντιστοίχιση τιμών αλήθειας πρέπει να είναι ομοιόμορφη).

$$\begin{array}{ccccc} (p & \to & (q & \to & p)) \\ 1 & 0 & & 0 & 1 \end{array}$$

Εξετάζοντας τώρα τον πίνακα, βλέπουμε ότι υπάρχουν αλληλοσυγκρουόμενες αντιστοιχίσεις: από τη μια πλευρά, η $(q{\to}p)$ θάπρεπε να είναι ψευδής, αλλά, από την άλλη, αυτό δεν μπορεί να ισχύει, αφού η p είναι αληθής, και η $(q{\to}p)$ μπορεί να είναι ψευδής, με βάση τον πίνακα για τις συνεπαγωγές. Συνεπώς μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η αρχική υπόθεση ότι υπάρχει μια γραμμή, στον πίνακα αλήθειας αυτής της δήλωσης, που τελειώνει με ψεύδος είναι η ίδια ψευδής. Άρα όλες οι γραμμές έχουν τιμή 1, δηλαδή, η δήλωση $(p{\to}(q{\to}p))$ είναι ταυτολογία.

Ας κάνουμε από την αρχή μέχρι το τέλος άλλο ένα παράδειγμα, με την πολύ όμοια, αλλά ενδεχόμενη, δήλωση $((p{\to}q){\to}p)$.

Βήμα 1. $\begin{array}{ccc} ((p \to q) & \to & p) \\ & 0 & \end{array}$

Βήμα 2. $\begin{array}{ccc} ((p \to q) & \to & p) \\ & 0 & 0 \end{array}$

Βήμα 3. $\begin{array}{ccccc} ((p & \to & q) & \to & p) \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \end{array}$

Βήμα 4. $\begin{array}{ccccc} ((p & \to & q) & \to & p) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$ ή

Βήμα 4′. $((p \rightarrow q) \rightarrow p)$
$\quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0$

Έτσι, η τιμή αλήθειας της q μπορεί να είναι ή 1 ή 0 και η διαδικασία ολοκληρώνεται χωρίς να πέσουμε σε αλληλοσυγκρουόμενες αντιστοιχίσεις. Έτσι, η δήλωση $((p{\rightarrow}q){\rightarrow}p)$ πρέπει να είναι τουλάχιστον ενδεχόμενο, αν και μπορεί να είναι ακόμη και αντίφαση. Δεν μπορούμε να κάνουμε μια παρόμοια σύντομη δοκιμή, για να δούμε αν αυτή είναι αντίφαση, αφού θα καταλήξουμε να γράψουμε τον πλήρη πίνακα, για να ελέγξουμε όλες τις άλλες περιπτώσεις. Σημειώνουμε ότι αυτή η μέθοδος ίσως να μην εξοικονομεί πάντα χρόνο, αν εμφανίζονται πολλές δυνατές αντιστοιχίσεις, που πρέπει να ελέγξουμε, για να βρούμε μια γραμμή που τελειώνει με 0.

4.4 Λογική συνεπαγωγή, λογική ισοδυναμία και νόμοι

Αν μια δήλωση διπλής συνεπαγωγής είναι ταυτολογία, οι δύο συνιστώσες δηλώσεις είναι *λογικά ισοδύναμες*. Π.χ., ο πίνακας αλήθειας στον πίνακα 4-10 δείχνει ότι οι δηλώσεις $\sim(p{\vee}q)$ και $(\sim p\&\sim q)$ είναι λογικά ισοδύναμες, αφού η $(\sim(p{\vee}q){\leftrightarrow}(\sim p\&\sim q))$ είναι ταυτολογία:

p	q	$(p{\vee}q)$	$\sim(p{\vee}q)$	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p\&\sim q)$	$(\sim(p{\vee}q){\leftrightarrow}(\sim p\&\sim q))$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Πίνακας 4-10: Πίνακας αλήθειας που δείχνει τη λογική ισοδυναμία των δηλώσεων $\sim(p{\vee}q)$ και $(\sim p\&\sim q)$.

Οι λογικά ισοδύναμες δηλώσεις μπορούν επίσης να χαρακτηριστούν λέγοντας ότι έχουν την ίδια τιμή αλήθειας για κάθε αντιστοίχιση τιμών αλήθειας στις ατομικές δηλώσεις (παρατηρούμε την τέταρτη και την έβδομη στήλη στον Πίνακα 4-10). Είναι φυσικά ακριβώς αυτό το γεγονός που εξασφαλίζει ότι η διπλή συνεπαγωγή που συνδέει τους δύο τύπους θα είναι πάντα αληθής.

Οι λογικά ισοδύναμες δηλώσεις είναι σημαντικές για την ανάλυση έγκυρων επιχειρηματικών μορφών, διότι μπορεί ν' αντικαταστήσουν η μία την άλλη σε οποιαδήποτε δήλωση, χωρίς να επηρεάσουν την τιμή αλήθειάς της. Π.χ., στη δήλωση $(p{\vee}q)$ η αντικατάσταση της p από τη λογικά ισοδύναμη $(p\&p)$ δίνει τη δήλωση $((p\&p){\vee}q)$, της οποίας η τιμή αλήθειας είναι ακριβώς η ίδια με αυτή της αρχικής δήλωσης, όποια κι αν είναι αυτή. Η αντικατάσταση λογικά ισοδύναμων εκφράσεων πάντα διατηρεί την τιμή αλήθειας, δηλαδή, διατηρεί και την αλήθεια και το ψεύδος. Για να συμβολίσουμε τη λογική ισοδυναμία μεταξύ δύο αυθαίρετων δηλώσεων P και Q γράφουμε $P{\Leftrightarrow}Q$. Σημειώνουμε ότι αυτό το "διπλό βέλος" δεν είναι ένας νέος σύνδεσμος, αλλά ένας βολικός συμβολισμός για να εκφράσουμε ότι η $P{\leftrightarrow}Q$ είναι ταυτολογία.

Αν μια υποθετική δήλωση είναι ταυτολογία, τότε λέμε ότι η επόμενη είναι μια *λογική συνέπεια* της ηγούμενης ή, ισοδύναμα, ότι η ηγούμενη *συνεπάγεται λογικά* την επόμενη. Ένα παράδειγμα φαίνεται στον Πίνακα 4-11, που δείχνει ότι η q είναι λογική συνέπεια της $((p{\rightarrow}q)\&p)$.

p	q	$(p{\rightarrow}q)$	$((p{\rightarrow}q)\&p)$	$(((p{\rightarrow}q)\&p){\rightarrow}q)$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

Πίνακας 4-11: Πίνακας αλήθειας που δείχνει ότι η q είναι λογική συνέπεια της $((p{\rightarrow}q)\&p)$.

Σε αντίθεση με τη λογική ισοδυναμία, η σχέση της λογικής συναπαγωγής διατηρεί την αλήθεια, αλλά όχι απαραίτητα το ψεύδος. Δηλαδή, αν η ηγούμενη μιας λογικής συνεπαγωγής είναι αληθής, τότε η επόμενη πρέπει επίσης να είναι αληθής (δείτε την πρώτη γραμμή του Πίνακα 4-11). Αν η ηγούμενη είναι ψευδής, δεν μπορούμε να εγγυηθούμε τίποτε για την τιμή αλήθειας της επόμενης (δείτε τις γραμμές 3-4 του Πίνακα 4-11). Η σχέση της λογικής συνεπαγωγής είναι σημαντική, όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα, αφού είναι η βάση για την κατασκευή έγκυρων επιχειρημάτων. Γράφουμε $P{\Rightarrow}Q$ για να υποδηλώσουμε ότι η Q είναι λογική συνέπεια της P.

Σημειώνουμε ότι, όταν $P{\Rightarrow}Q$ δεν μπορούμε γενικά ν' αντικαταστήσουμε την P με την Q σε ένα τύπο και να έχουμε την εγγύηση ότι η αλήθεια θα διατηρηθεί. Π.χ., δοθέντος ότι $(p\&{\sim}p){\Rightarrow}p$, πράγμα που επαληθεύεται εύκολα, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $((p\&{\sim}p){\rightarrow}q){\Rightarrow}(p{\rightarrow}q)$, αντικαθιστώντας την $(p\&{\sim}p)$ με τη λογική συνέπειά της p. Στην πραγματικότητα, αν η p είναι αληθής και η q είναι ψευδής, τότε η $((p\&{\sim}p){\rightarrow}q)$ θα είναι αληθής και η $(p{\rightarrow}q)$ ψευδής. Έτσι, οι παρατηρήσεις μας για διατήρηση της αλήθειας αναφέρονται μόνο στην αντικατάσταση ενός ολόκληρου τύπου από μια λογική συνέπεια αυτού του τύπου. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με ό,τι συμβαίνει με τη σχέση λογικής ισοδυναμίας, όπου η αντικατάσταση οποιουδήποτε υποτύπου από μια λογικά ισοδύναμη έκφραση διατηρεί την τιμή αλήθειας ολόκληρου του τύπου.

Είναι βολικό να έχουμε πρόχειρο ένα μικρό αριθμό λογικών ισοδυναμιών, από τις οποίες μπορούν να εξαχθούν όλες οι άλλες. Ο Πίνακας 4-12 δίνει εκείνους τους "νόμους" που χρησιμοποιούνται πιο συχνά, μαζί με τα ονόματά τους. Αυτός ο κατάλογος είναι πλεονασματικός, με την έννοια ότι μερικές λογικές ισοδυναμίες που περιλαμβάνει εξάγονται από άλλες, αλλά αποτελεί ένα βολικό σύνολο, με το οποίο μπορούμε να δουλεύουμε. Συμβολίζουμε με T οποιαδήποτε ταυτολογία, με F οποιαδήποτε αντίφαση και με P, Q, R οποιεσδήποτε δηλώσεις, ατομικές ή σύνθετες.

Νόμοι αυτοπάθειας	**Νόμοι προσεταιριστικότητας**
1. $(P{\vee}P){\Leftrightarrow}P$	1. $((P{\vee}Q){\vee}R){\Leftrightarrow}(P{\vee}(Q{\vee}R))$
2. $(P\&P){\Leftrightarrow}P$	2. $((P\&Q)\&R){\Leftrightarrow}(P\&(Q\&R))$

Νόμοι αντιμεταθετικότητας
1. $(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$
2. $(P \& Q) \Leftrightarrow (Q \& P)$

Νόμοι επιμεριστικότητας
1. $(P \vee (Q \& R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \& (P \vee R))$
2. $(P \& (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \& Q) \vee (P \& R))$

Νόμοι ταυτότητας
1. $(P \vee F) \Leftrightarrow P$
2. $(P \vee T) \Leftrightarrow T$
3. $(P \& F) \Leftrightarrow F$
4. $(P \& T) \Leftrightarrow P$

Νόμοι συμπληρώματος
1. $(P \vee \sim P) \Leftrightarrow T$
2. $\sim\sim P \Leftrightarrow P$ (νόμος διπλής άρνησης)
3. $(P \& \sim P) \Leftrightarrow F$

Νόμοι de Morgan
1. $\sim(P \vee Q) \Leftrightarrow (\sim P \& \sim Q)$
2. $\sim(P \& Q) \Leftrightarrow (\sim P \vee \sim Q)$

Νόμοι συνεπαγωγής
1. $(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\sim P \vee Q)$
2. $(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\sim Q \rightarrow \sim P)$ (νόμος αντιθετοαναστροφής)
3. $(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow \sim(P \& \sim Q)$

Νόμοι διπλής συνεπαγωγής
1. $(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \& (Q \rightarrow P))$
2. $(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((\sim P \& \sim Q) \vee (P \& Q))$

Πίνακας 4-12: Νόμοι της λογικής δηλώσεων

Κατασκευάζοντας πίνακες αλήθειας, μπορούμε να επαληθεύσουμε τις λογικές ισοδυναμίες του Πίνακα 4-12. Π.χ., ας πάρουμε μια περίπτωση ενός νόμου συνεπαγωγής: $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$. Αν αυτοί οι δύο τύποι είναι λογικά ισοδύναμοι, η αντίστοιχη διπλή συνεπαγωγή πρέπει να είναι ταυτολογία, πράγμα που ελέγχουμε στον Πίνακα 4-13. Επιπλέον, λόγω των παρατηρήσεών μας στην προηγούμενη ενότητα, ξέρουμε ότι η $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\sim P \vee Q)$ θα είναι ταυτολογία, για οποιουσδήποτε τύπους P και Q. Άρα ισχύει ο πρώτος νόμος συνεπαγωγής.

p	q	$(p \rightarrow q)$	$\sim p$	$(\sim p \vee q)$	$((p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q))$
1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

Πίνακας 4-13: Πίνακας αλήθειας που επαληθεύει μια λογική ισοδυναμία.

Επειδή λογικά ισοδύναμες δηλώσεις μπορούν ν' αντικαταστήσουν η μία την άλλη με διατήρηση τιμών αλήθειας, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτούς τους νόμους για το μετασχηματισμό μιας δήλωσης σε μια που είναι λογικά ισοδύναμη, αλλά μικρότερης πολυπλοκότητας. Η διαδικασία μπορεί να επεξηγηθεί μ' ένα απλό παράδειγμα, δείχνοντας ότι ο τύπος: $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$ ανάγεται σε ταυτολογία. Γράφουμε το νόμο που χρησιμοποιούμε στο κάθε βήμα στα δεξιά.

(4-4)
1. $(p \rightarrow (\sim q \vee p))$
2. $(\sim p \vee (\sim q \vee p))$ νόμος συνεπαγωγής
3. $((\sim q \vee p) \vee \sim p)$ νόμος αντιμεταθετικότητας
4. $(\sim q \vee (p \vee \sim p))$ νόμος προσεταιριστικότητας
5. $\sim q \vee T$ νόμος συμπληρώματος
6. T νόμος ταυτότητας

Όπως έχουμε αναφέρει, αντικατάσταση λογικά ισοδύναμων τύπων μπορεί να γίνει σε τύπους που περιέχονται σε μεγαλύτερους τύπους. Π.χ., ο τύπος $(p\&(q\rightarrow r))$ είναι λογικά ισοδύναμος με τον τύπο $(p\&(\sim q\vee r))$, όπου ο δεύτερος προκύπτει από τον πρώτο με αντικατάσταση του υποτύπου $(q\rightarrow r)$ από το λογικά ισοδύναμο τύπο $(\sim q\vee r)$. Επειδή λογικά ισοδύναμοι τύποι έχουν τις ίδιες τιμές αλήθειας, θα συνεισφέρουν με τον ίδιο τρόπο στις τιμές αλήθειας μεγαλύτερων τύπων, στους οποίους είναι εμφυτευμένοι. Συνεπώς η τιμή αλήθειας ενός μεγαλύτερου τύπου δεν θα επηρεαστεί από την αντικατάσταση ενός υποτύπου του από ένα λογικά ισοδύναμο τύπο. Αυτή η αρχή αναφέρεται μερικές φορές ως *Κανόνας της Αντικατάστασης*. Αυτός ο κανόνας εφαρμόζεται μόνο για την αντικατάσταση υποτύπων, δηλαδή, τύπων που είναι συντακτικές συνιστώσες μεγαλύτερων τύπων. Δεν θα επιτρεπόταν, π.χ., να μετατρέψουμε τον τύπο $(p\&(q\rightarrow r))$ στον τύπο $(q\&(p\rightarrow r))$, παραπέμποντας στη λογική ισοδυναμία των τύπων $(p\&q)$ και $(q\&p)$, αφού ο τύπος $(p\&q)$ δεν είναι συνιστώσα του $(p\&(q\rightarrow r))$.

Στον ακόλουθο μετασχηματισμό, η εφαρμογή του Κανόνα της Αντικατάστασης σημειώνεται ρητά με "(Αντικατ.)" στην τέταρτη γραμμή. Αυτός ο μετασχηματισμός δεν επιτυγχάνει απλοποίηση του αρχικού τύπου, αλλά δείχνει πώς μια από τις λογικές ισοδυναμίες, η αντιθετοαναστροφή, μπορεί ν' αποδειχθεί, χρησιμοποιώντας μερικές άλλες λογικές ισοδυναμίες. Εδώ οι P και Q είναι τυχόντες τύποι.

(4-5)	1. $(P\rightarrow Q)$	
	2. $\sim P\vee Q$	νόμος συνεπαγωγής
	3. $Q\vee\sim P$	νόμος αντιμεταθετικότητας
	4. $\sim\sim Q\vee\sim P$	νόμος συμπληρώματος (αντικατ.)
	5. $\sim Q\rightarrow\sim P$	νόμος συνεπαγωγής.

Σημειώνουμε ότι, ουσιαστικά ο ίδιος μετασχηματισμός μπορούσε να είχε δοθεί για να μετατραπεί ο τύπος $(p\rightarrow q)$ στο λογικά ισοδύναμο $(\sim q\rightarrow\sim p)$, αλλά, μια και η ισοδυναμία ισχύει κάτω από οποιεσδήποτε ομοιόμορφες αντικαταστάσεις των p και q από τύπους, μπορούμε επίσης να εκτελέσουμε το μετασχηματισμό και για τη γενική περίπτωση, δηλαδή, ως μετασχηματιστικό σχήμα.

4.5 Φυσική παραγωγή

Έχουμε δείξει μέχρι εδώ πώς συνδυάζονται συντακτικά τύποι, πώς πίνακες αλήθειας απεικονίζουν τη σημασιολογία των συνδέσμων και πώς τους χρησιμοποιούμε για να υπολογίσουμε την τιμή αλήθειας ενός σύνθετου τύπου και πώς οι λογικοί νόμοι επιτρέπουν τη μεταγραφή ενός τύπου σε ένα λογικά ισοδύναμο. Είμαστε τώρα έτοιμοι να συζητήσουμε μια ανάλυση έγκυρων επιχειρηματικών μορφών.

Μια *επιχειρηματική μορφή* αποτελείται από

(1) κάποιους τύπους που καλούνται *υποθέσεις*, οι οποίοι υποτίθεται ότι είναι αληθείς, έστω και μόνο χάριν της επιχειρηματικής μορφής, και

(2) ένα τύπο που καλείται *συμπέρασμα*, του οποίου η αλήθεια ισχυριζόμαστε ότι έπεται αναγκαία από την υποτιθέμενη αλήθεια των υποθέσεων.

Θέλουμε να χαρακτηρίσουμε τις έγκυρες επιχειρηματικές μορφές, ορίζοντας ένα σύνολο συμπερασματικών κανόνων, οι οποίοι εγγυώνται τη διατήρηση της αλήθειας (αλλά οι οποίοι μπορεί ή όχι να διατηρούν το ψεύδος). Μια επιχειρηματική μορφή καλείται *έγκυρη* αν και μόνον αν δεν υπάρχει ομοιόμορφη αντιστοίχιση τιμών αλήθειας στους ατομικούς τύπους της που κάνει όλες τις υποθέσεις αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές. Αν υπάρχει μια τέτοια αντιστοίχιση, καλούμε την επιχειρηματική μορφή *άκυρη*.

Το κριτήριο για την εγκυρότητα μπορεί να διατυπωθεί διαφορετικά, αλλά ισοδύναμα, ως εξής: αν $P_1, P_2, ..., P_n$ είναι οι υποθέσεις και Q το συμπέρασμα, ο τύπος $((P_1\&P_2\&...\&P_n)\to Q)$ είναι ταυτολογία. Αυτό ισχύει, διότι η συνεπαγωγή είναι ταυτολογική, μόνο στην περίπτωση που δεν υπάρχει δυνατότητα να έχουμε αληθή ηγούμενη και ψευδή επόμενη. Ο συσχετισμός της εγκυρότητας επιχειρηματικών μορφών με ταυτολογίες μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε τους νόμους της προηγούμενης παραγράφου, για να συμπεράνουμε ότι οποιαδήποτε ομοιόμορφη αντικατάσταση ατομικών τύπων σε μια έγκυρη επιχειρηματική μορφή παράγει μια άλλη έγκυρη επιχειρηματική μορφή.

Ας πάρουμε ένα απλό παράδειγμα ενός επιχειρήματος σε φυσική γλώσσα, που όλοι δεχόμαστε ότι είναι έγκυρο.

(4-6) Αν ο Γιάννης αγαπά τη Μαρία, τότε η Μαρία είναι ευτυχής.
Ο Γιάννης αγαπά τη Μαρία.
―――――――――――
(Συνεπώς) Η Μαρία είναι ευτυχής.

Μεταφράζοντας αυτό το επιχείρημα στην τυπική μας γλώσσα, συμβολίζοντας με p τη δήλωση "Ο Γιάννης αγαπά τη Μαρία" και με q τη δήλωση "Η Μαρία είναι ευτυχής", έχουμε:

$$\text{(4-7)}\quad \begin{array}{l} p\to q \\ \underline{p\qquad} \\ q \end{array}$$

Ο πίνακας 4-11 δείχνει ότι αυτή η επιχειρηματική μορφή είναι έγκυρη, δηλαδή, αποδεικνύεται ότι ο τύπος q είναι λογική συνέπεια του $((p\to q)\&p)$. Με βάση την αρχή της ομοιόμορφης αντικατάστασης σε ταυτολογίες, μπορούμε να πούμε ότι ο τύπος $(((P\to Q)\&P)\to Q)$ είναι ταυτολογία, για οποιουσδήποτε τύπους P και Q, και άρα η

$$\text{(4-8)}\quad \begin{array}{l} P \to Q \\ \underline{P\qquad\quad} \\ Q \end{array}$$

είναι μια έγκυρη επιχειρηματική μορφή. Καλείται παραδοσιακά *Modus Ponens*.

Παρακάτω δίνουμε ένα πιο πολύπλοκο παράδειγμα:

$$\text{(4-9)}\quad \begin{array}{l} (\sim(r\vee s)\to t)\to(r\&t) \\ \underline{(\sim(r\vee s)\to t)\qquad\quad} \\ (r\&t) \end{array}$$

Δίνουμε επίσης ένα παράδειγμα άκυρης επιχειρηματικής μορφής:

(4-10) $p \rightarrow q$

q

---

p

Η δοκιμασία εγκυρότητας με πίνακα αλήθειας (Πίνακας 4-14) δείχνει ότι η αντίστοιχη συνεπαγωγή δεν είναι ταυτολογία, δηλαδή, είναι δυνατό να είναι οι υποθέσεις αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές.

p	q	$(p\rightarrow q)$	$((p\rightarrow q)\&q)$	$(((p\rightarrow q)\&q)\rightarrow p)$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	0	1	0	1

Πίνακας 4-14: Πίνακας αλήθειας για τον τύπο $(((p\rightarrow q)\&q)\rightarrow p)$.

Ένα παράδειγμα επιχειρήματος στα ελληνικά, που αντιπροσωπεύεται από την επιχειρηματική μορφή στο (4-10) είναι το ακόλουθο:

(4-11) Αν Ο Γιάννης αγαπά τη Μαρία, τότε η Μαρία είναι ευτυχής.

Η Μαρία είναι ευτυχής.

Συνεπώς ο Γιάννης αγαπά τη Μαρία.

Είναι εύκολο να δούμε σ' αυτή την απλή περίπτωση ότι η αλήθεια των υποθέσεων δεν συνεπάγεται λογικά την αλήθεια του συμπεράσματος, αλλά σε πιο σύνθετες περιπτώσεις μπορεί κανείς να εξαπατηθεί και να σκεφθεί ότι το επιχείρημα είναι έγκυρο. Τέτοιες δελεαστικές άκυρες επιχειρηματολογικές μορφές καλούνται *πλάνες*. Η συγκεκριμένη πλάνη καλείται *πλάνη της επιβεβαίωσης του συμπεράσματος*. Μια παρόμοια πλάνη, που καλείται *πλάνη της άρνησης του ηγούμενου*, εξάγει από τον τύπο $(p\rightarrow q)$ και τον $\sim p$ το συμπέρασμα $\sim q$.

Αν και η εγκυρότητα οποιασδήποτε επιχειρηματικής μορφής μπορεί να προσδιοριστεί με την κατασκευή ενός πίνακα αλήθειας, είναι συχνά άβολο να το κάνουμε, ιδιαίτερα όταν αυτός περιέχει μεγάλο αριθμό ατομικών τύπων. Π.χ., ο έλεγχος μιας επιχειρηματικής μορφής που περιέχει πέντε ατομικούς τύπους θα απαιτούσε ένα πίνακα αλήθειας με 2^5 (=32) γραμμές. Μια εναλλακτική λύση είναι να αναλύσουμε την επιχειρηματική μορφή σε μια ακολουθία από απλούστερες και, αν έχουμε ήδη δείξει ότι αυτές είναι έγκυρες, μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι η αρχική μορφή είναι επίσης έγκυρη. Π.χ., για να δείξουμε την εγκυρότητα της επιχειρηματικής μορφής:

(4-12) $(p\rightarrow(q\rightarrow(r\&s)))$

p

q

$(r\&s)$

θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι το συμπέρασμα έπεται από τις υποθέσεις με μια ακολουθία δύο εφαρμογών της έγκυρης επιχειρηματικής μορφής Modus Ponens, όπως φαίνεται παρακάτω:

(4-13) 1. $(p \to (q \to (r \& s)))$
2. p
3. q
4. $(q \to (r \& s))$ από τις γραμμές 1, 2 μέσω Modus Ponens
5. $(r \& s)$ από τις γραμμές 3, 4 μέσω Modus Ponens.

Απλές έγκυρες επιχειρηματικές μορφές που μπορούν να χρησιμοποιηθούν με τον τρόπο που μόλις χρησιμοποιήσαμε τη μορφή Modus Ponens είναι γνωστές ως *συμπερασματικοί κανόνες*. Οι επτά κανόνες που παραθέτουμε στον Πίνακαι 4-15 θα αρκέσουν για όλες τις επιχειρηματικές μορφές που θα συναντήσουμε. Όπως ο πίνακας των λογικών ισοδυναμιών που δώσαμε στην προηγούμενη ενότητα, αυτός ο κατάλογος είναι πλεονασματικός, με την έννοια ότι μερικοί από τους κανόνες μπορούν να εξαχθούν από άλλους (σε συνδυασμό με κάποιες λογικές ισοδυναμίες).

Συμπερασματικοί κανόνες

Modus Ponens (MP)	$\dfrac{\begin{array}{c}P \to Q \\ P\end{array}}{Q}$	Modus Tollens (MT)	$\dfrac{\begin{array}{c}P \to Q \\ \sim Q\end{array}}{\sim P}$
Υποθετικός Συλλογισμός (ΥΣ)	$\dfrac{\begin{array}{c}P \to Q \\ Q \to R\end{array}}{P \to R}$	Διαζευκτικός Συλλογισμός (ΔΣ)	$\dfrac{\begin{array}{c}P \vee Q \\ \sim P\end{array}}{Q}$
Απλοποίηση (Απλ.)	$\dfrac{P \& Q}{P}$	Πρόθεση (Πρόσθ.)	$\dfrac{P}{P \vee Q}$
Σύζευξη (Σύζ.)	$\dfrac{\begin{array}{c}P \\ Q\end{array}}{P \& Q}$		

Πίνακας 4-15: Συνήθεις συμπερασματικοί κανόνες για τη λογική δηλώσεων.

Ας δούμε ένα παραδειγμα ελέγχου εγκυρότητας επιχειρηματικής μορφής, στο οποίο χρησιμοποιούνται αυτοί οι κανόνες. Οι γραμμές είναι αριθμημένες για ευκολία αναφοράς και κάθε γραμμή διαφορετική από τις υποθέσεις δικαιολογείται μέσω ενός συμπερασματικού κανόνα και των γραμμών στις οποίες εφαρμόζεται αυτός ο κανόνας.

(4-14) 1. $p \to q$
2. $p \vee s$
3. $q \to r$
4. $s \to t$
5. $\sim r$
6. $\sim q$ 3, 5, MT
7. $\sim p$ 1, 6, MT
8. s 2, 7, ΔΣ
9. t 4, 8, MP.

Η κατασκευή (4-14) καλείται *απόδειξη* του τύπου t από τις υποθέσεις στις γραμμές 1-5. Αφού οι υποθέσεις επίσης συνεπάγονται λογικά τους τύπους στις γραμμές 6, 7 και 8, αυτοί έχουν επίσης αποδειχθεί και στην πραγματικότητα θα μπορούσαμε να έχουμε σταματήσει μετά από οποιδήποτε από αυτές τις γραμμές και να έχουμε αποκαλέσει την κατασκευή μια απόδειξη του τύπου $\sim q$, του $\sim p$ ή του s - όλα εξαρτώνται από το που συγκεντρώνουμε την προσοχή μας. Σημειώνουμε όμως ότι, δοθέντων μερικών υποθέσεων και ενός υποτιθέμενου συμπεράσματος, δεν είμαστε βέβαιοι ότι υπάρχει κάποια παραγωγή που οδηγεί από τις υποθέσεις σ' αυτό το συμπέρασμα (δεν θα υπάρχει, όταν η επιχειρηματική μορφή είναι άκυρη) και ακόμα κι όταν υπάρχει μια δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι θα την βρούμε. Από την άλλη πλευρά, έχοντας μια υποψήφια απόδειξη όπως η (4-14), είναι απλό θέμα να ελέγξουμε αν πράγματι αποτελεί απόδειξη, επαληθεύοντας την παραγωγή κάθε γραμμής από προηγούμενες γραμμές, με εφαρμογή κάποιου κανόνα. Γενικά, η λογική μας παρέχει μεθόδους για τον έλεγχο αποδείξεων, αλλά όχι για την ανακάλυψή τους. Είναι αλήθεια ότι, στη δηλωτική λογική, μπορεί κάποιος πάντα να εξακριβώσει κατά πόσον ένα δοθέν συμπέρασμα έπεται από δοθείσες υποθέσεις (μπορούμε να κατασκευάσουμε τον πίνακα αλήθειας για την αντίστοιχη συνεπαγωγή), αλλά σε πιο σύνθετα συστήματα, όπως αυτό του επόμενου κεφαλαίου, δεν υπάρχει γενική μέθοδος για αυτή την εξακρίβωση.

Ας δούμε τώρα μια πιο δύσκολη απόδειξη, της οποίας η δυσκολία οφείλεται στο γεγονός ότι οι υποθέσεις δεν είναι της σωστής μορφής, για να εφαρμόσουμε κατευθείαν κάποιο συμπερασματικό κανόνα.

(4-15) Αποδείξτε τον $(p \rightarrow q)$ από τις υποθέσεις $(p \rightarrow (q \vee r))$ και $\sim r$.

1.	$(p \rightarrow (q \vee r))$	
2.	$\sim r$	
3.	$\sim p \vee (q \vee r)$	1, νόμος συνεπαγωγής.
4.	$(\sim p \vee q) \vee r$	3, νόμος προσεταιριστικότητας
5.	$r \vee (\sim p \vee q)$	4, νόμος αντιμεταθετικότητας.
6.	$\sim p \vee q$	2, 5, ΔΣ
7.	$p \rightarrow q$	6, νόμος συνεπαγωγής.

Μετατρέποντας την πρώτη υπόθεση σε ένα λογικά ισοδύναμο τύπο, με βάση τους νόμους συνεπαγωγής, προσεταιριστικότητας και αντιμεταθετικότητας, είμαστε τελικά σε θέση να εφαρμοσουμε τον ΔΣ ως τον μόνο συμπερασματικό κανόνα σ' αυτή την απόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι, η αντικατάσταση λογικά ισοδύναμων τύπων διατηρεί την τιμή αλήθειας κι έτσι, ειδικότερα, διατηρεί την αλήθεια. Επομένως, σε μια απόδειξη δεν μπορούμε να περάσουμε ποτέ από αλήθεια σε ψεύδος, αντικαθιστώντας ένα τύπο από κάποιον λογικά ισοδύναμό του, και η εγκυρότητα δεν θα επηρεαστεί.

Η ακόλουθη απόδειξη χρησιμοποιεί τον κανόνα της αντικατάστασης, για να προκύψει ένας τύπος λογικά ισοδύναμος με ένα δοθέντα:

(4-16) 1. $\sim(p\rightarrow\sim q)$
2. $\sim r$
3. $\sim\sim(p\&\sim\sim q)$ 1, νόμος συνεπαγωγής (αντικατάστ.)
4. $(p\&\sim\sim q)$ 3, νόμος συμπληρώματος
5. $(p\&q)$ 4, νόμος συμπληρώματος (αντικατάστ.)
6. $((p\&q)\&\sim r)$ 2, 5, Σύζευξη
7. $(p\&(q\&\sim r))$ 6, νόμος προσεταιριστικότητας
8. $(p\&\sim\sim(q\&\sim r))$ 7, νόμος συμπληρώματος (αντικατάστ.)
9. $(p\&\sim(q\rightarrow r))$ 8, νόμος συνεπαγωγής (αντικατάστ.)

Στη συνέχεια, δεν θα αναφέρουμε ρητά τον κανόνα της αντικατάστασης μέσα σε αποδείξεις, αλλά απλά θ' αναφερόμαστε στη λογική ισοδυναμία που χρησιμοποιείται για την παραγωγή αυτής της γραμμής.

Υποθετική απόδειξη

Ορισμένες αποδείξεις, των οποίων τα συμπεράσματα περιέχουν μια συνεπαγωγή ως κύριο σύνδεσμο, κατασκευάζονται πιο εύκολα με τη μέθοδο της *υποθετικής απόδειξης*. Έστω ότι μια επιχειρηματική μορφή έχει τους τύπους $P_1, ..., P_n$ ως υποθέσεις και τον τύπο $Q\rightarrow R$ ως συμπέρασμα. Σε μια υποθετική απόδειξη, προσθέτουμε τον ηγούμενο Q του συμπεράσματος ως μια επιπλέον βοηθητική υπόθεση και μετά, από τον Q και τις άλλες υποθέσεις, παράγουμε τον R. Η υποθετική απόδειξη συμπληρώνεται με την ακύρωση της βοηθητικής υπόθεσης Q και το γράψιμο του συμπεράσματος $Q\rightarrow R$. Η εγκυρότητα αυτής της αποδεικτικής μεθόδου βασίζεται στο γεγονός ότι ο τύπος $((P_1\&...\&P_n)\rightarrow(Q\rightarrow R))$ είναι λογικά ισοδύναμος με τον τύπο $((P_1\&...\&P_n\&Q)\rightarrow R)$. Ας δούμε, π.χ., μια υποθετική απόδειξη για το παράδειγμα (4-15).

(4-17) Αποδείξτε τον τύπο $(p\rightarrow q)$ από τις υποθέσεις $(p\rightarrow(q\vee r))$ και $\sim r$.

1.	$(p\rightarrow(q\vee r))$	
2.	$\sim r$	
3.	p	βοηθητική υπόθεση
4.	$q\vee r$	1, 3, M P
5.	$r\vee q$	4, νόμος αντιμεταθετικότητας
6.	q	2, 5, ΔΣ
7.	$p\rightarrow q$	3-6, υποθετική απόδειξη.

Μερικές φορές, κατασκευάζοντας μια υποθετική απόδειξη, δηλώνουμε με μια κατακόρυφη γραμμή κάθε τύπο που βασίζεται στη βοηθητική υπόθεση, για να θυμόμαστε ότι δουλεύουμε κάτω από μια ειδική πρόσθετη υπόθεση. Μια υποθετική απόδειξη πρέπει πάντα να ακυρώνει τη βοηθητική υπόθεση, πριν τελειώσει. Για προφανείς λόγους, απαγορεύεται να χρησιμοποιούμε οποιεσδήποτε γραμμές του υποθετικού μέρους της απόδειξης μετά την ακύρωση. Η ακόλουθη απόδειξη δείχνει πώς οι υποθετικές αποδείξεις εντάσσονται η μια μέσα στην άλλη.

(4-18) Αποδείξτε τον τύπο $((q\rightarrow s)\rightarrow(p\rightarrow s))$ από τον τύπο $(p\rightarrow(q\&r))$.

1.	$(p\rightarrow(q\&r))$	
2.	$q\rightarrow s$	βοηθητική υπόθεση
3.	p	βοηθητική υπόθεση
4.	$q\&r$	1, 3, MP
5.	q	4, απλοποίηση
6.	s	2, 5, MP
7.	$p\rightarrow s$	3-6, υποθετική απόδειξη
8.	$((q\rightarrow s)\rightarrow(p\rightarrow s))$	2-7, υποθετική απόδειξη.

Ανάλογοι περιορισμοί εφαρμόζονται και σε βαθύτερα εμφυτευμένες βοηθητικές υποθέσεις. Η έξοδος από το ένα επίπεδο στο αμέσως ψηλότερο συνοδεύεται πάντα από το σχηματισμό μιας συνεπαγωγής, με ηγούμενο τύπο τη βοηθητική υπόθεση από το χαμηλότερο επίπεδο και συμπέρασμα τον τύπο που μόλις προέκυψε (π.χ., δείτε τη γραμμή 7 στο (4-18)). Χρησιμοποιώντας γραμμές από χαμηλότερα επίπεδα σε γραμμές της απόδειξης σε ψηλότερα επίπεδα επίσης απαγορεύεται (π.χ., η γραμμή 5 δεν είναι διαθέσιμη για χρήση, αφού έχουμε φύγει από το χαμηλότερο επίπεδο στη γραμμή 7). Σημειώνουμε όμως ότι γραμμές από ψηλότερα επίπεδα είναι διαθέσιμες για χρήση σε χαμηλότερα επίπεδα (π.χ., η γραμμή 1 χρησιμοποιείται για την εξαγωγή της γραμμής 4).

Βοηθητικές υποθέσεις μπορούν να είναι οποιοιδήποτε τύποι, εφ' όσον αυτοί είναι χρήσιμοι για τον τελικό σκοπό. Στο παράδειγμα (4-18) ο τύπος s δεν εμφανίστηκε πουθενά στην αρχική υπόθεση, αλλά είναι απόλυτα νόμιμος ως μέρος μιας βοηθητικής υπόθεσης.

Έμμεση απόδειξη

Οι συλλογισμοί που έχουμε δει μέχρι τώρα είναι άμεσες αποδείξεις, δηλαδή, αποδείξεις στις οποίες το συμπέρασμα παράγεται ως η τελευταία γραμμή μέσω μιας σειράς έγκυρων βημάτων. Σε μια *έμμεση απόδειξη* εισάγουμε την άρνηση του επιθυμητού συμπεράσματος ως βοηθητική υπόθεση και καταλήγουμε σε μια (οποιαδήποτε) αντίφαση. Με την υπόθεση ότι οι άλλες υποθέσεις είναι όλες αληθείς, αυτή η αντίφαση δείχνει ότι η βοηθητική υπόθεση δεν είναι αποδεκτή, οπότε προκύπτει (ή αληθεύει) η θετική μορφή της, δηλαδή, το επιθυμητό συμπέρασμα. Αυτή είναι η μέθοδος απόδειξης που καλούμε *απαγωγή σε άτοπο*. Μια απόδειξη με χρήση της μεθόδου αυτής είναι μια ειδική μορφή υποθετικής απόδειξης, αφού χρησιμοποιεί μια βοηθητική υπόθεση, η οποία είναι η άρνηση του επιθυμητού συμπεράσματος. Το συμπέρασμα δεν είναι κατ' ανάγκη συνεπαγωγή, μπορεί να είναι ακόμη και ατομικός τύπος. Ας δούμε ένα παράδειγμα.
(4-19) Αποδείξτε τον τύπο p από τους τύπους $(p\vee q)$, $(q\rightarrow r)$ και $\sim r$.

1.	$p \vee q$	
2.	$q\rightarrow r$	
3.	$\sim r$	
4.	$\sim p$	βοηθητική υπόθεση
5.	q	1, 4, ΔΣ
6.	r	2, 5, M.P

7.	$r\&{\sim}r$	3, 6, σύζευξη
8.	p	4-7, έμμεση απόδειξη.

Η γραμμή 7 είναι αντίφαση, άρα η βοηθητική υπόθεση (γραμμή 4) είναι ψευδής.

Με τον ακόλουθο τρόπο μπορεί να εξηγηθεί γιατί μια έμμεση απόδειξη αποτελεί μια ειδική μορφή υποθετικής απόδειξης. Προσθέτοντας τη βοηθητική υπόθεση ${\sim}p$ στην παραπάνω απόδειξη, π.χ., εξάγουμε τον τύπο $(r\&{\sim}r)$. Με βάση τη μέθοδο υποθετικής απόδειξης, προκύπτει ο τύπος $({\sim}p{\to}(r\&{\sim}r))$. Ως επόμενη γραμμή, προσθέτουμε την ταυτολογία ${\sim}(r\&{\sim}r)$ – υπενθυμίζουμε ότι μια ταυτολογία μπορεί να προστεθεί ως έγκυρο βήμα οπουδήποτε σε οποιαδήποτε απόδειξη, αφού δεν μπορεί ποτέ να είναι ψευδής. Τέλος, παράγουμε τον τύπο ${\sim}{\sim}p$ με χρήση του κανόνα Modus Tollens, από τον οποίο προκήπτει ο τύπος p, με βάση το νόμο διπλής άρνησης.

Έμμεσες αποδείξεις μπορεί να έχουν άλλες έμμεσες αποδείξεις, καθώς και υποθετικές αποδείξεις, εμφυτευμένες σ' αυτές και, όμοια, αυτές μπορούν να εμφυτευθούν σε υποθετικές αποδείξεις. Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις, γραμμές από ένα βαθύτερα εμφυτευμένο μέρος δεν μπορούν να θεωρηθούν ως αληθείς σε ένα λιγότερο βαθιά εμφυτευμένο μέρος.

Έμμεσες αποδείξεις χρησιμοποιούνται πολύ συχνά στα μαθηματικά, όπου είναι πολύ ευκολότερο να κατασκευαστούν από μια άμεση απόδειξη. Είδαμε ένα παράδειγμα, όταν δείξαμε ότι το κενό σύνολο είναι υποσύνολο κάθε συνόλου. Υποθέτοντας την άρνηση αυτής της δήλωσης, οδηγηθήκαμε στο συμπέρασμα ότι το κενό σύνολο έχει ένα στοιχείο, πράγμα που, σε συνδυασμό με τον ορισμό του κενού συνόλου, οδηγεί σε αντίφαση. Έτσι, η υπόθεση ότι το κενό σύνολο δεν είναι υποσύνολο κάθε συνόλου ανάγεται σε μια αντίφαση και δεν μπορεί να διατηρηθεί.

Ασκήσεις

1. Μεταφράστε τις ακόλουθες δηλώσεις στη συμβολική γλώσσα της λογικής δηλώσεων, αναφέροντας ποιοί ατομικοί τύποι αντιστοιχούν σε ποιές ατομικές δηλώσεις στα ελληνικά. Σε μερικές περιπτώσεις, ίσως χρειαστεί να χρησιμοποιήσετε μια συντακτικά διαφορετική μορφή της ελληνικής πρότασης που δίνεται.

   (α) Είτε ο Γιάννης είναι σ' αυτό το δωμάτιο είτε η Μαρία είναι και ίσως είναι και οι δύο.

   (β) Η φωτιά προκλήθηκε από ένα εμπρηστή ή έγινε κάποια τυχαία έκρηξη στο λεβητοστάσιο.

   (γ) Όταν βρέχει, κάνει κατακλυσμό.

   (δ) Ο Νίκος θέλει σκύλο, αλλά η Αλίκη προτιμά τις γάτες.

   (ε) Αν ο Γιάννης γυρίσει σπίτι αργά και δεν έχει φάει για βράδυ, τότε θα ξαναζεστάνουμε το φαγητό.

(στ) Η Μάρθα δεν θα βγει για καφέ με τον Κώστα, εκτός εάν αυτός ξυρίσει το μούσι του και σταματήσει να πίνει πολύ.

(ζ) Το χρηματιστήριο αξιών ανεβαίνει, όταν η εμπιστοσύνη του κοινού στην οικονομία ανεβαίνει και μόνον τότε.

(η) Μια αναγκαία, αλλά ίσως όχι ικανή, συνθήκη για ν' αρχίσουν διαπραγματεύσεις είναι η Ρωσία να σταματήσει όλες τις επιθετικές πράξεις εναντίον της Ουκρανίας.

2. Οι ακόλουθες δηλώσεις έχουν διάφορα είδη ελλείψεων, οπότε μερικοί από τους συνδέσμους φαίνεται ότι δεν συνδέουν πλήρεις δηλώσεις. Διατυπώστε πάλι τις δηλώσεις, με τρόπο που οι σύνδεσμοι να συνδέουν δηλώσεις, και μεταφράστε τις σε συμβολικές εκφράσεις.

   (α) Ο Γιάννης και ο Βασίλης πάνε στο σινεμά, αλλά όχι ο Θωμάς.

   (β) Στην Άννα δεν αρέσουν τα κολοκύθια ή τα παντζάρια.

   (γ) Αν ούτε ο Πέτρος ούτε ο Παύλος δεν πάει στο πάρτυ, τότε ούτε εγώ θα πάω.

   (δ) Αν η Μαρία δε χάθηκε ή δεν έπαθε ατύχημα, θα είναι εδώ σε πέντε λεπτά.

   (ε) Αρκούδα ή λύκος τρόμαξε τα παιδιά.

   (στ) Ένα πάρτυ ή ένα παιχνίδι θα είχε διασκεδάσει τα παιδιά.

3. Έστω ότι οι τύποι p, q και r είναι αληθείς και ο s είναι ψευδής. Βρείτε τις τιμές αλήθειας των ακόλουθων τύπων.

$$((p\&q)\&s), \quad p\rightarrow s, \quad ((p\&q)\leftrightarrow(r\&\sim s)),$$
$$(p\&(q\&s)), \quad s\rightarrow p, \quad (p\rightarrow(q\rightarrow(r\rightarrow s))).$$

4. Κατασκευάστε πίνακες αλήθειας για καθένα από τους ακόλουθους τύπους και βρείτε όσους είναι λογικά ισοδύναμοι μεταξύ τους.

$$(p\vee\sim q), \qquad ((p\leftrightarrow q)\&p), \quad (((p\rightarrow q)\rightarrow p)\rightarrow q),$$
$$\sim(\sim p\&q), \quad (((p\rightarrow(q\vee\sim r))\&(p\rightarrow(q\vee\sim r))).$$

5. Για καθένα από τους ακόλουθους τύπους, χρησιμοποιείστε τη μέθοδο γρήγορης διάψευσης, για να βρείτε μια αντιστοίχιση τιμών αλήθειας στους ατομικούς τύπους, η οποία κάνει τον πλήρη τύπο ψευδή

(α)	$(p\vee q)$	(δ)	$(((p\rightarrow q)\rightarrow r)\rightarrow s)\rightarrow(p\rightarrow q))$
(β)	$((p\vee q)\rightarrow(p\&q)$	(ε)	$(((p\vee q)\&(r\&s))\leftrightarrow(((p\&q)\&r)\&s))$.
(γ)	$(\sim(\sim q\vee p)\vee(p\rightarrow q))$		

6. Ποιοί από τους ακόλουθους τύπους είναι ταυτολογίες, ποιοί αντιφάσεις και ποιοί ενδεχόμενα;

$$(p\vee\sim p),\ (p\vee q),\ ((p\&q)\rightarrow(p\vee r)),\ (\sim p\&\sim(p\rightarrow q)),\ ((p\vee r)\rightarrow\sim p).$$

7. Μερικοί από τους λογικούς συνδέσμους μπορούν να οριστούν με τη βοήθεια των άλλων. Π.χ., ο τύπος $(p{\rightarrow}q)$ μπορεί να οριστεί ως συντόμευση του τύπου $({\sim}p{\vee}q)$, αφού οι δύο αυτοί τύποι είναι λογικά ισοδύναμοι. Συνεπώς όλοι οι τύποι που περιέχουν το σύνδεσμο $\rightarrow$ θα μπορούσαν ν' αντικατασταθούν από τύπους που περιέχουν τους $\vee, \sim$.
(α) Ορίστε το σύνδεσμο $\rightarrow$ με τη βοήθεια των $\&, \sim$.
(β) Ορίστε τον $\&$ με τη βοήθεια των $\vee, \sim$.
(γ) Ορίστε το σύνδεσμο $\leftrightarrow$ με τη βοήθεια των $\rightarrow, \&$.
(Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι οι πέντε σύνδεσμοι θα μπορούσαν ν' αναχθούν στους $\vee$ και $\sim$.)
(δ) Δείξτε ότι οι πέντε σύνδεσμοι μπορούν ν' αναχθούν στους $\&$ και $\sim$.

8. Χρησιμοποιώντας τους νόμους του Πίνακα 4-12, να αναγάγετε καθένα από τους ακόλουθους τύπους στον απλούστερο λογικά ισοδύναμο τύπο.

$$({\sim}p{\vee}(p\&q)),\qquad (({\sim}p\&q){\vee}{\sim}(p{\vee}q)),\qquad (({\sim}p\&q){\leftrightarrow}(p{\vee}q)),$$
$$({\sim}p\&((p\&q){\vee}(p\&r))),\qquad (((p{\vee}q)\&(r{\vee}{\sim}q)){\rightarrow}(p{\vee}r)).$$

9. Δώστε μια τυπική απόδειξη εγκυρότητας για καθεμιά από τις ακόλουθες επιχειρηματικές μορφές. Σε κάποιες περιπτώσεις, μια υποθετική ή έμμεση απόδειξη θα είναι πολύ ευκολότερη από μια άμεση.

(α) $\begin{array}{l} p{\rightarrow}q \\ q{\rightarrow}r \\ {\sim}r \\ \hline {\sim}p \end{array}$ (β) $\begin{array}{l} p \\ {\sim}r \\ (p\&{\sim}r){\rightarrow}q \\ \hline q \end{array}$ (γ) $\begin{array}{l} p{\vee}q \\ {\sim}q \\ r{\rightarrow}{\sim}p \\ \hline {\sim}r \end{array}$

(δ) $\begin{array}{l} p{\rightarrow}{\sim}q \\ r{\rightarrow}q \\ {\sim}r{\rightarrow}s \\ \hline p{\rightarrow}s \end{array}$ (ε) $\begin{array}{l} {\sim}p{\rightarrow}q \\ r{\rightarrow}(s{\vee}t) \\ s{\rightarrow}{\sim}r \\ p{\rightarrow}{\sim}t \\ \hline r \rightarrow q \end{array}$ (στ) $\begin{array}{l} p{\leftrightarrow}q \\ {\sim}p \\ (q\&{\sim}r) \vee t \\ (s{\vee}t){\rightarrow}r \\ \hline r\& \sim q \end{array}$

(ζ) $\begin{array}{l} {\sim}p{\vee}q \\ {\sim}q\&r \\ {\sim}(p{\vee}q){\rightarrow}s \\ \hline r\&s \end{array}$ (η) $\begin{array}{l} p \\ (p\&q){\vee}(p\&r) \\ (p{\vee}q){\rightarrow}{\sim}r \\ \hline p{\leftrightarrow}q \end{array}$ (θ) $\begin{array}{l} (p\&q){\rightarrow}(p{\rightarrow}(r\&s)) \\ (p\&q)\&u \\ \hline r{\vee}s \end{array}$

(ι) $\begin{array}{l} p{\rightarrow}(q\&r) \\ q{\rightarrow}s \\ r{\rightarrow}t \\ (s\&t){\rightarrow}{\sim}u \\ u \\ \hline {\sim}p \end{array}$ (κ) $\begin{array}{l} p{\rightarrow}q \\ r{\rightarrow}s \\ {\sim}q{\vee}{\sim}s \\ p \\ (t\&u){\rightarrow}r \\ \hline {\sim}t{\vee}{\sim}u \end{array}$ (λ) $\begin{array}{l} p \vee (q\&r) \\ {\sim}t \\ (p{\vee}q){\rightarrow}(s{\vee}t) \\ {\sim}p \\ \hline r\&s \end{array}$

10. Εκφράστε τα ακόλουθα επιχειρήματα στη γλώσσα της λογικής δηλώσεων και προσδιορίστε αν είναι έγκυρες οι αντίστοιχες επιχειρηματικές μορφές.

(α) Ο μπάτλερ ή ο μάγειρος ή ο σωφέρ σκότωσε το βαρώνο. Αν ο μάγειρος σκότωσε το βαρώνο, τότε το φαγητό ήταν δηλητηριασμένο και αν ο σωφέρ σκότωσε το βαρώνο, τότε υπάρχε βόμβα στο αυτοκίνητο. Το φαγητό δεν ήταν δηλητηριασμένο και ο μπάτλερ δεν σκότωσε το βαρώνο. Συνεπώς ο σωφέρ σκότωσε το βαρώνο.

(β) Αν το άτομο δεν έχει καταλάβει τις οδηγίες ή δεν έχει τελειώσει το διάβασμα της πρότασης, τότε έχει πατήσει κάθος πλήκτρο ή έχει αποτύχει να παντήσει. Αν το άτομο έχει αποτύχει να απαντήσει, τότε το χρονόμετρο δεν έχει σταματήσει. Το άτομο έχει πατήσει το σωστό πλήκτρο και το χρονόμετρο έχει σταματήσει. Συνεπώς το άτομο κατάλαβε τις οδηγίες.

(γ) Αν η πίεση είναι 1 ατμόσφαιρα, το νερό βράζει μόνον αν η θερμοκρασία είναι τουλάχιστον 100^o C. Αν η πίεση είναι 1 ατμόσφαιρα, τότε το νερό παγώνει μόνον αν η θερμοκρασία είναι το πολύ 0^o C. Η πίεση είναι 1 ατμόσφαιρα και η θερμοκρασία είναι τουλάχιστον 100^o C ή το πολύ 0^o C. Το νερό δεν βράζει. Συνεπώς η θερμοκρασία είναι το πολύ 0^o C.

(δ) Αν είμαι τίμιος, τότε είμαι αφελής. Είμαι τίμιος ή αφελής, αλλιώς ο Γιάννης είχε δίκιο και αυτός ο εφημεριδοπώλης είναι απατεώνας. Δεν είμαι αφελής και αυτός ο εφημεριδοπώλης είναι σίγουρα απατεώνας. Συνεπώς ο Γιάννης είχε δίκιο.

11. Έστω S το ακόλουθο σύνολο προτασιακών τύπων:

$$\{p, (p\vee q), (p\vee p), (p\vee\sim p), (p\&(q\vee\sim q)), (\sim q\to p), (p\to(q\to p)),$$
$$(\sim p\to q), (p\vee(q\&\sim q)), (p\vee(q\vee\sim q))\}.$$

Θεωρούμε τη σχέση $R=\{\langle x,y\rangle | x\in S$ και $y\in S$ και $x\Leftrightarrow y\}$.
(α) Δείξτε ότι η R είναι σχέση ισοδυναμίας στο S.
(β) Βρείτε τις κλάσεις ισοδυναμίας στις οποίες η R διαμερίζει το S.

Κεφάλαιο 5

Κατηγορηματική λογική

5.1 Συντακτικό

Στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε με το δεύτερο λογικό σύστημα που χρησιμοποιείται ευρέως για τη μελέτη επιχειρηματικών μορφών. Στο σύστημα αυτό θα είμαστε σε θέση να ελέγχουμε την εγκυρότητα όχι μόνο επιχειρημάτων όπως αυτά που είδαμε στο πλαίσιο της δηλωτικής λογικής, αλλά και επιχειρημάτων όπως τα ακόλουθα[1].

(5-1)

Όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί.
Ο Σωκράτης είναι άνθρωπος.
___
Ο Σωκράτης είναι θνητός.

(5-2)

Όλες οι γάτες είναι θηλαστικά
Όλοι οι σκύλοι είναι θηλαστικά.
___
Όλες οι γάτες είναι σκύλοι.

Στην *κατηγορηματική λογική ή πρωτοβάθμια λογική*[2], ένας *ατομικός* (*ή στοιχειώδης*) τύπος μπορεί να αποτελείται από ένα *κατηγορηματικό σύμβολο* και ένα πλήθος *όρων*. Π.χ., ο τύπος $H(s)$ περιέχει το σύμβολο H, που αντιπροσωπεύει ένα μονομελές κατηγόρημα (ή ιδιότητα ενός όντος), και το σύμβολο s, που αντιπροσωπεύει ένα όρο (ή όνομα όντος). ενώ ο τύπος $L(j, m)$ περιέχει το σύμβολο L, που αντιπροσωπεύει ένα διμελές κατηγόρημα (ή ιδιότητα διατεταγμένου ζεύγους όντων), και τα σύμβολα j και m, που αντιπροσωπεύουν δύο όρους (ή ονόματα). Ο πρώτος τύπος θα μπορούσε να χρησιμεύσει ως μετάφραση, π.χ., της πρότασης "Ο Σωκράτης είναι άνθρωπος", όπου το ον "Σωκράτης" αντιπροσωπεύεται από το σύμβολο s και το κατηγόρημα "είναι άνθρωπος" αντιπροσωπεύεται από το σύμβολο H, ενώ ο δεύτερος τύπος θα μπορούσε να αποτελεί μετάφραση της πρότασης "Ο Γιάννης αγαπά τη Μαρία", όπου το σύμβολο j αντιπροσωπεύει το ον "Γιάννης", το m το ον "Μαρία" και το L το διμελές κατηγόρημα "ο/η ... αγαπά τον/ην ..." (για ευκολία, αγνοούμε τις παρενθέσεις).

[1] Όπως και στη δηλωτική λογική, χρησιμοποιούμε μια οριζόντια ευθεία γραμμή για να διαχωρίσουμε τις υποθέσεις από το συμπέρασμα.

[2] Οι αντίστοιχοι όροι στα αγγλικά είναι *predicate logic* και *first-order logic*.

Τα κατηγορηματικά σύμβολα κατατάσσονται σε μονομελή, διμελή κτλ., ανάλογα με το πλήθος των όρων που απαιτούν για να σχηματίσουν ένα τύπο. Συνδυάζοντας ένα κατηγόρημα με λάθος πλήθος όρων δίνει μια έκφραση που δεν είναι καλά σχηματισμένη. Π.χ., με το συμβολισμό που αναφέρθηκε παραπάνω, οι εκφράσεις $H(j, m)$, $L(s)$ δεν είναι αποδεκτές ως (καλοσχηματισμένοι) τύποι. Τα κατηγορηματικά σύμβολα θα είναι μεγάλα λατινικά γράμματα, αλλά δεν θα έχουν σαφή ένδειξη του πλήθους όρων που απαιτούν (για το σχηματισμό ενός καλοσχηματισμένου τύπου). Εννοείται ότι δεν υπάρχει όριο στο πλήθος θέσεων ενός κατηγορηματικού συμβόλου, αλλά ο αριθμός αυτός είναι πάντα πεπερασμένος.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι ένα κατηγορηματικό σύμβολο δεν αντιστοιχεί απαραίτητα σ' ένα κατηγόρημα με τη γραμματική έννοια στα ελληνικά. Αν και, όπως είδαμε παραπάνω, το σύμβολο H χρησιμοποιήθηκε για τη μετάφραση του κατηγορήματος "είναι άνθρωπος" και το σύμβολο L για τη μετάφραση της έκφρασης "ο/η ... αγαπά τον/ην ...", τίποτε δεν μας εμποδίζει από τα μεταφράσουμε την πρόταση "Ο Γιάννης αγαπά τη Μαρία" ως $G(m)$, όπου το μονομελές κατηγορηματικό σύμβολο G αντιστοιχεί στην έκφραση "Ο Γιάννης αγαπά τον/ην ...", η οποία δεν είναι γραμματική συνιστώσα της πρότασης "Ο Γιάννης αγαπά τη Μαρία".

Υπάρχουν δύο είδη όρων. Το πρώτο είναι οι *ατομικές σταθερές* (ή, απλά, *σταθερές*), π.χ., τα σύμβολα s, j και m που είδαμε παραπάνω. Όπως δηλώνει η ονομασία, στη σημασιολογία της κατηγορηματικής λογικής, αυτά θα συμβολίζουν συγκεκριμένα άτομα και, στη διαδικασία μετάφρασης προτάσεων της ελληνικής γλώσσας, θα εμφανίζονται ως αντίστοιχα κυρίων ονομάτων, όπως "Γιάννης", "Μαρία", "Σωκράτης". Το δεύτερο είδος όρων είναι οι *ατομικές μεταβλητές* (ή, απλά, *μεταβλητές*), για τις οποίες θα χρησιμοποιούμε μικρά γράμματα του λατινικού αλφαβήτου, όπως v, w, x, y, z, με τόνους ή δείκτες, όταν χρειάζεται. Όταν ένα κατηγορηματικό σύμβολο συνδυαστεί με μια ή περισσότερες μεταβλητές, όπως στους τύπους $H(x), L(m, y)$, το αποτέλεσμα δεν αντιστοιχεί σε μια ελληνική πρόταση, αλλά σε μια έκφραση που καλείται *ανοικτή πρόταση* ή *προτασιακή συνάρτηση*.

Μια ανοικτή πρόταση μπορεί να μετατραπεί σε (κλειστή) πρόταση, αν προτάξουμε ένα κατάλληλο πλήθος ποσοδεικτών, όπως στα παραδείγματα $(\forall x)H(x)$, $(\exists y)L(m, y)$. Ο *καθολικός ποσοδείκτης* συμβολίζεται με $\forall$ και αντιστοιχεί σε ελληνικές εκφράσεις όπως οι "όλοι", "κάθε". Ο *υπαρξιακός ποσοδείκτης* συμβολίζεται με $\exists$ και αντιστοιχεί σε ελληνικές εκφράσεις όπως κάποιος (με την έννοια της έκφρασης "τουλάχιστον ένας, ίσως και περισσότεροι"). Το σύμβολο x που γράφεται δίπλα στον καθολικό ποσοδείκτη στην έκφραση $(\forall x)H(x)$ δηλώνει ποσότητα ως προς αυτή τη μεταβλητή στην έκφραση που ακολουθεί. Αυτός ο χαρακτηρισμός ποσοδεικτών είναι αναγκαίος, διότι μια έκφραση μπορεί γενικά να περιέχει περισσότερες από μια μεταβλητές και περισσότερους από ένα ποσοδείκτες. Π.χ., στην έκφραση $(\forall x)(\exists y)L(x, y)$, στην πρώτη θέση έχουμε καθολική ποσόδειξη, ενώ στη δεύτερη υπαρξιακή ποσόδειξη, ενώ στην έκφραση $(\exists x)(\forall y)L(x, y)$ ισχύει το αντίστροφο.

Υποθέτοντας ότι το σύμβολο H αντιστοιχεί πάλι στην έκφραση "είναι άνθρωπος", θα μπορούσαμε να ερμηνεύσουμε την έκφραση $(\forall x)H(x)$ ως "Κάθε άτομο είναι άνθρωπος". Η έκφραση $(\exists x)H(x)$ θα αντιστοιχούσε στην πρόταση "Κάποιο (τουλάχιστον ένα) άτομο είναι άνθρωπος" ή, σύντομα, "Κάτι είναι άνθρωπος". Αν υποθέσουμε ότι το m αντιστοιχεί στο όνομα "Μαρία" και το L στην έκφραση "αγαπά", τότε η έκφραση $(\exists y)L(m,y)$ θα μπορούσε να αντιστοιχεί στην πρόταση "Υπάρχει τουλάχιστον ένα άτομο που αγαπά η Μαρία" ή, συντομότερα, "Η Μαρία αγαπά κάτι" (ή "Η Μαρία αγαπά κάποιον", αν όλα τα άτομα για τα οποία τυχαίνει να μιλάμε είναι άνθρωποι). Όμοια, η έκφραση $(\forall y)L(m,y)$ θα αντιστοιχούσε στην έκφραση "Η Μαρία αγαπά κάθε άτομο" ή, αν πάλι όλα τα άτομα τυχαίνει να είναι άνθρωποι, στην έκφραση "Η Μαρία αγαπά τον καθένα".

Σημειώνουμε ότι, σε πολλές περιπτώσεις, η επιλογή συγκεκριμένων μεταβλητών δεν παίζει ρόλο. Αντί για την έκφραση $(\forall x)H(x)$, θα μπορούσαμε εξίσου καλά να έχουμε χρησιμοποιήσει την έκφραση $(\forall y)H(y)$ ή την $(\forall z)H(z)$ κτλ. Όμοια, η $(\exists x)L(m,x)$ είναι εξίσου καλή με την $(\exists y)L(m,y)$. Φυσικά, όταν εμπλέκονται περισσότερες από μια μεταβλητές, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε διαφορετικά γράμματα, όπως, π.χ., στην έκφραση $(\forall x)(\exists y)L(x,y)$. Αν γράψουμε $L(x,x)$ και προσθέσουμε ένα υπαρξιακό ποσοδείκτη, θα πάρουμε την έκφραση $(\exists x)L(x,x)$, την οποία θα μπορούσαμε να ερμηνεύσουμε ως "Υπάρχει τουλάχιστον ένα άτομο που αγαπά τον εαυτό του". Εδώ ο ίδιος όρος, δηλαδή, ο x, καταλαμβάνει και τις δύο θέσεις που απαιτούνται από το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο L. Στην έκφραση $(\exists x)(\forall y)L(x,y)$, που αντιστοιχεί στην πρόταση "Υπάρχει τουλάχιστον ένα άτομο που αγαπά κάθε άτομο", οι μεταβλητές x και y μπορεί να παίρνουν τιμές που είναι διαφορετικά άτομα, αλλά μπορεί επίσης να είναι και οι ίδιες. Πράγματι, αυτή η πρόταση θα είναι αληθής μόνον αν υπάρχει τουλάχιστον ένα άτομο που αγαπά κάθε άτομο, συμπεριλαμβάνοντας αυτό το ίδιο. Θα πρέπει, όμως, να θυμόμαστε ότι η επιλογή μεταβλητών είναι επουσιώδης εφ' όσον οι ίδιοι ποσοδείκτες σχετίζονται με τις ίδιες θέσεις σε κατηγορήματα. Π.χ., η έκφραση $(\exists y)(\forall x)L(y,x)$ είναι μια παραλλαγή της $(\exists x)(\forall y)L(x,y)$, ενώ οι εκφράσεις $(\exists y)(\forall x)L(y,x)$ και $(\exists x)(\forall y)L(y,x)$ δεν είναι αλφαβητικές παραλλαγές, διότι οι ποσοδείκτες σχετίζονται με διαφορετικές θέσεις του κατηγορηματικού συμβόλου L.

Αργότερα, θα επιστρέψουμε σε επιπλέον λεπτομέρειες σχετικά με τη χρήση των ποσοδεικτών και μεταβλητών, αλλά τώρα παρατηρούμε ότι προτάσεις, ανοικτές και κλειστές, μπορούν να συνδεθούν με τον τελεστή $\sim$ και τους συνδέσμους &, $\vee$, $\rightarrow$ και $\leftrightarrow$, όπως στα ακόλουθα παραδείγματα:

(5-3) $\sim H(x)$, $((\forall x)H(x) \& L(j,m))$,
$\sim H(s)$, $(\sim H(s) \rightarrow \sim(\forall x)H(x))$.

Η πρώτη από τις εκφράσεις (5-3) αντιπροσωπεύει μια ανοικτή πρόταση, αφού περιέχει μια μη ποσοδειγμένη μεταβλητή, οπότε δεν μπορεί να είναι μετάφραση κάποιας δηλωτικής ελληνικής πρότασης (θα μπορούσαμε, ίσως, να θεωρήσουμε ότι αποτελεί μετάφραση της πρότασης "Αυτός δεν είναι άνθρωπος", όπου δεν είναι καθορισμένο σε τι αναφέρεται η λέξη "Αυτός").

Μια ανοικτή πρόταση, ακόμη και σύνθετη εσωτερικά, μπορεί πάντα να δεχθεί ποσοδείκτες ως πρόθεμα, με τρόπο που, αν θέλουμε, να μπορούμε να μετατρέψουμε την έκφραση $\sim H(x)$ στην $(\forall x) \sim H(x)$ ή στην $(\exists x) \sim H(x)$, που αντιπροσωπεύουν, αντίστοιχα, τις προτάσεις "Κάθε άτομο δεν είναι άνθρωπος" – (η σημασία εδώ υποτίθεται ότι είναι ότι κάθε άτομο δεν ικανοποιεί την ιδιότητα ότι είναι άνθρωπος) και "Τουλάχιστον ένα άτομο δεν είναι άνθρωπος" .

Τώρα που έχουμε περιγράψει το συντακτικό της συμβολικής γλώσσας της κατηγορηματικής λογικής, με επεξηγήσεις και παραδείγματα, προχωρούμε σε μια ακριβή διατύπωση των διαθέσιμων συμβόλων και των συντακτικών κανόνων. Τα σύμβολά της περιέχονται στις ακόλουθες κατηγορίες:

(5-4) (1) ατομικές σταθερές: $j, m, \ldots$
(2) ατομικές μεταβλητές: $x, y, z, \ldots$
(3) κατηγορηματικά σύμβολα: $P, Q, R, \ldots$ (καθένα με συγκεκριμένο πεπερασμένο πλήθος θέσεων)
(4) ο τελεστής $\sim$ και οι σύνδεσμοι $\&, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
(5) ποσοδείκτες: $\forall, \exists$
(6) παρενθέσεις: (,) (και αγκύλες [,]).

Όπως έγινε και στο πλαίσιο της δηλωτικής λογικής, χρησιμοποιώντας τα παραπάνω σύμβολα και κάποιους συντακτικούς κανόνες, μπορούμε να κατασκευάσουμε συμβολικές εκφράσεις που καλούμε *τύπους* και αντιστοιχούν σε (δηλωτικές) προτάσεις, τόσο ανοικτές όσο και κλειστές, της ελληνικής γλώσσας.

Ορισμός.

(1) Αν P είναι ένα n-μελές κατηγορηματικό σύμβολο και $t_1, ..., t_n$ είναι όροι, τότε η έκφραση $P(t_1, ..., t_n)$ είναι τύπος.

(2) Αν φ και ψ είναι τύποι, τότε οι εκφράσεις $\sim\varphi$, $(\varphi\&\psi)$, $(\varphi\vee\psi)$, $(\varphi\rightarrow\psi)$, $(\varphi\leftrightarrow\psi)$ είναι τύποι.

(3) Αν φ είναι τύπος και x μια ατομική μεταβλητή, τότε οι εκφράσεις $(\forall x)\varphi$ και $(\exists x)\varphi$ είναι τύποι.

(4) Τύποι (της γλώσσας της κατηγορηματικής λογικής) είναι οι εκφράσεις που μπορούν να παραχθούν μόνο από πεπερασμένο πλήθος εφαρμογών των κανόνων (1)-(3).

Ο πρώτος κανόνας παράγει ατομικούς τύπους (που δεν περιέχουν καθόλου συνδέσμους ή ποσοδείκτες), όπως είναι οι τύποι $R(x, y), P(c), K(m, x), S(x, z, m)$. Σημειώνουμε ότι οι σύνδεσμοι μπορεί να συνδυάζουν τύπους με ή χωρίς ποσοδείκτες και ότι οποιοσδήποτε ποσοδείκτης μαζί με μεταβλητή, μπορεί να τεθεί μπροστά σ' ένα τύπο, ακόμα κι όταν αυτή η μεταβλητή δεν εμφανίζεται στον τύπο (π.χ., ο $(\forall x)P(y)$ είναι καλά σχηματισμένος).

Αν x είναι οποιαδήποτε μεταβλητή και φ είναι οποιοσδήποτε τύπος στον οποίο έχει προστεθεί ένας ποσοδείκτης, με βάση τον κανόνα (3) παραπάνω, για να προκύψει ο τύπος $(\forall x)\varphi$ ή ο τύπος $(\exists x)\varphi$, τότε λέμε ότι ο φ είναι το *πεδίο (εφαρμογής)* του αντίστοιχου ποσοδείκτη και ότι ο φ ή οποιοδήποτε μέρος του *βρίσκεται στο πεδίο* αυτού του ποσοδείκτη. Μερικά παραδείγματα δίνονται παρακάτω, όπου υπογραμμίζεται το πεδίο κάθε ποσοδείκτη.

(5-5) (α) $(\exists x)\underline{P(x)}$
(β) $(\exists y)\underline{R(x,y)}\&P(y)$
(γ) $(\exists y)\underline{(R(x,y)\&P(y))}$
(δ) $(\exists x)\underline{(P(m)\&R(j,y))}$
(ε) $(\exists x)\underline{(\forall y)(R(x,y)\rightarrow K(x,x))}$
(στ) $(\forall y)\underline{(R(x,y)\rightarrow K(x,x))}$.

Σημειώνουμε ότι στο (β) η έκφραση $(\exists y)$ είναι προσκολλημένη στον τύπο $R(x,y)$, που είναι συνεπώς το πεδίο του υπαρξιακού ποσοδείκτη, και το αποτέλεσμα είναι συνενωμένο με τον τύπο $P(y)$, που είναι εκτός του πεδίου της $(\exists y)$. Στο (γ), από την άλλη πλευρά, ο υπαρξιακός ποσοδείκτης είναι προσκολλημένος στον τύπο $(R(x,y)\&P(y))$, που έτσι γίνεται το πεδίο του. Σημειώνουμε επίσης ότι ένας ποσοδείκτης έχει τον τύπο που ακολουθεί ως το πεδίο του, ακόμη κι αν είναι κενός, όπως στο παράδειγμα (δ). Τέλος, σημειώνουμε ότι στο (ε) έχουμε περίπτωση διπλού ποσοδείκτη, οπότε το πεδίο του ενός ποσοδείκτη περιέχεται στο πεδίο του άλλου.

Η έννοια του πεδίου ποσοδείκτη είναι κρίσιμη στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός. Για οποιαδήποτε μεταβλητή x και οποιονδήποτε τύπο φ, λέμε ότι *μια εμφάνιση της x στον φ είναι δεσμευμένη*, αν αυτή η εμφάνιση βρίσκεται στο πεδίο ενός ποσοδείκτη της μορφής $(\exists x)$ ή $(\forall x)$ (που υπάρχει μέσα στον τύπο). Λέμε ότι η *x εμφανίζεται ελεύθερη στον φ*, αν αυτή δεν βρίσκεται στο πεδίο κανενός ποσοδείκτη της μορφής $(\exists x)$ ή $(\forall x)$ (που υπάρχει μέσα στον τύπο). Τέλος, λέμε ότι *η x είναι ελεύθερη στον φ*, αν υπάρχει τουλάχιστον μια ελεύθερη εμφάνισή της μέσα στον φ, αλλιώς λέμε ότι *η x είναι δεσμευμένη στον φ*.

Η δέσμευση είναι μια σχέση μεταξύ ενός ποσοδείκτη και μιας εμφάνισης μεταβλητής. Π.χ., στον τύπο $P(x)$ η x εμφανίζεται ελεύθερη, αλλά στον τύπο $(\exists x)P(x)$ εμφανίζεται δεσμευμένη. Στο παράδειγμα (β) παραπάνω, η πρώτη εμφάνιση της y είναι δεσμευμένη, ενώ η δεύτερη είναι ελεύθερη. Στο παράδειγμα (γ) παραπάνω, και οι δύο εμφανίσεις της y είναι δεσμευμένες. Και στα παραδείγματα (β) και στο (γ) η εμφάνιση της x είναι ελεύθερη, αφού δεν βρίσκεται στο πεδίο ενός ποσοδείκτη που σχετίζεται με τη μεταβλητή αυτή. Όμοια, η (μοναδική) εμφάνιση της y στο παράδειγμα (δ) παραπάνω είναι ελεύθερη, διότι ο μόνος ποσοδείκτης που υπάρχει είναι ο $(\exists x)$. Σημειώνουμε ότι οι ατομικές σταθερές, π.χ. οι σταθερές m και j στο (δ), δεν θεωρούνται δεσμευμένες ή ελεύθερες, αφού η δέσμευση εφαρμόζεται μόνο σε μεταβλητές. Σημειώνουμε επίσης ότι μια μεταβλητή μπορεί ταυτόχρονα να εμφανίζεται ελεύθερη και δεσμευμένη σε ένα τύπο, όπως, π.χ., η μεταβλητή y στον τύπο του παραδείγματος (β) παραπάνω.

Οποιαδήποτε εμφάνιση μιας μεταβλητής σ' ένα τύπο είναι δεσμευμένη ή ελεύθερη, δεν υπάρχει ενδιάμεση κατάσταση. Μια μεταβλητή, όμως, μπορεί να δεσμευθεί μόνο μια φορά. Π.χ., δεσμεύεται η εμφάνιση της μεταβλητής x στον υποτύπο $M(x)$ του τύπου $(\forall x)(P(x)\rightarrow(\exists x)M(x))$ και από τον ποσοδείκτη $(\exists x)$ και από τον $(\forall x)$; Όχι, δεσμεύεται μόνο από τον $(\exists x)$, ενώ η εμφάνιση της μεταβλητής x στον υποτύπο $P(x)$ δεσμεύεται από τον $(\forall x)$. Ο τύπος θα ήταν γραμμένος πιο απλά, αν είχαμε επιλέξει διαφορετικές μεταβλητές, αν, π.χ., γραφόταν στη μορφή $(\forall x)(P(x)\to(\exists y)M(y))$, που είναι τύπος λογικά ισοδύναμος με τον αρχικό. Γενικά, είναι καλή πρακτική, όταν γράφουμε τύπους, ν' αποφεύγουμε τη χρήση της ίδιας μεταβλητής, ακόμα και σε περιπτώσεις όπως αυτή που μόλις είδαμε, όπου ο ποσοδείκτης που παρεμβάλλεται εξασφαλίζει τη διαφορετικότητα των δύο εμφανίσεων της ίδιας μεταβλητής. Το θέμα σχετίζεται με το ζήτημα των λεγόμενων *αλφαβητικών παραλλαγών*.

Πρόταση ή *κλειστός τύπος* της κατηγορηματικής λογικής είναι ένας τύπος που δεν περιέχει καμία ελεύθερη εμφάνιση μεταβλητής. Με άλλα λόγια, κάθε εμφάνιση μεταβλητής σε μια πρόταση είναι δεσμευμένη από κάποιον ποσοδείκτη στον τύπο. Ένας τύπος με τουλάχιστον μια ελεύθερη εμφάνιση μεταβλητής καλείται, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, *ανοικτός τύπος* ή *προτασιακή συνάρτηση*.

5.2 Σημασιολογία

Όπως και στη δηλωτική λογική, μια πρόταση της κατηγορηματικής λογικής παίρνει μια από τις τιμές αλήθειας 1 (αληθής) και 0 (ψευδής). Αν η πρόταση αποτελείται από κατηγορηματικά σύμβολα και όρους, ίσως και ποσοδείκτες, τότε η τιμή αλήθειάς της καθορίζεται από τις *σημασιολογικές τιμές* των συνιστωσών της. Π.χ., η πρόταση $H(s)$, που αποτελείται από το μονομελές κατηγορηματικό σύμβολο H και την ατομική σταθερά s, παίρνει την τιμή αλήθειάς της με τον ακόλουθο τρόπο: η s έχει ως σημασιολογική τιμή της κάποιο άτομο επιλεγμένο από ένα σύνολο ατόμων D, που υποτίθεται ότι έχει οριστεί εκ των προτέρων (το D είναι όπως το σύμπαν ή πεδίο συζήτησης που είχαμε στη θεωρία συνόλων). Ας υποθέσουμε, π.χ., ότι το D είναι το σύνολο όλων των ανθρώπων, ζωντανών ή νεκρών, και το άτομο που αντιστοιχεί στην s είναι ο Σωκράτης. Το κατηγορηματικό σύμβολο H έχει ως σημασιολογική του τιμή κάποιο υποσύνολο του D – θα μπορούσε, ας πούμε, η τιμή αυτή να είναι το σύνολο {Σωκράτης, Αριστοτέλης, Πλάτων, Μότσαρτ, Μπετόβεν}, οπότε η πρόταση $H(s)$ θα έπαιρνε την τιμή 1, με βάση το γεγονός ότι το άτομο που αντιστοιχεί στην s είναι μέλος του συνόλου που αντιστοιχεί στο σύμβολο H. Από την άλλη πλευρά, αν το σύμβολο H είχε ως τιμή το σύνολο {Μάλερ, Προυστ, Μιχαήλ-Άγγελος}, η $H(s)$ θα έπαιρνε τιμή 0, αφού ο Σωκράτης δεν θα ήταν στοιχείο αυτού του συνόλου.

Θα χρησιμοποιούμε τις αγκύλες [ ] για να δηλώσουμε τη σημασιολογική τιμή κάποιου συμβόλου ή την τιμή αλήθειας κάποιας πρότασης στην κατηγορηματική λογική. Έτσι, στο προηγούμενο παράδειγμα, έχουμε $[s]$=Σωκράτης, $[H]$={Σωκράτης, Αριστοτέλης, Πλάτων, Μότσαρτ, Μπετόβεν} και $[H(s)]$=1.

Ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο L έχει ως σημασιολογική τιμή ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών από στοιχεία του D, δηλαδή, ένα υποσύνολο του $D\times D$. Μια πρόταση όπως η $L(j,m)$ είναι αληθής μόνο στον περίπτωση που το διατεταγμένο ζεύγος $\langle x,y\rangle$ είναι στοιχείο αυτού του συνόλου, όπου x είναι η σημασιολογική τιμή της ατομικής σταθεράς j και y η σημασιολογική τιμή της σταθεράς m. Π.χ., αν η $[j]$ είναι ο Ιωάννης Καποδίστριας και $[m]$ είναι η Βασίλισσα Μαίρη της Σκωτίας, τότε η πρόταση $L(j,m)$ είναι αληθής, αν το ζεύγος $\langle$Ιωάννης Καποδίστριας, Μαίρη της Σκωτίας$\rangle$ ανήκει στο σύνολο που αποτελεί τη σημασιολογική τιμή του συμβόλου L, αλλιώς είναι ψευδής. Με γενικό συμβολισμό, για κάθε διμελές κατηγορηματικό σύμβολο K και όρους a και b,

$$[K(a,b)]{=}1 \text{ ανν } \langle [a],[b]\rangle{\in}[K].$$

Προφανώς η τιμή αλήθειας οποιασδήποτε πρότασης στην κατηγορηματική λογική θα εξαρτηθεί από (α) το πεδίο συζήτησης και (β) την επιλογή σημασιολογικών τιμών για τις ατομικές σταθερές και τα κατηγορηματικά σύμβολα. Όταν αυτά είναι πλήρως καθορισμένα, λέμε ότι έχουμε ένα *μοντέλο* για την κατηγορηματική λογική. Ειδικότερα, ένα μοντέλο αποτελείται από ένα μη κενό σύνολο D και μια αντιστοίχιση σημασιολογικών τιμών στις ατομικές σταθερές και στα κατηγορηματικά σύμβολα ως εξής:

- σε κάθε ατομική σταθερά αντιστοιχεί ένα στοιχείο του D
- σε κάθε μονομελές κατηγ. σύμβολο αντιστοιχεί ένα υποσύνολο του D
- σε κάθε διμελές κατηγ. σύμβολο αντιστοιχεί ένα υποσύνολο του $D{\times}D$
- για κάθε $n{\geq}3$, σε κάθε n-μελές κατηγ. σύμβολο αντιστοιχεί ένα υποσύνολο του $D{\times}...{\times}D$ (n φορές)

Έτσι, μια πρόταση στην κατηγορηματική λογική, όπως η $H(s)$ ή η $L(j,m)$, δεν είναι απλά αληθής ή ψευδής, αλλά αληθής ή ψευδής **σε σχέση με ένα συγκεκριμένο μοντέλο** M. Αν θέλουμε να τονίσουμε αυτό το γεγονός στο συμβολισμό μας, μπορούμε να προσθέσουμε το όνομα του μοντέλου ως πάνω (ή κάτω) δείκτη, γράφοντας $[H(s)]^M{=}1$, $[s]^M{=}$ Σωκράτης κτλ. Ορισμένες προτάσεις θα είναι αληθείς ή ψευδείς άσχετα με το επιλεγμένο μοντέλο και θα αποτελούν τις ταυτολογίες ή αντιφάσεις, αντίστοιχα, της κατηγορηματικής λογικής. Επειδή οι σύνδεσμοι $\&, \vee$ κτλ. έχουν τους ίδιους πίνακες αλήθειας όπως στην προτασιακή λογική, έπεται αμέσως ότι μια έκφραση όπως η $H(s){\vee}{\sim}H(s)$ είναι ταυτολογία και η $H(s)\&{\sim}H(s)$ είναι αντίφαση. Με άλλα λόγια, οποιοδήποτε κι αν είναι το μοντέλο, οι προτάσεις $H(s)$ και ${\sim}H(s)$ θα έχουν αντίθετες τιμές αλήθειας, οπότε η πρόταση $H(s){\vee}{\sim}H(s)$ θα είναι πάντα αληθής κτλ. Μια πρόταση όπως η $H(s)$ ή η $L(j,m)$, της οποίας η τιμή αλήθειας αλλάζει από μοντέλο σε μοντέλο, είναι ενδεχόμενη. Σε λίγο θα δούμε παραδείγματα προτάσεων στην κατηγορηματική λογική που δεν θα είναι τόσο προφανή ανάλογα ταυτολογιών και αντιφάσεων της προτασιακής λογικής.

Η σημασιολογία ποσοδειγμένων εκφράσεων είναι κάπως πιο πολύπλοκη από αυτή των προτάσεων που αποτελούνται μόνο από κατηγορηματικά σύμβολα και όρους. Στη συνέχεια, θα σκιαγραφήσουμε τις βασικές ιδέες.

Ένας τύπος στον οποίο όλες οι εμφανίσεις μεταβλητών είναι δεσμευμένες, όπως ο $(\forall x)H(x)$ ή ο $(\exists y)L(m,y)$, αποτελεί μια πρόταση και, κατά συνέπεια, θάπρεπε να είναι αληθής ή ψευδής σε σχέση με τυχόν δοθέν μοντέλο. Τέτοιες προτάσεις, όμως, συγκροτούνται συντακτικά από ένα ποσοδείκτη (μαζί με μια μεταβλητή) και μια ανοικτή πρόταση, όπως την $H(x)$ ή την $L(m, y)$, που δεν έχει, μιλώντας αυστηρά, τιμή αλήθειας. Εκτιμώντας ποσοδειγμένες εκφράσεις επιτρέπουμε σ' αυτές τις προτασιακές συναρτήσεις να παίρνουν προσωρινά τιμή αλήθειας, επιτρέποντας στην ποσοδειγμένη μεταβλητή να πάρει για τιμή οποιοδήποτε στοιχείο του πεδίου D, ένα προς ένα, και καθορίζοντας την τιμή αλήθειας που θα είχε η προτασιακή συνάρτηση για καθένα από αυτά τα στοιχεία. Π.χ., για να προσδιορίσουμε την τιμή αλήθειας του τύπου $(\forall x)H(x)$ αφήνουμε τη μεταβλητή x να κυμανθεί στο D και, για κάθε τέτοια αντιστοίχιση μιας τιμής στην x, προσδιορίζουμε την τιμή αλήθειας που θα είχε ο τύπος $H(x)$: αληθής, αν η τιμή $[x]$ ανήκει στο σύνολο $[H]$ (που είναι υποσύνολο του πεδίου), ή ψευδής, αλλιώς. Έτσι, η πρόταση $(\forall x)H(x)$ είναι αληθής ανν η $[x]$ ανήκει στο σύνολο $[H]$ για κάθε στοιχείο στο D. Αν για κάποιο στοιχείο x ισχύει $[x]\notin[H]$, τότε η $(\forall x)H(x)$ είναι ψευδής. Για να το θέσουμε αλλιώς, η $(\forall x)H(x)$ είναι αληθής (σε ένα συγκεκριμένο μοντέλο) ανν η $H(x)$ είναι αληθής καθώς η x παίρνει ως διαδοχικές τιμές όλα τα στοιχεία του D. Αντίστοιχα, η $(\exists x)H(x)$ είναι αληθής ανν η $H(x)$ είναι αληθής για τουλάχιστον ένα στοιχείο του D, όταν η x παίρνει αυτή την τιμή.

Ας θεωρήσουμε ένα μικρό μοντέλο, που είναι μερικό, με την έννοια ότι τα κατηγορηματικά σύμβολα και οι όροι που δεν φαίνονται έχουν σημασιολογικές τιμές στο μοντέλο, οι οποίες, για απλότητα, δεν αναφέρονται.

(5-6) D={Σωκράτης, Αριστοτέλης, Πλάτων, Μότσαρτ, Μπετόβεν, Τολστόϊ}
$[s]$= Σωκράτης, $[a]$= Αριστοτέλης, $[p]$= Πλάτων
$[m]$= Μότσαρτ, $[b]$= Μπετόβεν, $[t]$= Τολστόϊ
$[H]$={Σωκράτης, Αριστοτέλης, Πλάτων}, $[M]=D$
$[L]$={⟨Σωκράτης, Σωκράτης⟩, ⟨Σωκράτης, Αριστοτέλης⟩, ⟨Μότσαρτ, Μπετόβεν⟩, ⟨Μπετόβεν, Μότσαρτ⟩, ⟨Τολστόϊ, Πλάτων⟩, ⟨Πλάτων, Μότσαρτ⟩, ⟨Αριστοτέλης, Τολστόϊ⟩}.

Μοορούμε τώρα να επαληθεύσουμε ότι οι ακόλουθες προτάσεις, μεταξύ άλλων, είναι αληθείς στο μοντέλο αυτό:

$$H(s), H(a), H(p), M(s), M(b), L(s, s), L(t, p),$$

ενώ οι ακόλουθες είναι ψευδείς:

$$H(m), H(b), H(t), L(a, s), L(m, m).$$

Η πρόταση $(\forall x)M(x)$ είναι αληθής σ' αυτό το μοντέλο, αφού ο τύπος $M(x)$ είναι αληθής όταν η μεταβλητή x παίρνει ως τιμή της καθένα από τα στοιχεία του D, δηλαδή, οι προτάσεις $M(s), M(a), M(p), M(m), M(b)$ και $M(t)$ είναι όλες αληθείς. Η πρόταση $(\exists x)H(x)$ είναι αληθής, αφού η $H(x)$ είναι αληθής για τουλάχιστον μια τιμή της x – στην πραγματικότητα, είναι αληθής όταν η $[x]$ είναι Σωκράτης ή Αριστοτέλης ή Πλάτων. Όμοια, είναι εύκολο να δούμε ότι, επειδή η $(\forall x)M(x)$ είναι αληθής (και το πεδίο συζήτησης δεν είναι κενό), η $(\exists x)M(x)$ είναι επίσης αληθής.

Η πρόταση $(\exists y)L(m, y)$ είναι αληθής, διότι υπάρχει τουλάχιστον μια τιμή της y (ακριβώς μια στην πραγματικότητα, η τιμή "Μπετόβεν") τέτοια που το διατεταγμένο ζεύγος $\langle$Μότσαρτ, $[y]\rangle$ είναι στο σύνολο που αντιστοιχεί στο σύμβολο L, δηλαδή, το $[L]$. Όμως, η $(\forall y)L(m, y)$ είναι ψευδής, αφού το $\langle$Μότσαρτ, $[y]\rangle$ δεν είναι στο $[L]$ για κάθε τιμή της y (π.χ., το $\langle$Μότσαρτ, Σωκράτης$\rangle$ λείπει).

Έχοντας τις τιμές αλήθειας των προτάσεων που ήδη αναφέραμε, μπορούμε να προσδιορίσουμε τις τιμές αλήθειας σύνθετων προτάσεων, όπως οι ακόλουθες:

$$(H(s)\&H(m)),\ ((\forall x)M(x)\vee H(a))\ \text{και}\ (H(p)\rightarrow(\exists y)L(m, y)),$$

με το συνήθη τρόπο, σύμφωνα με τους πίνακες αλήθειας για τους συνδέσμους. Οι προτάσεις αυτές είναι, αντίστοιχα, ψευδής, αληθής και αληθής στο συγκεκριμένο μοντέλο.

Η εκτίμηση μιας έκφρασης, όπως η $(\exists x)(H(x)\&M(x))$, στην οποία ο σύνδεσμος βρίσκεται μέσα στο πεδίο του ποσοδείκτη, δεν είναι τόσο απλή. Με βάση τον κανόνα εκτίμησης υπαρξιακά ποσοδειγμένων εκφράσεων, πρέπει να εξακριβώσουμε αν υπάρχει κάποια τιμή της x στο D που κάνει τη σύνθετη προτασιακή συνάρτηση $H(x)\&M(x)$ αληθή. Εδώ πρέπει να δοκιμάσουμε κάθε στοιχείο του D ως τιμή της x και να εξακριβώσουμε αν και η $H(x)$ και η $M(x)$ είναι αληθείς για την τιμή αυτή. Αν βρεθεί τουλάχιστον μια τέτοια τιμή, τότε η πρόταση $(\exists x)(H(x)\&M(x))$ είναι αληθής, αλλιώς είναι ψευδής. Στο δοθέν μοντέλο, αυτός ο τύπος είναι αληθής, αφού υπάρχουν τρία άτομα – Σωκράτης, Αριστοτέλης και Πλάτων – που ανήκουν και στο $[H]$ και στο $[M]$. Από την άλλη πλευρά, η πρόταση $(\forall x)(H(x)\&M(x))$ είναι ψευδής, αφού δεν ανήκει κάθε άτομο στο $[H]$ και στο $[M]$. Βλέπουμε, όμως, ότι η $(\forall x)(H(x)\rightarrow M(x))$ είναι αληθής σ' αυτό το μοντέλο. Δεν υπάρχει άτομο που, όταν το αντιστοιχίσουμε στην x, κάνει τη συνεπαγωγή ψευδή, δηλαδή, δεν υπάρχει άτομο που είναι στο $[H]$ αλλά όχι στο $[M]$.

Εκφράσεις που περιέχουν ποσοδείκτες μέσα στο πεδίο άλλων ποσοδεικτών προσθέτουν ένα επιπλέον βαθμό πολυπλοκότητας στην εκτίμηση. Εφαρμόζονται οι ίδιοι κανόνες, αλλά η έκφραση εκτιμάται, ας πούμε, από έξω προς τα μέσα. Π.χ., η πρόταση $(\forall x)(\exists y)L(x, y)$ θα είναι αληθής μόνο στην περίπτωση που για κάθε δυνατή τιμή της x στο D η έκφραση $(\exists y)L(x, y)$ είναι αληθής. Πότε είναι αυτό αληθές; Αν υπάρχει τουλάχιστον μια τιμή της y για την οποία η $L(x, y)$ είναι αληθής, όπου η x έχει την τιμή που καθορίστηκε στο προηγούμενο βήμα. Δηλαδή, επιτρέπουμε στην x να κυμαίνεται στο D και για κάθε τιμή προσδιορίζουμε την τιμή αλήθειας της $(\exists y)L(x, y)$, επιτρέποντας στην y να μεταβάλλεται στο D. Η $(\exists y)L(x, y)$ μπορεί να είναι αληθής για κάποιες τιμές της x και ψευδής για άλλες, αλλά ολόκληρη η έκφραση $(\forall x)(\exists y)L(x, y)$ είναι αληθής μόνο αν η $(\exists y)L(x, y)$ είναι αληθής για κάθε τιμή της x.

Στο επιλεγμένο μοντέλο, η $(\forall x)(\exists y)L(x, y)$ τυχαίνει να είναι αληθής. Για να το δούμε αυτό, έστω ότι η τιμή της x είναι Σωκράτης. Τότε η $(\exists y)L(x, y)$ είναι αληθής, όταν η τιμή της y είναι Σωκράτης ή Αριστοτέλης. Αν η τιμή της x είναι Αριστοτέλης, τότε η $(\exists y)L(x, y)$ είναι αληθής όταν η τιμή της y είναι Τολστόι κτλ. Βλέπουμε τελικά ότι, για κάθε τιμή της x, μπορούμε να βρούμε κάποια τιμή της y που κάνει την $L(x, y)$ αληθή. Ή, αν το θέσουμε αλλιώς, κάθε στοιχείο του D

εμφανίζεται τουλάχιστον μια φορά ως πρώτο μέλος στο σύνολο των διατεταγμένων ζευγών που αντιστοιχεί στο σύμβολο L. Έτσι, η $(\forall x)(\exists y)L(x,y)$ είναι αληθής σ' αυτό το μοντέλο.

Από την άλλη πλευρά, η $(\exists y)(\forall x)L(x,y)$ είναι ψευδής σ' αυτό το μοντέλο. Για να είναι ο τύπος αυτός αληθής, θα έπρεπε να βρούμε τουλάχιστον μια τιμή της y για την οποία η $(\forall x)L(x,y)$ είναι αληθής, δηλαδή, κάποιο άτομο που εμφανίζεται ως δεύτερο μέλος, με τυχόν στοιχείο του D ως πρώτο μέλος, στο σύνολο των διατεταγμένων ζευγών που αντιστοιχεί στο L. Είναι εύκολο να δούμε ότι δεν υπάρχει τέτοιο άτομο.

Τα τελευταία δύο παραδείγματα δείχνουν ότι η σειρά εμφάνισης των ποσοδεικτών σε μια έκφραση, όταν ο ένας είναι καθολικός και ο άλλος υπαρξιακός, μπορεί να έχει σημασιολογική σπουδαιότητα. Δηλαδή, μπορεί γενικά να υπάρχουν μοντέλα, όπως εδώ, στα οποία μια πρόταση είναι αληθής, ενώ η άλλη, με την σειρά των ποσοδεικτών αντεστραμμένη, είναι ψευδής. Αυτό είναι προφανές, αν επιλέξουμε ένα λιγότερο τεχνητό μοντέλο. Έστω D το σύνολο όλων των ζωντανών ανθρώπων και $L=\{\langle x,y\rangle |$ ο x αγαπά τον $y\}$. Τότε η πρόταση $(\forall x)(\exists y)L(x,y)$ είναι αληθής αν, για κάθε άτομο υπάρχει τουλάχιστον ένα άτομο (πιθανώς ο εαυτός του) το οποίο το πρώτο άτομο αγαπά, αλλά η $(\exists y)(\forall x)L(x,y)$ θα είναι αληθής μόνο αν υπάρχει τουλάχιστον ένα άτομο που αγαπιέται καθολικά, δηλαδή, από όλους. Είναι εύκολο να φανταστούμε ότι το πρώτο μπορεί να είναι αληθές, ενώ το δεύτερο είναι ψευδές.

Μπορούμε τώρα να δούμε πώς να μεταφράζουμε ορισμένους τύπους ελληνικών δηλώσεων στην κατηγορηματική λογική. Για την πρόταση "Όλες οι γάτες είναι θηλαστικά", π.χ., θα χρειαστούμε μονομελή κατηγορηματικά σύμβολα, ας πούμε τα C και M, που αντιστοιχούν στις εκφράσεις "είναι γάτα" και "είναι θηλαστικό". Μπορούμε τότε να αναπαραστήσουμε την ελληνική δήλωση με την πρόταση της κατηγορηματικής λογικής $(\forall x)(C(x)\rightarrow M(x))$, την οποία μπορούμε να ερμηνεύσουμε χονδρικά ως εξής: για κάθε άτομο στο σύμπαν συζήτησης, αν αυτό είναι γάτα, τότε αυτό είναι επίσης θηλαστικό, ή, συντομότερα, ο,τιδήποτε είναι γάτα είναι θηλαστικό. Σημειώνουμε ότι η πρόταση αυτή είναι αληθής, στην περίπτωση που δεν υπάρχουν γάτες στο σύμπαν συζήτησης, γιατί τότε η ανοικτή πρόταση $C(x)$ θα είναι ψευδής για όλες τις τιμές της x και, συνεπώς, η συνεπαγωγή θα είναι πάντα αληθής. Με το ίδιο πνεύμα, η δήλωση "Καμιά γάτα δεν είναι θηλαστικό" αντιστοιχεί στην πρόταση $(\forall x)(C(x)\rightarrow \sim M(x))$: ο,τιδήποτε είναι γάτα δεν είναι θηλαστικό. Αυτό πάλι αληθεύει, αν το σύμπαν συζήτησης δεν περιέχει καθόλου γάτες, σε αντίθεση με την ελληνική δήλωση, που θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ως ακατάλληλη ή ανόητη σε μια τέτοια περίπτωση.

Η δήλωση "Μερικές γάτες είναι θηλαστικά" θα μπορούσε να συμβολιστεί ως $(\exists x)(C(x)\&M(x))$, που είναι αληθής ανν υπάρχει τουλάχιστον ένα άτομο στο πεδίο συζήτησης που είναι και γάτα και θηλαστικό. Σ' αυτή την περίπτωση, η απουσία γάτων από το σύμπαν συζήτησης κάνει τη δήλωση ψευδή. Σημειώνουμε ότι η πρόταση $(\exists x)(C(x)\rightarrow M(x))$ δεν είναι ορθή, ως μετάφραση της ελληνικής δήλωσης που προαναφέραμε. Αυτή η πρόταση είναι αληθής, όταν δεν υπάρχουν καθόλου γάτες (η ηγούμενη είναι ψευδής) ή όταν υπάρχει τουλάχιστον ένα θηλαστικό (η επόμενη είναι αληθής). Αν και είμαστε διατεθειμένοι να δεχθούμε κάποιο βαθμό διαφοράς μεταξύ ελληνικών δηλώσεων και μεταφράσεών τους στην κατηγορηματική λογική, δεν θα θέλαμε να πούμε ότι η δήλωση "Μερικές γάτες είναι θηλαστικά" έχει την ίδια μετάφραση με τη δήλωση "Δεν υπάρχουν γάτες ή υπάρχει τουλάχιστον ένα θηλαστικό".

Η αρνητική υπαρξιακή δήλωση "Μερικές γάτες δεν είναι θηλαστικά" θα μπορούσε να συμβολιστεί ως $(\exists x)(C(x)\& \sim M(x))$, που είναι ψευδής, όταν το σύμπαν συζήτησης δεν περιέχει καθόλου γάτες.

5.3 Νόμοι ποσοδεικτών και prenex κανονική μορφή

Υπάρχουν κάποιες σημαντικές λογικές ισοδυναμίες, οι οποίες βασίζονται στη συνολοθεωρητική σημασιολογία της κατηγορηματικής λογικής και τις οποίες μπορούμε να θεωρούμε ως νόμους της λογικής κατηγορημάτων. Αυτοί θα είναι πολύ χρήσιμοι για την κατασκευή αποδείξεων και επίσης για την αναγνώριση τύπων που είναι λογικά ισοδύναμοι με μεταφράσεις ελληνικών προτάσεων, αλλά δεν μοιάζουν μ' αυτές δομικά. Σε ό,τι ακολουθεί, γράφουμε $\varphi(x), \psi(x)$ κτλ., για κάθε τύπο που περιέχει τουλάχιστον μια ελεύθερη εμφάνιση της μεταβλητής x. Π.χ., για τους τύπους $H(x), L(x,x), (\exists y)L(x,y), (\exists y)(H(x)\rightarrow L(x,y))$ κτλ., και όμοια θα γράφουμε $\varphi(y), \psi(y)$ κτλ.

Μια πρόταση της μορφής $(\exists x){\sim}\varphi(x)$ εκφράζει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα άτομο που κάνει την ${\sim}\varphi(x)$ αληθή ή την $\varphi(x)$ ψευδή. Έτσι, η $(\forall x)\varphi(x)$ δεν θα μπορούσε να ήταν αληθής, διότι ο καθολικός ποσοδείκτης θα απαιτούσε όλες οι περιπτώσεις της $\varphi(x)$ να είναι αληθείς. Συνεπώς η ${\sim}(\forall x)\varphi(x)$ είναι αληθής.

Αυτό το σκεπτικό μπορεί να εφαρμοστεί επίσης αντίστροφα και το αποτέλεσμα είναι ο πρώτος νόμος ποσοδεικτών:

Νόμος 1 (Νόμος άρνησης ποσοδείκτη). ${\sim}(\forall x)\varphi(x) \Leftrightarrow (\exists x){\sim}\varphi(x)$.

Ένα αντίστοιχο ζεύγος ισοδύναμων ελληνικών δηλώσεων θα ήταν "Δεν πέρασαν όλοι στην εξέταση Λογικής" και "Κάποιος δεν πέρασε στην εξέταση Λογικής".

Αν θυμηθούμε το νόμο διπλής άρνησης (της προτασιακής λογικής), θα δούμε ότι ο νόμος άρνησης ποσοδείκτη θα μπορούσε να γραφεί και ως εξής:

Νόμος $1'$. $(\forall x)\varphi(x) \Leftrightarrow {\sim}(\exists x){\sim}\varphi(x)$
Νόμος $1''$. ${\sim}(\forall x){\sim}\varphi(x) \Leftrightarrow (\exists x)\varphi(x)$
Νόμος $1'''$. $(\forall x){\sim}\varphi(x) \Leftrightarrow {\sim}(\exists x)\varphi(x)$.

Είναι εύκολο να κατασκευάσουμε δηλώσεις στα ελληνικά που είναι αντίστοιχες των παραπάνω μορφών. Για το Νόμο $1'''$, π.χ., θα παίρναμε τις δηλώσεις "Όλοι δεν πέρασαν στην εξέταση Λογικής" (δηλαδή, "Όλοι απέτυχαν στην εξέταση Λογικής") και "Δεν υπάρχει κάποιος που πέρασε στην εξέταση Λογικής".

Μια συνέπεια του Νόμου 1 (και του νόμου διπλής άρνησης) είναι ότι ένας από τους δύο ποσοδείκτες που χρησιμοποιούμε μπορεί να εξαλειφθεί τελείως από την κατηγορηματική λογική (αφού μπορεί να οριστεί μέσω του άλλου) και το αποτέλεσμα θα είναι ένα ισοδύναμο σύστημα.

Η επόμενη ομάδα νόμων περιέχει νόμους που είναι αντίστοιχοι των νόμων επιμεριστικότητας για τους συνδέσμους & και $\vee$ στην προτασιακή λογική, αν και θάπρεπε να σημειώσουμε ότι δύο απ' αυτούς είναι μόνο λογικές συνεπαγωγές και όχι λογικές ισοδυναμίες.

Νόμοι κατανομής ποσοδεικτών

Νόμος 2. $(\forall x)(\varphi(x)\&\psi(x)) \Leftrightarrow (\forall x)\varphi(x)\&(\forall x)\psi(x)$
Νόμος 3. $(\exists x)(\varphi(x)\vee\psi(x)) \Leftrightarrow (\exists x)\varphi(x)\vee(\exists x)\psi(x)$
Νόμος 4. $(\forall x)\varphi(x)\vee(\forall x)\psi(x) \Rightarrow (\forall x)(\varphi(x)\vee\psi(x))$
Νόμος 5. $(\exists x)(\varphi(x)\&\psi(x)) \Rightarrow (\exists x)\varphi(x)\&(\exists x)\psi(x)$.

Η αριστερή πλευρά του Νόμου 2 είναι αληθής ανν κάθε άτομο στο πεδίο συζήτησης κάνει και την $\varphi(x)$ και την $\psi(x)$ αληθή. Η δεξιά πλευρά είναι αληθής ανν κάθε άτομο κάνει την $\varphi(x)$ αληθή και κάθε άτομο κάνει την $\psi(x)$ αληθή. Με παρόμοιο τρόπο επαληθεύουμε και το Νόμο 3.

Η αριστερή πλευρά του Νόμου 4 είναι αληθής ανν κάθε τι στο σύμπαν συζήτησης κάνει την $\varphi(x)$ αληθή ή κάθε τι κάνει την $\psi(x)$ αληθή. Σε μια τέτοια περίπτωση, έπεται ότι κάθε τι κάνει την $\varphi(x)$ ή την $\psi(x)$ αληθή. Η αντίστροφη συνεπαγωγή, όμως, δεν ισχύει. Η δήλωση ότι κάθε τι στο σύμπαν είναι άνδρας ή γυναίκα δεν συνεπάγεται ότι κάθε τι είναι άνδρας ή κάθε τι είναι γυναίκα. Για το Νόμο 5 εφαρμόζεται όμοιος συλλογισμός.

Οι Νόμοι 2 και 3 υποβάλλουν μια θεμελιώδη σύνδεση μεταξύ του καθολικού ποσοδείκτη και της σύζευξης και μεταξύ του υπαρξιακού ποσοδείκτη και της διάζευξης. Η $(\forall x)\varphi(x)$ είναι αληθής μόνο στην περίπτωση που η $\varphi(a)$ είναι αληθής και η $\varphi(b)$ είναι αληθής και ..., όπου $a, b, \ldots$ είναι όλα τα στοιχεία του σύμπαντος συζήτησης. Όμοια, η $(\exists x)\varphi(x)$ είναι αληθής μόνο στην περίπτωση που η $\varphi(a)$ ή $\varphi(b)$ είναι αληθής ή .... Έτσι, μια καθολικά ποσοδειγμένη πρόταση είναι ισοδύναμη με μια σύζευξη $\varphi(a)\&\varphi(b)\&\ldots$, ενώ μια υπαρξιακή πρόταση είναι ισοδύναμη με μια διάζευξη $\varphi(a) \vee \varphi(b) \vee \ldots$. Απ' αυτή την πλευρά, ο Νόμος 1 μοιάζει με ένα είδος γενικευμένου Νόμου DeMorgan:

(5-5) $\sim(\varphi(a)\&\varphi(b)\&\ldots) \Leftrightarrow \sim\varphi(a)\vee\sim\varphi(b)\vee\ldots$.

Η επόμενη ομάδα νόμων αφορά τη γραμμική διάταξη ποσοδεικτών σε προτάσεις με διπλούς ποσοδείκτες. Αν οι δύο ποσοδείκτες είναι όμοιοι, τότε η σειρά τους στην πρόταση δεν παίζει κανένα ρόλο (Νόμοι 6 και 7). Μέχρι εδώ τα πράγματα είναι μάλλον προφανή από τη σημασιολογική αντιμετώπιση των ποσοδεικτών που σκιαγραφήσαμε. Η επέκταση αυτών των νόμων σε περιπτώσεις τριών ή περισσότερων ποσοδεικτών του ίδιου τύπου είναι άμεση. Γι' αυτούς τους λόγους, μια πρόταση της μορφής $(\forall x)(\forall y)\varphi(x, y)$ συντομογραφείται συχνά ως $(\forall x, y)\varphi(x, y)$. Όμοια, η $(\exists x)(\exists y)(\exists z)\varphi(x, y, z)$ συντομογραφείται ως $(\exists x, y, z)\varphi(x, y, z)$ κτλ.

Νόμοι Εναλλαγής Ποσοδεικτών

Νόμος 6. $(\forall x)(\forall y)\varphi(x, y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)\varphi(x, y)$
Νόμος 7. $(\exists x)(\exists y)\varphi(x, y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)\varphi(x, y)$
Νόμος 8. $(\exists x)(\forall y)\varphi(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)\varphi(x, y)$.

Έχουμε ήδη δει παραπάνω ότι η αλλαγή σειράς ενός υπαρξιακού και ενός καθολικού ποσοδείκτη παράγει μια όχι ισοδύναμη πρόταση. Όμως, ισχύει η λογική συνεπαγωγή που δίνεται στο Νόμο 8. Αν ο καθένας έχει κάποιον που αγαπάει, $(\forall x)(\exists y)L(x,y)$, δεν έπεται κατ' ανάγκη ότι όλοι αγαπούν το ίδιο πρόσωπο, δηλαδή, η πρόταση $(\exists y)(\forall x)L(x,y)$ μπορεί να είναι ψευδής. Από την άλλη πλευρά, αν υπάρχει κάποιος που αγαπιέται από όλους, δηλαδή, η δεύτερη πρόταση είναι αληθής, τότε πράγματι έπεται ότι η πρώτη πρόταση είναι αληθής: για κάθε πρόσωπο υπάρχει τουλάχιστον κάποιος που αυτό το πρόσωπο αγαπά.

Όταν εφαρμόζουμε αυτούς τους νόμους σε συγκεκριμένους κλειστούς τύπους, είναι μερικές φορές απαραίτητο να κάνουιμε μια αλφαβητική αλλαγή μεταβλητής. Π.χ., η πρόταση $(\forall x)F(x)\&(\forall y)G(y)$ δεν είναι της σωστής μορφής για να μετατραπεί στην $(\forall x)(F(x)\&G(x))$ με βάση το Νόμο 2. Μπορεί, όμως, να τεθεί στην απαιτούμενη μορφή, αν αντικαταστήσουμε τον υποτύπο $(\forall y)G(y)$ με τον ισοδύναμο τύπο $(\forall x)G(x)$. Αυτό δίνει τον τύπο $(\forall x)F(x)\&(\forall x)G(x)$, στον οποίο μπορεί να εφαρμοστεί ο Νόμος 2. Μια αλφαβητική αλλαγή μεταβλητής επιτρέπεται, αν (1) το ίδιο γράμμα αντικαταστήσει κάθε εμφάνιση του γράμματος που αντικαθίσταται και (2) οι αντικαταστάσεις δεν αλλάζουν τη γενική διαμόρφωση δεσμεύσεων στον πλήρη τύπο. Κάτω απ' αυτές τις συνθήκες, ο νέος τύπος, που καλείται *αλφαβητική παραλλαγή*, είναι λογικά ισοδύναμος προς τον αρχικό. Ας θεωρήσουμε το παράδειγμα που μόλις αναφέραμε.

(5-7) $(\forall x)F(x)\&(\forall y)G(y) : (\forall x)F(x)\&(\forall x)G(x)$.

Στον τύπο στα αριστερά, όλα τα y μπορούν ν' αντικατασταθούν από x, διότι όλες οι εμφανίσεις μεταβλητών παραμένουν δεσμευμένες από τον ίδιο ποσοδείκτη.

Ένα άλλο παράδειγμα αλφαβητικής παραλλαγής είναι το ακόλουθο:

(5-8) $(\forall x)((\forall z)F(x,z)\rightarrow(\exists y)H(y,x)) : (\forall x)((\forall y)F(x,y)\rightarrow(\exists y)H(y,x))$.

Οι ακόλουθοι τύποι δεν είναι ισοδύναμοι και άρα δεν είναι αλφαβητικές παραλλαγές.

(5-9) $(\forall x)(F(x)\rightarrow(\exists y)G(x,y)) : (\forall x)(F(x)\rightarrow(\exists x)G(x,x))$.

Το x στον τύπο $G(x,x)$ είναι δεσμευμένο πρώτα από τον $(\forall x)$ και μετά από τον $(\exists x)$.

(5-10) $(\forall x)(F(x)\rightarrow(\exists y)G(x,y)) : (\forall z)(F(z)\rightarrow(\exists y)G(x,y))$.

Το x δεν έχει αντικατασταθεί παντού στον τύπο και η x εμφανίζεται ελεύθερη στον τύπο $G(x,y)$.

Θα είναι μερικές φορές βολικό, ιδιαίτερα όταν εφαρμόζουμε τους κανόνες που σκιαγραφούνται στην επόμενη παράγραφο, να μετακινούμε όλα τα σύμβολα ποσοδεικτών προς τα αριστερά του τύπου. Οι ακόλουθοι νόμοι χαρακτηρίζουν τις περιπτώσεις που ένας ποσοδείκτης μπορεί να μετακινηθεί διατηρώντας την τιμή αλήθειας.

Νόμοι Μετακίνησης Ποσοδεικτών

Νόμος 9. $(\varphi\to(\forall x)\psi(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(\varphi\to\psi(x))$
με την προϋπόθεση ότι η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον φ

Νόμος 10. $(\varphi\to(\exists x)\psi(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(\varphi\to\psi(x))$
με την προϋπόθεση ότι η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον φ

Νόμος 11. $(\forall x)\varphi(x)\to\psi \Leftrightarrow (\exists x)(\varphi(x)\to\psi)$
με την προϋπόθεση ότι η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον ψ

Νόμος 12. $(\exists x)\varphi(x)\to\psi \Leftrightarrow (\forall x)(\varphi(x)\to\psi)$
με την προϋπόθεση ότι η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον ψ.

Αυτοί οι νόμοι χρησιμοποιούνται για την εύρεση της *Prenex Κανονικής Μορφής* κάθε τύπου, που είναι η αλφαβητική παραλλαγή του με όλους τους ποσοδείκτες να προηγούνται ενός μέρους χωρίς ποσοδείκτες. Π.χ., για να μετατρέψουμε τον τύπο

(5-11) $(\exists x)F(x)\to(\forall y)G(y)$

σε PKM, εφαρμόζουμε το Νόμο 9 για να πάρουμε

(5-12) $(\forall y)[(\exists x)F(x)\to G(y)]$.

Αυτό επιτρέπεται, επειδή η μεταβλητή y στον μετακινούμενο ποσοδείκτη δεν έχει ελεύθερες εμφανίσεις στην ηγούμενη πρόταση $(\exists x)F(x)$. Ο τύπος που προκύπτει δεν είναι ακόμη σε PKM, διότι ο $(\exists x)$ έχει μόνο τον $F(x)$ ως πεδίο του. Χρειάζεται να μετακινήσουμε τον $(\exists x)$ από μέσα στον τύπο $(\exists x)F(x)\to G(y)$, πράγμα που μπορούμε να κάνουμε με βάση το Νόμο 12, αφού η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον επόμενο τύπο $G(y)$. Το αποτέλεσμα είναι η πρόταση $(\forall x)(F(x) \to G(y))$, που είναι ισοδύναμη με την έκφραση σε αγκύλες στην (5-10). Έτσι, ο επιθυμητός ισοδύναμος τύπος προς τον (5-9) σε PKM είναι ο

(5-13) $(\forall y)[(\forall x)(F(x)\to G(y))]$.

Τώρα μπορούμε να παραλείψουμε τις αγκύλες και να πάρουμε τον τύπο

(5-14) $(\forall y)(\forall x)(F(x)\to G(y))$.

Αν είχαμε εφαρμόσει το Νόμο 12 στο (5-9) και μετά το Νόμο 9 στο αποτέλεσμα, θα είχαμε πάρει τον τύπο $(\forall x)(\forall y)(F(x)\to G(y))$, που είναι ισοδύναμος με τον (5-12).

Όπως στην περίπτωση άλλων νόμων, ίσως να είναι απαραίτητο μερικές φορές ν' αντικαταστήσουμε ένα τύπο από μια αλφαβητική παραλλαγή πριν συνεχίσουμε. Αν ο (5-9) είχε δοθεί στη μορφή $(\exists x)F(x)\to(\forall x)G(x)$, π.χ., θα μπορούσαμε να έχουμε εφαρμόσει το Νόμο 9 για να πάρουμε

(5-13) $(\forall x)[(\exists x)F(x)\to G(x)]$.

Αλλά τώρα δεν μπορούμε να μετακινήσουμε τον $(\exists x)$ έξω από τις αγκύλες με βάση το Νόμο 12, διότι η x εμφανίζεται ελεύθερη στον $G(x)$. Η λύση είναι να μετατρέψουμε τον τύπο $(\exists x)F(x)\to G(x)$ σε μια αλφαβητική παραλλαγή, ας πούμε την $(\exists y)F(y)\to G(x)$, και μετά να εφαρμόσουμε το Νόμο 12 για να πάρουμε τον $(\forall y)(F(y)\to G(x))$. Το τελικό αποτέλεσμα είναι ο τύπος:

(5-14) $(\forall x)(\forall y)(F(y)\to G(x))$

που είναι, φυσικά, ισοδύναμος με τον τύπο $(\exists x)F(x)\rightarrow(\forall x)G(x)$ (και τον (5-12) και τον (5-9)).

Δοθέντος οποιουδήποτε τύπου, μπορούμε να τον φέρουμε σε prenex κανονική μορφή με την ακόλουθη διαδικασία.

1. Οι ατομικοί τύποι είναι ήδη σε PKM.
2. Αν ο φ είναι ισοδύναμος με τον φ' που είναι σε PKM, τότε ο $(\forall x)\varphi$ είναι ισοδύναμος με τον $(\forall x)\varphi'$ που είναι σε PKM.
3. Αν ο φ είναι ισοδύναμος με τον φ' που είναι σε PKM, τότε ο $\sim\varphi$ είναι ισοδύναμος με τον $\sim\varphi'$. Αν ο φ' περιέχει ποσοδείκτες, εφαρμόζουμε το Νόμο 1 στον τύπο $\sim\varphi'$ για να πάρουμε ένα τύπο σε PKM.
4. Αν ο τύπος είναι της μορφής $\varphi\rightarrow\psi$, η διαδικασία είναι πιο πολύπλοκη. Υποθέτουμε ότι έχουμε τους τύπους φ' και ψ' σε PKM, που είναι ισοδύναμοι με τους φ και ψ, αντίστοιχα. Μετατρέπουμε σε αλφαβητικές παραλλαγές για να είμαστε σίγουροι ότι οποιαδήποτε μεταβλητή που εμφανίζεται δεσμευμένη από ένα ποσοδείκτη στον φ' ή στον ψ' δεν εμφανίζεται καθόλου στον άλλο. Τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κανόνες μετακίνησης ποσοδεικτών, για να πάρουμε ένα τύπο σε PKM που είναι ισοδύναμος με τον $\varphi'\rightarrow\psi'$.

Αυτή η διαδικασία εξασφαλίζει ότι υπάρχει μια PKM για κάθε τύπο, αφού μπορούμε να ορίσουμε όλους τους άλλους συνδέσμους και τον άλλο ποσοδείκτη με χρήση των $\sim$ και $\rightarrow$ και του καθολικού ποσοδίκτη.

Η χρήση Prenex Κανονικών Μορφών γίνεται κυρίως για να συγκρίνουμε την πολυπλοκότητα της ποσοδεικτικής δομής των τύπων. Αλλά όταν μια συνήθης ελληνική πρόταση μεταφράζεται στη λογική κατηγορημάτων, η πιο φυσική μετάφραση συχνά έχει εμφυτευμένους ποσοδείκτες. Π.χ., για να μεταφράσουμε μια δήλωση όπως η "Σε κάποιο άτομο αρέσουν όλα τα βιβλία" στη λογική κατηγορημάτων, θα πρέπει να υποθέσουμε ότι έχουμε ένα σύμπαν συζήτησης που περιέχει και άτομα και βιβλία. Συνεπώς μια μετάφραση όπως η $(\exists x)(\forall y)L(x, y)$ δεν είναι σωστή, αφού αυτή αληθεύει μόνο αν κάποιο άτομο βρίσκεται στη σχέση L προς κάθε άτομο στο D, δηλαδή, άτομα, βιβλία και ο,τιδήποτε άλλο τύχει να περιέχεται. Χρειαζόμαστε (μονομελή) κατηγορηματικά σύμβολα που αντιστοιχούν στο "είναι άτομο" και "είναι βιβλίο", έστω A και B, και τότε η πιο φυσική μετάφραση θα ήταν:

(5-15) $(\exists x)(A(x)\&(\forall y)(B(y)\rightarrow L(x, y))))$.

Αυτή η μορφή μπορεί να είναι κατάλληλη για τους σκοπούς μας, αλλά οι συμπερασματικοί κανόνες στην επόμενη παράγραφο εφαρμόζονται πιο εύκολα αν ο τύπος μετατραπεί πρώτα σε PKM. Π.χ., η (5-15) θα μπορούσε να μετατραπεί σε PKM ως εξής:

1.	$(\exists x)[A(x)\&(\forall y)(B(y)\rightarrow L(x, y)]$	
2.	$(\exists x)\sim\sim[A(x)\&(\forall y)(B(y)\rightarrow L(x, y))]$	1, ν. διπλής άρνησης
3.	$(\exists x)\sim[\sim A(x)\vee\sim(\forall y)(B(y)\rightarrow L(x, y))]$	2, ν. DeMorgan

4.	$(\exists x){\sim}[{\sim}A(x)\vee(\exists y){\sim}(B(y)\to L(x,y))]$	3, ν. άρνησης ποσοδείκτη
5.	$(\exists x){\sim}[A(x)\to(\exists y){\sim}(B(y)\to L(x,y))]$	4, ν. συνεπαγωγής
6.	$(\exists x){\sim}(\exists y)[A(x)\to{\sim}(B(y)\to L(x,y))]$	5, ν. μεταχ. ποσοδείκτη
7.	$(\exists x)(\forall y){\sim}[A(x)\to{\sim}(B(y)\to L(x,y))]$	6, ν. άρνησης ποσοδείκτη
8.	$(\exists x)(\forall y){\sim}[{\sim}A(x)\vee{\sim}(B(y)\to L(x,y))]$	7, ν. συνεπαγωγής
9.	$(\exists x)(\forall y)[{\sim}{\sim}A(x)\&{\sim}{\sim}(B(y)\to L(x,y))]$	8, ν. DeMorgan
10.	$(\exists x)(\forall y)[A(x)\&(B(y)\to L(x,y))]$	9, ν. διπλής άρνησης.

5.4 Φυσική παραγωγή

Αφού έχουμε περισσότερα (λογικά) σύμβολα, θα πρέπει να προσθέσουμε, στους κανόνες που είδαμε στη δηλωτική λογική, κανόνες που αφορούν τους ποσοδείκτες, ώστε να μπορούμε να χειριζόμαστε τύπους και προτάσεις της κατηγορηματικής λογικής. Υπενθυμίζουμε ότι οι έγκυρες επιχειρηματικές μορφές χαρακτηρίζονται από κανόνες που διατηρούν μόνο την αλήθεια. Η κύρια ιδέα είναι να εισαγάγουμε κανόνες που αφορούν το ποσοδεικτικό πρόθεμα, κατόπιν να εφαρμόσουμε συμπερασματικούς κανόνες στην έκφραση που απομένει και, τέλος, να ξαναβάλουμε ποσοδείκτες στον τύπο. Χρειαζόμαστε δύο κανόνες για αφαίρεση ποσοδεικτών, συγκεκριμένα τον κανόνα που καλείται *Καθολική Συγκεκριμενοποίηση* (ΚΣ) και τον κανόνα που καλείται *Υπαρξιακή Συγκεκριμενοποίηση* (ΥΣ), καθώς και δύο κανόνες για εισαγωγή ποσοδεικτών, συγκεκριμένα τον κανόνα που καλείται *Καθολική Γενίκευση* (ΚΓ) και τον κανόνα που καλείται *Υπαρξιακή Γενίκευση* (ΥΓ). Για ν' αποφύγουμε λάθη, πρέπει να θέσουμε περιορισμούς για δύο από τους νέους κανόνες. Σημειώνουμε ότι, γράφοντας $(\forall x)\varphi(x)$ και $(\exists x)\varphi(x)$, δηλώνουμε ότι η μεταβλητή x εμφανίζεται στον τύπο φ (που μπορεί να είναι όσο πολύπλοκός θέλουμε), δηλαδή, οι κανόνες δεν μπορούν να εφαρμοστούν σε τύπους με κενή ποσόδειξη.

Ένας καθολικά ποσοδειγμένος τύπος είναι αληθής αν και μόνον αν κάθε συγκεκριμενοποίηση ενός αντικειμένου από το σύμπαν συζήτησης για την ποσοδειγμένη μεταβλητή κάνει αληθή τον τύπο που είναι το πεδίο του ποσοδείκτη. Άρα, από την αλήθεια του $(\forall x)\varphi(x)$ μπορούμε να συμπεράνουμε ότι κάποια ειδική αντιστοίχιση τιμής στη μεταβλητή x κάνει αληθή τον τύπο $\varphi(x)$. Π.χ., από τη δήλωση "Όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί" μπορούμε να συμπεράνουμε την "Αν ο Γιάννης είναι άνθρωπος, τότε αυτός είναι θνητός". Ο νέος κανόνας ΚΣ διατυπώνεται ως εξής:

Καθολική Συγκεκριμενοποίηση

$$\frac{(\forall x)\varphi(x)}{\varphi(c)}$$

όπου c είναι μια ατομική σταθερά που έχει αντικαταστήσει κάθε ελεύθερη εμφάνιση της x στον $\varphi(x)$ της υπόθεσης. Ο κανόνας αυτός είναι ό,τι χρειάζεται για να δείξουμε την εγκυρότητα του επιχειρήματος (5-1). Χρησιμοποιώντας τα μονομελή κατηγορηματικά σύμβολα H, M για να συμβολίσουμε τις ιδιότητες "είναι άνθρωπος" και "είναι θνητός" και την ατομική σταθερά s για να συμβολίσουμε το ον "Σωκράτης", το επιχείρημα (5-1) αντιστοιχεί στην επιχειρηματική μορφή

$$\frac{\begin{array}{l}(\forall x)(H(x)\to M(x))\\ H(s)\end{array}}{M(s)}\,,$$

η εγκυρότητα της οποίας αποδεικνύεται ως εξής:

$$\begin{array}{lll}1. & (\forall x)(H(x)\to M(x)) & \\ 2. & H(s) & \\ 3. & H(s)\to M(s) & 1,\ \text{ΚΣ}\\ 4. & M(s) & 2,\ 3,\ \text{MP.}\end{array}$$

Αφού η δεύτερη υπόθεση εισάγει μια συγκεκριμένη ατομική σταθερά s και το συμπέρασμα αναφέρει την ίδια σταθερά, τη χρησιμοποιούμε σ' αυτή την εφαρμογή του ΚΣ. Ο τύπος στην τρίτη γραμμή δεν είναι πια ποσοδειγμένος και συνεπώς μπορούμε να εφαρμόσουμε κανόνες της προτασιακής λογικής. Εδώ ο Modus Ponens αποσπά τον επόμενο της γραμμής 3, που είναι το επιθυμητό συμπέρασμα.

Για να δείξουμε ότι κάποιος τύπος αληθεύει για κάθε στοιχείο ενός συνόλου, μπορούμε να επιλέξουμε αυθαίρετα ένα άτομο από αυτό το σύνολο και ν' αποδείξουμε ότι ο τύπος ισχύει γι' αυτό. Αν η απόδειξη εξαρτάται μόνο από το γεγονός ότι αυτό το άτομο είναι στοιχείο του συνόλου και όχι από επιπλέον ιδιότητες που αυτό έχει, μπορούμε έγκυρα να συμπεράνουμε ότι ο τύπος ισχύει για όλα τα άτομα στο σύνολο. Αυτή η συλλογιστική μέθοδος γίνεται ακριβής με τον κανόνα Καθολικής Γενίκευσης, σύμφωνα με τον οποίο, ό,τι αληθεύει για ένα αυθαίρετα επιλεγμένο αντικείμενο αληθεύει για κάθε αντικείμενο στο σύμπαν συζήτησης. Κρατάμε την ατομική σταθερά v ως ειδικό σύμβολο για ένα αυθαίρετα επιλεγμένο αντικείμενο, με δείκτες $v_1, v_2, \ldots$ όταν χρειάζεται. Η v είναι ατομική σταθερά κι έτσι η $\varphi(v)$ είναι μια πρόταση και όχι ένας ανοικτός τύπος. Όμως η v είναι σαν μεταβλητή κατά το ότι έχει τη θέση ενός τυχόντος ατόμου και όχι ενός συγκεκριμένου. Ο κανόνας ΚΓ διατυπώνεται ως:

Καθολική Γενίκευση

$$\frac{\varphi(v)}{(\forall x)\varphi(x)}$$

Αυτός ο κανόνας χρησιμοποιείται για να ελέγξουμε την εγκυρότητα της επιχειρηματικής μορφής που αντιστοιχεί στο επιχείρημα:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Κάθε κουνέλι είναι τετράποδο.}\\ \text{Κάθε τετράποδο είναι θερμόαιμο.}\end{array}}{\text{Κάθε κουνέλι είναι θερμόαιμο.}}\,,$$

δηλαδή, την ακόλουθη

$$\frac{\begin{array}{c}(\forall x)(R(x) \to Q(x)) \\ (\forall x)(Q(x) \to W(x))\end{array}}{(\forall x)(R(x) \to W(x))}\ .$$

Η απόδειξη εγκυρότητας της μορφής αυτής έχει ως εξής:

$$\begin{array}{lll} 1. & (\forall x)(R(x) \to Q(x)) & \\ 2. & (\forall x)(Q(x) \to W(x)) & \\ 3. & R(v) \to Q(v) & 1, \text{ΚΣ}. \end{array}$$

Συγκεκριμενοποιούμε την πρώτη υπόθεση μέσω της αυθαίρετα επιλεγμένης σταθεράς v. Αφού κάθε σταθερά παράγει μια αληθή περίπτωση ενός καθολικά ποσοδειγμένου τύπου, ο $R(v) \to Q(v)$ είναι μια νόμιμη συγκεκριμενοποίηση της γραμμής 1.

$$\begin{array}{lll} 4. & Q(v) \to W(v) & 2, \text{ΚΣ}. \end{array}$$

Εδώ έχουμε συγκεκριμενοποιήσει τη δεύτερη υπόθεση με την ίδια σταθερά που επιλέξαμε στη γραμμή 3.

$$\begin{array}{lll} 5. & R(v) \to W(v) & 3, 4, \text{ΥΣ} \\ 6. & (\forall x)(R(x) \to W(x)) & 5, \text{ΚΓ}. \end{array}$$

Αφού η v έχει επιλεγεί αυθαίρετα, η πρόταση που την περιέχει μπορεί να γενικευθεί καθολικά, ώστε να πάρουμε το συμπέρασμα της γραμμής 6.

Ας δούμε τώρα άλλο ένα παράδειγμα χρήσης του κανόνα ΚΣ, για να αφαιρέσουμε ένα καθολικό ποσοδείκτη, και του κανόνα ΚΓ, για να τον ξαναβάλουμε.

$$\begin{array}{lll} 1. & (\forall x)(P(x)\&Q(x)) & \\ 2. & (\forall x)(R(x) \to \sim P(x)) & \\ 3. & P(v)\&Q(v) & 1, \text{ΚΣ} \\ 4. & R(v) \to \sim P(v) & 2, \text{ΚΣ} \\ 5. & P(v) & 3, \text{απλοποίηση} \\ 6. & \sim\sim P(v) & 5, \text{νόμος συμπληρώματος} \\ 7. & \sim R(v) & 4, 6, \text{ΜΤ} \\ 8. & Q(v) & 3, \text{απλοποίηση} \\ 9. & Q(v)\&\sim R(v) & 7, 8, \text{σύζευξη} \\ 10. & (\forall x)(Q(x)\&\sim R(x)) & 9, \text{ΚΓ}. \end{array}$$

Όταν ο τύπος $\varphi(c)$ είναι αληθής, όπου c είναι ατομική σταθερά, αυτός αποτελεί μια αληθή συγκεκριμενοποίηση του ανοικτού τύπου $\varphi(x)$. Έτσι μπορούμε να συμπεράνουμε τον τύπο $(\exists x)\varphi(x)$ από τον αληθή $\varphi(c)$. Π.χ., αν ήδη γνωρίζουμε ή θεωρούμε ως αληθές ότι ο Γιάννης είναι άνθρωπος, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι υπάρχει κάποιος άνθρωπος. Ο κανόνας ΥΓ διατυπώνεται ως εξής:

Υπαρξιακή Γενίκευση

$$\frac{\varphi(c)}{(\exists x)\varphi(x)}$$

όπου c είναι οποιαδήποτε ατομική σταθερά.
Η ακόλουθη απόδειξη χρησιμοποιεί τον κανόνα ΥΓ.

1. $H(c)$	
2. $(\forall x)(H(x)\rightarrow M(x))$	
3. $H(c)\rightarrow M(c)$	2, ΚΣ
4. $M(c)$	1, 3, MP
5. $(\exists x)M(x)$	4, ΥΓ.

Αν μια υπαρξιακά ποσοδειγμένη πρόταση είναι αληθής, υπάρχει τουλάχιστον μια αντιστοίχιση στη μεταβλητή της που παρέχει μια αληθή συγκεκριμενοποίηση του πεδίου. Συνεπώς, μπορούμε να συμπεράνουμε από την αλήθεια της $(\exists x)\varphi(x)$ ότι αληθεύει η $\varphi(w)$, για κάποια ατομική σταθερά w, ερμηνευμένη ως ένα αντικείμενο στο σύμπαν συζήτησης. Γενικά, μερικές συγκεκριμενοποιήσεις του πεδίου ενός ποσοδείκτη μπορεί να είναι αληθείς και άλλες ψευδείς. Έτσι, η w είναι όπως η v που εισάγεται στον κανόνα ΚΣ κατά το ότι το σύνολο ατόμων στο οποίο είναι δυνατό να αναφέρεται δεν είναι γενικά όλο το σύμπαν συζήτησης, αλλά ένα υποσύνολό του. Λόγω αυτού του περιορισμού στο w, πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί όταν εφαρμόζουμε τον κανόνα ΥΣ. Π.χ., ας υποθέσουμε ότι $(\exists x)\varphi(x)$ και $(\exists x)\psi(x)$ είναι δύο υποθέσεις μιας επιχειρηματικής μορφής και ότι στην απόδειξη η πρώτη έχει συγκεκριμενοποιηθεί ως $\varphi(w)$ με χρήση του κανόνα ΥΣ. Τώρα δεν είναι σωστό να ξαναχρησιμοποιήσουμε την $\psi(w)$, διότι δεν έχουμε καμιά εγγύηση ότι το ίδιο αντικείμενο θα επαληθεύει τα πεδία και των δύο υπαρξιακών ποσοδεικτών. Η σωστή απόδειξη πρέπει να χρησιμοποιεί δύο διαφορετικές ατομικές σταθερές, w_1 και w_2, εξάγοντας τους τύπους $\varphi(w_1)$ και $\psi(w_2)$ από τις υποθέσεις. Συνεπώς, επιβάλλουμε τον περιορισμό στον ΥΣ ότι η σταθερά που εισάγεται δεν επιτρέπεται να έχει εμφανιστεί πριν, στην ίδια απόδειξη. Ο κανόνας ΥΣ διατυπώνεται ως εξής:

Υπαρξιακή Συγκεκριμενοποίηση

$$\frac{(\exists x)\varphi(x)}{\varphi(w)}$$

όπου w είναι μια νέα ατομική σταθερά.

Ο τύπος $\varphi(w)$ δεν μπορεί ν' αποτελέσει βάση για καθολική γενίκευση σε $(\forall x)\varphi(x)$, αφού η w δεν έχει επιλεγεί τελείως αυθαίρετα, αλλά μάλλον από ένα σύνολο ατόμων που τυχαίνει να δίνουν αληθείς συγκεκριμενοποιήσεις του πεδίου εφαρμογής του ποσοδείκτη. Ας δούμε ένα παράδειγμα χρήσης του κανόνα ΥΣ:

1. $(\exists x)(P(x)\&Q(x))$	
2. $P(w)\&Q(w)$	1, ΥΣ
3. $P(w)$	2, απλοποίηση
4. $(\exists x)P(x)$	3, ΥΓ.

Αυτό το βήμα είναι έγκυρο, διότι η w είναι μια σταθερά που δίνει μια αληθή συγκεκριμενοποίηση του τύπου $P(x)$.

5.	$Q(w)$	2, απλοποίηση
6.	$(\exists x)Q(x)$	5, ΥΓ
7.	$(\exists x)P(x)\&(\exists x)Q(x)$	4, 6, σύζευξη.

Η ακόλουθη απόδειξη επεξηγεί ένα σημαντικό θέμα για τους κανόνες ΥΣ, ΥΓ:

1.	$(\exists x)(T(x)\&P(x))$	
2.	$(\forall x)(P(x)\rightarrow H(x))$	
3.	$T(w)\&P(w)$	1, ΥΣ
4.	$P(w)\rightarrow H(w)$	2, ΚΣ.

Επειδή ο τύπος $P(x)\rightarrow H(x)$ επαληθεύεται από κάθε άτομο στο πεδίο συζήτησης, είναι νόμιμο να επιλέξουμε την w για τη συγκεκριμενοποίηση. Η απόδειξη θα ήταν τεχνικά λανθασμένη, αν είχαμε πρώτα συγκεκριμενοποιήσει τη γραμμή 2 ως $P(w)\rightarrow H(w)$ με ΚΣ και μετά τη γραμμή 1 ως $T(w)\&P(w)$ με ΥΣ, διότι η w θα είχε τότε εμφανιστεί σε μια προηγούμενη γραμμή.

5.	$P(w)$	3, απλοποίηση
6.	$H(w)$	4, 5, MP
7.	$T(w)$	3, απλοποίηση
8.	$T(w)\&H(w)$	6, 7, σύζευξη
9.	$(\exists x)(T(x)\&H(x))$	8, ΥΓ.

Σημειώνουμε ότι θα ήταν λανθασμένο να παραγάγουμε τον τύπο $(\forall x)(T(x)\&H(x))$ από τη γραμμή 8 με ΥΓ, διότι η w εισήχθη με ΥΣ.

Ένα ελληνικό ανάλογο αυτής της επιχειρηματικής μορφής είναι το ακόλουθο:

Μερικά μανιτάρια είναι δηλητηριώδη.
Όλα τα δηλητηριώδη πράγματα είναι βλαβερά.
___
Μερικά μανιτάρια είναι βλαβερά.

Η ακόλουθη "απόδειξη" είναι λανθασμένη, διότι αγνοεί τον περιορισμό του ΥΣ.

1. $(\exists x)(C(x)\&V(x))$	
2. $(\exists x)(D(x)\&V(x))$	
3. $C(w)\&D(w)$	1, ΥΣ
4. $D(w)\&V(w)$	2, ΥΣ (λανθασμένα)
5. $C(w)$	3, απλοποίηση
6. $D(w)$	4, απλοποίηση
7. $C(w)\&D(w)$	5, 6, σύζευξη
8. $(\exists x)(C(x)\&D(x))$	7, ΥΓ.

Αυτή η επιχειρηματική μορφή εύκολα φαίνεται ότι είναι άκυρη, αν εξετάσουμε την ακόλουθη εκδοχή στα ελληνικά:

Μερικές γάτες είναι μοχθηρές.
Μερικοί σκύλοι είναι μοχθηροί.
___
Μερικές γάτες είναι σκύλοι.

Για να μπορεί ένας ποσοδείκτης να αφαιρεθεί με ΥΣ ή ΚΣ πρέπει να βρίσκεται στο αριστερό μέρος της έκφρασης, να μην προηγούνται άλλοι ποσοδείκτες ή σύνδεσμοι και να έχει το υπόλοιπο της έκφρασης ως πεδίο του. Έτσι, η πρόταση $\sim(\forall x)(P(x)\&Q(x))$ δεν μπορεί να συγκεκριμενοποιηθεί ως $\sim(P(v)\&Q(v))$ με ΚΣ, διότι το σύμβολο της άρνησης προηγείται του ποσοδείκτη. Για να συγκεκριμενοποιήσουμε αυτή την έκφραση, πρέπει πρώτα να τη μετασχηματίσουμε σε $(\exists x)\sim(P(x)\&Q(x))$, με βάση το νόμο άρνησης ποσοδείκτη, και μετά να εφαρμόσουμε ΥΣ για να πάρουμε $\sim(P(w)\&Q(w))$. Όμοια, η πρόταση $P(c)\rightarrow(\exists x)Q(x)$ δεν μπορεί να συγκεκριμενοποιηθεί αμέσως ως $P(c)\rightarrow Q(w)$ με ΥΣ, διότι ο υπαρξιακός ποσοδείκτης δεν βρίσκεται στο αριστερό μέρος της έκφρασης, αλλά μπορεί να δώσει αυτό το αποτέλεσμα, αφού μετατραπεί στην ισοδύναμη πρόταση $(\exists x)(P(c)\rightarrow Q(x))$, με βάση το Νόμο 10. Κανένας από τους ποσοδείκτες στην πρόταση $(\forall x)P(x)\&(\exists y)Q(y)$ δεν μπορεί να αφαιρεθεί με συγκεκριμενοποίηση. Πράγματι, ο $(\forall x)$ είναι στα αριστερά, αλλά δεν έχει όλο το υπόλοιπο της πλήρους έκφρασης στο πεδίο του. Η λύση είναι να μετατρέψουμε την έκφραση σε ΡΚΜ και μετά να εφαρμόσουμε ΥΣ ή ΚΣ.

Στην αντίστροφη διαδικασία, ο ποσοδείκτης προσκολλάται στα αριστερά της πρότασης που γενικεύεται και έχει την πλήρη έκφραση ως πεδίο του. Έτσι, η $P(v)\&Q(v)$ δεν μπορεί να γενικευθεί ως $P(v)\&(\exists x)Q(x)$ εισάγοντας ένα ποσοδείκτη εσωτερικά και η $P(v)\vee Q(v)$ δεν μπορεί να γενικευθεί με ΚΓ ως $(\forall x)P(x)\vee Q(v)$, αφού το πεδίο του καθολικού ποσοδείκτη δεν περιλαμβάνει την $Q(v)$.

Υπενθυμίζουμε ότι η μέθοδος της υποθετικής απόδειξης μας επιτρέπει να εισαγάγουμε μια υπόθεση P, η οποία θεωρείται προσωρινά ως αληθής, και, μόλις εξαχθεί η Q από την P και τις αρχικές υποθέσεις, να πούμε ότι η $P\rightarrow Q$ έπεται λογικά από τις αρχικές υποθέσεις. Επειδή η αλήθεια της P δεν υποστηρίζεται, αλλά μόνο γίνεται δεκτή προσωρινά για να εξαχθεί η $P\rightarrow Q$ και μετά εγκαταλείπεται, η P μπορεί να είναι οποιαδήποτε πρόταση. Στην κατηγορηματική λογική, η πρώτη γραμμή μιας υποθετικής απόδειξης μπορεί να είναι ένας ποσοδειγμένος τύπος, π.χ., ο $(\forall x)P(x)$ ή ο $(\forall x)(\exists y)Q(x,y)$, ή ένα κατηγορηματικό σύμβολο με σταθερούς όρους, π.χ., το $P(s)$ ή το $L(a,b)$. Ειδικότερα, οι σταθεροί όροι v και w μπορεί να εμφανίζονται, π.χ., στους τύπους $P(v), L(w,v)$, όπου, όπως πριν, v είναι μια αυθαίρετα επιλεγμένη σταθερά και w είναι μια σταθερά που εισήχθη με συγκεκριμενοποίηση κάποιας υπαρξιακά ποσοδειγμένης έκφρασης. Στο ακόλουθο παράδειγμα, η υποθετική απόδειξη αρχίζει με $P(v)$.

1. $(\forall x)((P(x)\vee Q(x))\rightarrow R(x))$	
2. $(P(v)\vee Q(v))\rightarrow R(v)$	1, ΚΣ
3. $P(v)$	βοηθητική υπόθεση
4. $P(v)\vee Q(v)$	3, πρόσθεση
5. $R(v)$	2, 4, MP
6. $P(v)\rightarrow R(v)$	3-5, υποθετική απόδειξη
7. $(\forall x)(P(x)\rightarrow R(x))$	6, ΚΓ.

Η ακόλουθη είναι μια δυνατή εκδοχή στα ελληνικά αυτής της επιχειρηματικής μορφής:

$$\frac{\text{Καθένας που είναι ευγενής ή καυγατζής είναι δεξιόχειρας.}}{\text{Καθένας που είναι ευγενής είναι δεξιόχειρας.}}$$

Η προσωρινά αποδεκτή υπόθεση στην ακόλουθη υποθετική απόδειξη είναι η $P(c)$, όπου c είναι ένας σταθερός όρος.

1. $(\forall x)(P(c)\to Q(x))$	
2. $P(c)\to Q(v)$	1, ΚΣ
3. $P(c)$	βοηθητική υπόθεση
4. $Q(v)$	2, 3, MP
5. $(\forall x)Q(x)$	4, ΚΓ
6. $P(c)\to(\forall x)Q(x)$	3-5, υποθετική απόδειξη
7. $(\exists y)(P(y)\to(\forall x)Q(x))$	6, ΥΓ.

Σημειώνουμε ότι στη γραμμή 7 ο υπαρξιακός ποσοδείκτης έχει όλη την συνεπαγωγή ως πεδίο του. Το να συμπεράνουμε την πρόταση $(\exists y)P(y)\to(\forall x)Q(x)$ από τη γραμμή 6 με ΥΓ θα ήταν λανθασμένο, αφού ο υπαρξιακός ποσοδείκτης δεσμεύει μόνο τη μεταβλητή στον ηγούμενο της συνεπαγωγής. Π.χ., έστω ότι η $(\forall x)Q(x)$ είναι ψευδής και οι $(\exists y)P(y), (\exists y)\sim P(y)$ είναι αληθείς. Τότε η $(\exists y)(P(y)\to(\forall x)Q(x))$ είναι αληθής, αλλά η $(\exists y)P(y)\to(\forall x)Q(x)$ είναι ψευδής.

Ας συγκρίνουμε με την ακόλουθη εκδοχή στα ελληνικά της προηγούμενης επιχειρηματικής μορφής:

$$\frac{\text{Αν ο Παύλος είναι παππάς, τότε είναι όλοι κατάλληλοι.}}{\text{Υπάρχει κάποιος που, αν είναι παππάς, τότε όλοι είναι κατάλληλοι.}}$$

Θα ήταν λάθος να συμπεράνουμε: Αν υπάρχει τουλάχιστον ένας παππάς, τότε όλοι είναι κατάλληλοι.

Η παρακάτω παραγωγή αποτελεί μέρος της απόδειξης ενός από τους νόμους κατανομής ποσοδεικτών.

1. $(\forall x)(P(x)\&Q(x))$	βοηθητική υπόθεση
2. $P(v)\&Q(v)$	1, ΚΣ
3. $P(v)$	2, απλοποίηση
4. $(\forall x)P(x)$	3, ΚΓ
5. $Q(v)$	2, απλοποίηση
6. $(\forall x)Q(x)$	5, ΚΓ
7. $(\forall x)P(x)\&(\forall x)Q(x)$	4, 6, σύζευξη
8. $(\forall x)(P(x)\&Q(x))\to((\forall x)P(x)\&(\forall x)Q(x))$	1-7, υποθετική απόδειξη.

Αυτή δείχνει μια άλλη πλευρά μιας υποθετικής απόδειξης, δηλαδή, ότι μπορεί να μην έχει υποθέσεις, εκτός από εκείνη που αρχίζει την υποθετική απόδειξη. Σε μια τέτοια περίπτωση, η αλήθεια της εξαγόμενης συνεπαγωγής είναι ανεξάρτητη από οποιεσδήποτε άλλες προτάσεις, που είναι ένας άλλος τρόπος να πούμε ότι το συμπέρασμα είναι ταυτολογία. Για να το δούμε αυτό, ας θυμηθούμε ότι για κάθε έγκυρη επιχειρηματική μορφή

$$\begin{array}{c} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ . \\ . \\ . \\ \hline \psi \end{array}$$

η συνεπαγωγή $(\varphi_1\&\varphi_2\&...)\to\psi$ είναι ταυτολογία. Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε τις πρώτες επτά σειρές της παραπάνω απόδειξης όχι ως μια υποθετική απόδειξη, αλλά ως μια άμεση απόδειξη της $(\forall x)P(x)\&(\forall x)Q(x)$ από τη μοναδική υπόθεση $(\forall x)(P(x)\&Q(x))$ κι έτσι η πρόταση $(\forall x)(P(x)\&Q(x))\to((\forall x)P(x)\&(\forall x)Q(x))$ είναι ταυτολογική. Γενικά, για κάθε έγκυρη επιχειρηματολογική μορφή όπως η αμέσως προηγούμενη υπάρχει μια αντίστοιχη υποθετική απόδειξη

1.	$(\varphi_1\&\varphi_2\&\ldots)$	βοηθητική υπόθεση
2.	φ_1	1, απλοποίηση
3.	φ_2	2, απλοποίηση
.	$\ldots$	
.	$\ldots$	
.	$\ldots$	
n.	ψ	
n+1.	$(\varphi_1\&\varphi_2\&\ldots)\to\psi$	$1-n$, υποθετική απόδειξη.

που παίρνει όλες τις υποθέσεις ως προσωρινές και παράγει μια ταυτολογική συνεπαγωγή ως συμπέρασμα. Και στις δύο περιπτώσεις, έχουμε ότι οι υποθέσεις $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ συνεπάγονται λογικά το συμπέρασμα ψ. Η διαφορά είναι μόνο στο κατά πόσο οι υποθέσεις θεωρούνται ως αληθείς.

Για να ελέγξουμε επιχειρηματικές μορφές που περιέχουν πολλαπλά ποσοδειγμένες προτάσεις, π.χ. την $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$ ή την $(\forall x)P(x)\to(\exists y)Q(y)$, χρησιμοποιούμε ουσιαστικά την ίδια διαδικασία με αυτή για απλά ποσοδειγμένες προτάσεις: αφαιρούμε τους ποσοδείκτες με ΚΣ και ΥΣ, εφαρμόζουμε τους κανόνες συμπερασμού στον τύπο που προκύπτει και κατόπιν εισάγουμε ξανά τους ποσοδείκτες με ΚΓ και ΥΓ. Κατά την εφαρμογή των ΚΣ και ΥΣ σε πολλαπλά ποσοδειγμένους τύπους, οι ποσοδείκτες αφαιρούνται ένας-ένας, αρχίζοντας με τον πιο αριστερό ποσοδείκτη. Για το σκοπό αυτόν, ίσως χρειάζεται πρώτα να μετατρέψουμε μια πρόταση σε μια λογικά ισοδύναμη, με τη βοήθεια των νόμων της ενότητας 5.3. Η κατάσταση περιπλέκεται, όταν θέλουμε να βεβαιωθούμε ότι διαφορετικές μεταβλητές δεν συγχέονται σε διαδοχικές εφαρμογές του ΚΣ ή ΥΣ. Π.χ., από την $(\forall x)(\forall y)P(x,y)$ παίρνουμε την $(\forall y)P(v,y)$ με ΚΣ, αλλά, αν κατόπιν συγκεκριμενοποιήσουμε με v για να πάρουμε $P(v,v)$, τότε η πληροφορία ότι η $P(x,y)$ είναι προτασιακή συνάρτηση με δύο μεταβλητές έχει χαθεί. Η $P(v,v)$ θα μπορούσε να γενικευθεί με ΚΓ, μόνο σε $(\forall x)P(x,x)$, όχι σε $(\forall x)(\forall y)P(x,y)$, αφού δε μπορούμε να δεσμεύσουμε κάποια εμφάνιση μιας μεταβλητής με ένα ποσοδείκτη και κάποια άλλη με έναν άλλο. Συγκεκριμενοποιώντας την $(\forall x)(\forall y)P(x,y)$ θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε δύο διαφορετικά σύμβολα, ας πούμε v_1 και v_2, το καθένα να αναπαριστάνει μια αυθαίρετα επιλεγμένη σταθερά έτσι, ώστε να διατηρηθεί η μορφή της προτασιακής συνάρτησης $P(x, y)$. Αν και επιτρέπεται να χρησιμοποιήσουμε διαφορετικά σύμβολα σε μια τέτοια περίπτωση για να συγκεκριμενοποιήσουμε διαφορετικές μεταβλητές, δεν είναι απαραίτητο να το κάνουμε. Η $P(v, v)$, π.χ., είναι μια νόμιμη συγκεκριμενοποίηση της $(\forall x)(\forall y)P(x, y)$ και άρα η $(\forall x)(\forall y)P(x, y)$ λογικά συνσπάγεται την $(\forall x)P(x, x)$. Η δεύτερη όμως δε συνεπάγεται την πρώτη και άρα, αν σε μια απόδειξη συγχωνευθούν δύο διαφορετικές μεταβλητές, η αρχική διάκριση δεν μπορεί να ξαναβρεθεί όταν εφαρμοστούν κανόνες γενίκευσης.

Ας θεωρήσουμε, π.χ., την ακόλουθη απόδειξη:

1. $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow Q(y, x))$	
2. $(\forall x)(\forall y)(Q(y, x) \rightarrow R(x))$	
3. $(\forall y)(P(v_1, y) \rightarrow Q(y, u_1))$	1, ΚΣ
4. $P(v_1, v_2) \rightarrow Q(v_2, v_1)$	3, ΚΣ
5. $(\forall y)(Q(y, v_2) \rightarrow R(v_1))$	2, ΚΣ
6. $Q(v_2, v_1) \rightarrow R(v_1)$	5, ΚΣ.

Οι συγκεκριμενοποιήσεις στις σειρές 5 και 6 θα μπορούσαν να έχουν γίνει με οποιεσδήποτε σταθερές, αλλά η επιλογή των v_1 και v_2, των ίδιων σταθερών που χρησιμοποιήθηκαν στις σειρές 3 και 4, επιτρέπει να εφαρμοστεί ο ΥΣ στις σειρές 4 και 6.

7. $P(v_1, v_2) \rightarrow R(v_1)$	4, 6, ΥΣ
8. $(\forall y)(P(v_1, y) \rightarrow R(v_1))$	7, ΚΓ
9. $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow R(x))$	8, ΚΓ.

Η σειρά με την οποία γενικεύονται οι v_1 και v_2 στις σειρές 8 και 9 είναι άσχετη, διότι και οι δύο ποσοδείκτες είναι καθολικοί και, φυσικά, η συγκεκριμένη επιλογή μεταβλητών – x για τη v_1 και y για τη v_2 – είναι αυθαίρετη. Το συμπέρασμα θα μπορούσε εξίσου καλά να γραφεί με τη μορφή $(\forall y)(\forall x)(P(y, x) \rightarrow R(y))$.

Αν οι υποθέσεις είχαν συγκεκριμενοποιηθεί παντού με v, τότε η σειρά 7 θα ήταν $P(v, v) \rightarrow R(v)$, που μπορεί να γενικευθεί σε ένα βήμα σε $(\forall x)(P(x, x) \rightarrow R(x))$. Πάλι αυτό είναι ένα έγκυρο συμπέρασμα από τις υποθέσεις, αλλά είναι ασθενέστερο από το συμπέρασμα που βγήκε στο αμέσως προηγούμενο παράδειγμα.

Ως ένα άλλο παράδειγμα επιχειρήματος που περιέχει πολλαπλά ποσοδειγμένες δηλώσεις θεωρούμε το ακόλουθο.

Όποιος συγχωρεί τουλάχιστον ένα πρόσωπο είναι άγιος.
Δεν υπάρχουν άγιοι.

Κανένας δε συγχωρεί ποτέ κανένα.

Αναπαριστάνουμε το “ο x συγχωρεί τον y” με $F(x, y)$ και “ο x είναι άγιος” με $S(x)$.

1. $(\forall x)(\forall y)(F(x,y) \rightarrow S(x))$
2. $\sim(\exists x)S(x)$
3. $(\forall y)(F(v_1,y) \rightarrow S(v_1))$ 1, ΚΣ
4. $F(v_1,v_2) \rightarrow S(v_1)$ 3, ΚΣ
5. $(\forall x)\sim S(x)$ 2, νόμος άρνησης ποσοδείκτη
6. $\sim S(v_1)$ 5, ΚΣ
7. $\sim F(v_1,v_2)$ 4, 6, MT
8. $(\forall y)\sim F(v_1,y)$ 7, ΚΓ
9. $(\forall x)(\forall y)\sim F(x,y)$ 8, ΚΓ.

Προτάσεις που περιέχουν και καθολικούς και υπαρξιακούς ποσοδείκτες παρουσιάζουν ένα ειδικό πρόβλημα για τη σειρά με την οποία οι ποσοδείκτες προσκολλούνται ξανά με ΥΓ και ΚΓ. Ας υποθέσουμε, π.χ., ότι η πρόταση $(\exists x)(\forall y)L(x,y)$ έχει συγκεκριμενοποιηθεί πρώτα με ΥΣ και μετά με ΚΣ, ως $L(w,v)$. Οι ποσοδείκτες μπορούν τώρα να ξανατοποθετηθούν και οποιαδήποτε σειρά εφαρμογής των ΥΓ και ΚΓ δίνει μια έγκυρη συνέπεια. Ο ΚΓ πρώτα και μετά ο ΥΓ δίνουν την αρχική έκφραση και, γενικεύοντας με την αντίθετη σειρά, παίρνουμε $(\forall y)(\exists x)L(x,y)$, που έπεται λογικά από την $(\exists x)(\forall y)L(x,y)$. Αν συγκεκριμενοποιήσουμε την $(\forall x)(\exists y)L(x,y)$, όμως, στην οποία ο καθολικός ποσοδείκτης βρίσκεται πριν από τον υπαρξιακό, και μετά γενικεύσουμε, αν ξαναβάλουμε τους ποσοδείκτες με αντίστροφη σειρά, θα πάρουμε ένα λανθασμένο συμπέρασμα. Η $(\forall x)(\exists y)L(x,y)$ δεν συνεπάγεται λογικά την $(\exists y)(\forall x)L(x,y)$. Έτσι, για να γενικεύσουμε μια πρόταση που περιέχει και το v και το w είναι απαραίτητο να ξέρουμε τη σειρά με την οποία αυτές οι σταθερές εισήχθησαν αρχικά με ΚΣ και ΥΣ. Αν η ΚΣ ήρθε πριν από την ΥΣ, τότε οι γενικεύσεις πρέπει να γίνουν με τη σειρά ΥΓ πριν από ΚΓ. Αν η ΥΣ εφαρμόστηκε πριν από την ΚΣ, τότε επιτρέπεται οποιαδήποτε σειρά των ΥΓ και ΚΓ. Αυτός ο περιορισμός εξηγείται στην απόδειξη εγκυρότητας της επιχειρηματικής μορφής που αντιστοιχεί στο ακόλουθο επιχείρημα.

Κάθε άνθρωπος έχει ένα πατέρα.
Όλοι οι Έλληνες είναι άνθρωποι.
———
Κάθε Έλληνας έχει ένα πατέρα.

Η έκφραση $H(x)$ αντιπροσωπεύει την "ο x είναι άνθρωπος", η $F(x,y)$ την "ο x είναι πατέρας του y" και η $G(x)$ την "ο x είναι Έλληνας" στην ακόλουθη απόδειξη.

1. $(\forall y)(\exists x)(H(y) \rightarrow F(x,y))$
2. $(\forall x)(G(x) \rightarrow H(x))$
3. $(\exists x)(H(v) \rightarrow F(x,v))$ 1, ΚΣ
4. $H(v) \rightarrow F(w,v)$ 3, ΥΣ
5. $G(v) \rightarrow H(v)$ 2, ΚΣ
6. $G(v) \rightarrow F(w,v)$ 4, 5, ΥΣ.

Αφού η v εισήχθη με ΚΣ πριν εισαχθεί η w με ΥΣ, πρέπει να γενικευθούν με αντίστροφη σειρά.

7. $(\exists x)(B(v)\rightarrow F(x,v))$ 6, ΥΓ
8. $(\forall y)(\exists x)(B(y)\rightarrow F(x,y))$ 7, ΚΓ.

Γενικεύοντας με την άλλη σειρά θα είχε δώσει την πρόταση $(\exists x)(\forall y)(G(y)\rightarrow F(x,y))$, που θα αντιστοιχούσε στη δήλωση "Υπάρχει τουλάχιστον ένα άτομο που είναι πατέρας όλων των Ελλήνων".

Ασκήσεις

1. Μεταφράστε τις ακόλουθες προτάσεις στη λογική κατηγορημάτων. Αν νομίζετε ότι υπάρχουν περισσότερες από μία μεταφράσεις, δώστε τις εναλλακτικές μεταφράσεις και συζητήστε τις διαφορές τους.

   α) Κάθε τι είναι άσπρο ή μαύρο.

   β) Ένας σκύλος είναι τετράποδο.

   γ) Καθένας αγαπά κάποιον.

   δ) Υπάρχει κάποιος που τον αγαπά καθένας.

   ε) Αν κάποιος αγαπά κάποιον, ο Γιάννης αγαπά τον εαυτό του.

   στ) Κανένας δεν αγαπά τον εαυτό του, εκτός αν είναι ο Γιάννης.

   ζ) Άνθρωποι που ζουν στην Αθήνα την αγαπούν.

   η) Αν ένας πίνακας κλείνει, δεν υπάρχουν αντιπαραδείγματα.

   θ) Αν κάποιος κάνει φασαρία, ενοχλεί τον καθένα.

   ι) Μόνο μεθυσμένοι οδηγοί κάτω των 18 προκαλούν θανατηφόρα ατυχήματα.

   κ) Η οδήγηση είναι επικίνδυνη, αν έχεις πιεί.

2. Ως μετάφραση της πρότασης "Καθένας απάντησε σε όλες τις ερωτήσεις" η πρόταση $(\forall x)(\exists y)A(x,y)$ δεν είναι επαρκής, όταν ο τύπος $A(x,y)$ μεταφράζει την έκφραση "ο x απάντησε στην ερώτηση y", αφού, όπως είδαμε και πριν, το σύμπαν πρέπει να περιέχει και ανθρώπους και ερωτήσεις. Πρέπει να αναπαραστήσουμε τα δύο διακριτά σύνολα με δύο κατηγορηματικά σύμβολα. Με αυτή την παρατήρηση κατά νου, μεταφράστε τις ακόλουθες προτάσεις.

   α) Κανένας δεν απάντησε σε όλες τις ερωτήσεις.

   β) Καθένας απάντησε σε τουλάχιστον μια ερώτηση.

   γ) Καθένας εκτός από το Γιάννη απάντησε σε τουλάχιστον μια ερώτηση.

   δ) Καθένας που απάντησε σε μια ερώτηση προσπάθησε κάποια ερώτηση.

3. Σε καθεμιά από τις ακόλουθες εκφράσεις, προσδιορίστε όλες τις δεσμευμένες και ελεύθερες εμφανίσεις μεταβλητών και τα πεδία εφαρμογής των ποσοδεικτών.

$$(\forall x)P(x)\vee Q(x,y) \qquad (\forall x)\sim[P(x)\to(\exists y)(\forall z)Q(x,y,z)]$$
$$(\exists x)Q(x,y)\&P(y,x) \qquad (\forall x)[P(x)\to(\exists y)(Q(y)\to(\forall z)R(y,z))]$$
$$(\forall y)[Q(x)\to(\forall z)P(y,z)]$$

4. Βρείτε δύο ισοδύναμους τύπους που είναι μεταφράσεις καθεμιάς από τις ακόλουθες δηλώσεις, χρησιμοποιώντας τα κατηγορηματικά σύμβολα που αναφέρονται.

   α) Για κάθε ακέραιο υπάρχει ένας μεγαλύτερος ακέραιος ($I(x), L(x,y)$).

   β) Είτε κάθε πρώτος αριθμός είναι περιττός είτε μερικοί ακέραιοι είναι άρτιοι ($P(x), I(x), O(x)$).

   γ) Αν όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί, τότε ο Σωκράτης είναι θνητός ($H(x), M(x)$).

5. Βρείτε τις Prenex Κανονικές Μορφές των ακόλουθων τύπων:

$$((\exists x)A(x)\&(\exists x)B(x))\to C(x), \quad (\forall x)A(x)\leftrightarrow(\exists x)B(x).$$

6. Αποδείξτε την εγκυρότητα των ακόλουθων επιχειρηματικών μορφών:

$$\begin{array}{l} \sim(\exists x)(P(x)\&Q(x)) \\ (\exists x)(P(x)\&R(x)) \\ \hline (\exists x)(R(x)\&\sim Q(x)) \end{array} \qquad \begin{array}{l} (\forall x)(P(x)\to Q(x)) \\ \sim (\forall x)(P(x)\to R(x)) \\ \hline (\exists x)(\sim R(x)\&Q(x)) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (\forall x)(P(x)\to Q(x)) \\ (\exists x)(R(x)\&\sim Q(x)) \\ \hline (\exists x)(R(x)\&\sim P(x)) \end{array} \qquad \begin{array}{l} (\forall x)(P(x)\to Q(x)) \\ P(a) \\ R(a) \\ \hline (\exists x)(R(x)\&Q(x)) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (\forall x)(P(x)\to Q(x)) \\ (\exists x)(P(x)\&R(x)) \\ \hline (\exists x)(R(x)\&Q(x)) \end{array} \qquad \begin{array}{l} (\forall x)((P(x)\vee Q(x))\to R(x)) \\ (\forall x)((R(x)\vee S(x))\to T(x)) \\ \hline (\forall x)(P(x)\to T(x)) \end{array}$$

7. Κατασκευάστε αποδείξεις εγκυρότητας για τις επιχειρηματικές μορφές που αντιστοιχούν στα ακόλουθα επιχειρήματα (προσαρμοσμένα από το συγγραφέα του βιβλίου *Η Αλίκη στη χώρα των θαυμάτων*, δηλαδή, τον Lewis Caroll [C. L. Dodgson], στο βιβλίο του *Symbolic Logic* (1896)).

   α) Τα μωρά είναι παράλογα. Κανένας που περιφρονείται δε μπορεί να χειριστεί ένα κροκόδειλο. Τα παράλογα πρόσωπα περιφρονούνται. Συνεπώς τα μωρά δεν μπορούν να χειριστούν ένα κροκόδεικο.

   β) Καθένας που είναι υγιής στο μυαλό μπορεί να σκεφθεί λογικά. Κανένας φρενοβλαβής δεν είναι κατάλληλος για ένορκος. Κανένας από τους γιούς σου δε μπορεί να σκεφθεί λογικά. Συνεπώς κανένας από τους γιούς σου δεν είναι κατάλληλος για ένορκος.

   γ) Καμιά πάπια δε χορεύει βαλς. Κανένας αξιωματικός δεν αρνείται ποτέ να χορέψει βαλς. Όλα τα πουλερικά μου είναι πάπιες. Συνεπώς τα πουλερικά μου δεν είναι αξιωματικοί.

Βιβλιογραφία

[1] Κ. Δημητρακόπουλος: Μια σύντομη ιστορία της "Υπόθεσης του Συνεχούς". Στο: Δ. Αναπολιτάνος (επιμ.), *Αξιώματα, Παράδοξα, Υποθέσεις και Εικασίες*, Εκδ. Νεφέλη, 2020, σ. 113–131.

[2] Γ. Κολέτσος: *Μαθηματική Λογική*, Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις, 2015.

[3] Αθ. Τζουβάρας: *Στοιχεία Μαθηματικής Λογικής*, Εκδ. Ζήτη, 1998.

[4] Δ. Πορτίδης, Σ. Ψύλλος και Δ. Αναπολιτάνος: *Λογική: η δομή του επιχειρήματος*, Εκδ. Νεφέλη. 2007.

[5] I. M. Copi, C. Cohen and K. McMahon: *Introduction to Logic*, 14th edition, Routledge, 2014.

[6] J. Corcoran: Sentence, Proposition, Judgment, Statement, and Fact. Speaking about the Written English Used in Logic. In: W. A. Carnielli et al., *The Many Sides of Logic*, London: College Publications, 2009, pp. 71–103.

[7] H. B. Enderton: *Μια μαθηματική εισαγωγή στη λογική*, μτφρ. Ι. Παπαδόγγονας, ΠΕΚ, 2013.

[8] J. Nolt, D. Rohatyn and A. Varzi: *Schaum's Outline of Logic*, 2nd edition, McGraw-Hill.

[9] B. M. Partee, A. ter Meulen and R. E. Wall: *Mathematical Methods in Linguistics*, vol. 30, *Studies in Linguistics and Philosophy*, Kluwer Academic Publishers, 1990.