ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΥΝΟΛΩΝ.
3ο ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ
23/6/2014

__Άσκηση 1.__ Βρείτε τα δενδροδιαγράμματα των προτασιακών τύπων

$(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow[((\sim p)\vee q)\,\&\,((\sim q)\vee p)]$,

$p\,\&\,[(\sim p)\,\&\,(q\vee r)]$. (1 μον.)

__Άσκηση 2.__ Για καθένα από τους ακόλουθους προτασιακούς τύπους

$(p\,\&\,(\sim q))$, $(q\to p)\vee(\sim(p\to q))$, $(p\vee q)\leftrightarrow(p\,\&\,(\sim r))$,

εξετάσετε αν είναι ενδεχόμενο, ταυτολογία ή αντίφαση.

(1,5 μον.)

__Άσκηση 3.__ Είναι ταυτολογία ή όχι ο προτασιακός τύπος

$[((\sim p)\to q)\to(\sim r)]\to(p\vee r)$;

Χρησιμοποιείστε α) πίνακα αλήθειας και β) τη μέθοδο "γρήγορης διαψευσιμότητας". (2 μον.)

__Άσκηση 4.__ Είναι οι προτασιακοί τύποι

$(p\,\&\,(\sim q))\vee\sim((\sim p)\,\&\,(\sim q))$, q

λογικά ισοδύναμοι; Γιατί; (1,5 μον.)

__Άσκηση 5.__ Χρησιμοποιώντας την αρχή αντικατάστασης και νόμους της προτασιακής λογικής, απλοποιείστε τους προτασ. τύπους

$((\sim p)\,\&\,q)\vee(\sim(q\vee p))$ (1 μον.)

$[(p\,\&\,(\sim q))\vee((\sim p)\,\&\,q)]\vee((\sim p)\,\&\,(\sim q))$ (1 μον.)

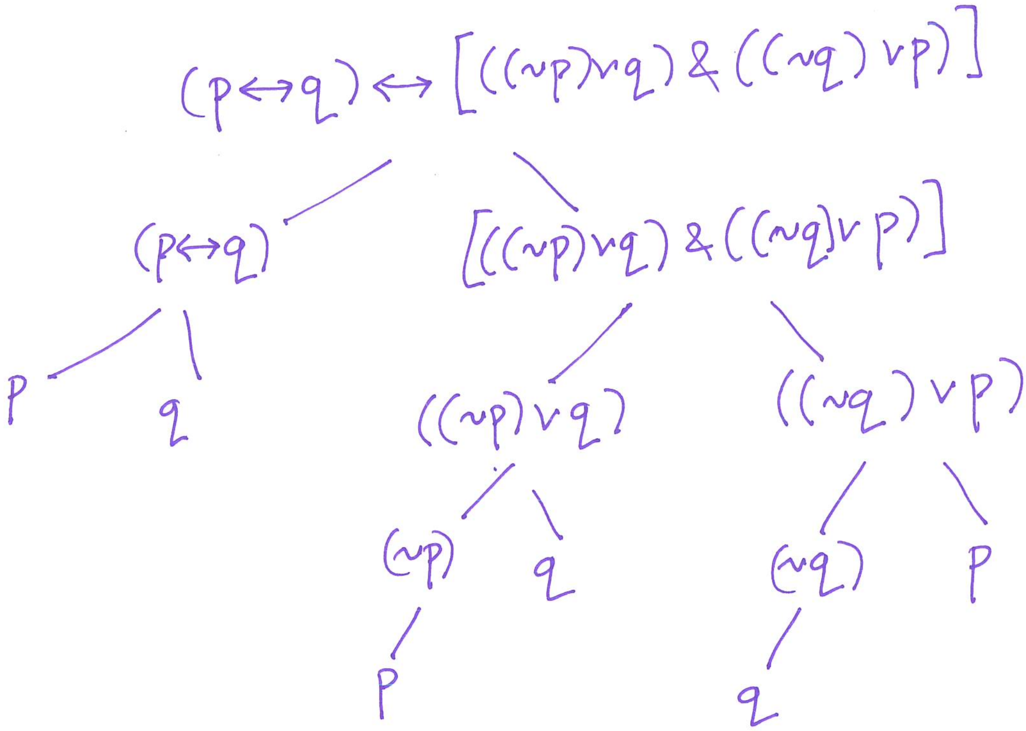
__Παράδοση λύσεων.__ Οι λύσεις πρέπει να παραδοθούν, κλασικά ή ηλεκτρονικά, __μέχρι το μάθημα της Δευτέρας, 30/6/2014.__

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΥΝΟΛΩΝ

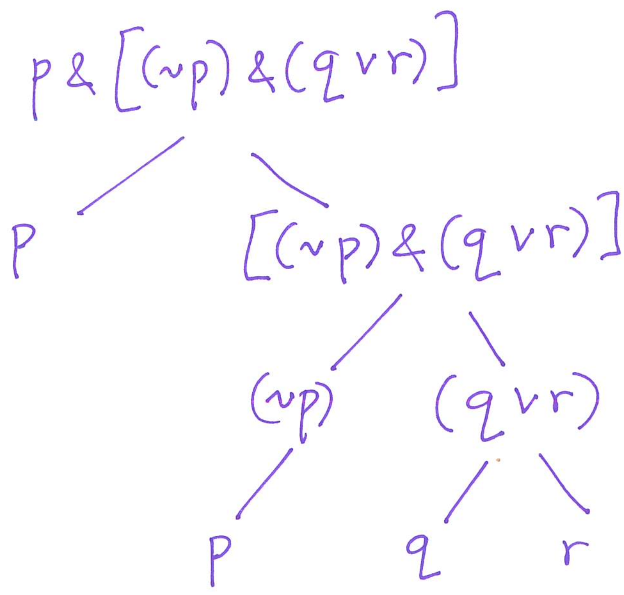
ΛΥΣΕΙΣ 3ου ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άσκηση 1. Όπως έχουμε πει στο μάθημα, αφαιρούμε σταδιακά ζεύγη παρενθέσεων, προχωρώντας από τους πιο σύνθετους στους πιο απλούς προτασιακούς τύπους, μέχρι να φτάσουμε σε προτασιακές μεταβλητές.

α)



β)



Άσκηση 2. Θα κατασκευάσουμε τους πίνακες αλήθειας για τους τρεις προτασιακούς τύπους που δίνονται. Για τον πρώτο και τον δεύτερο προτασιακό τύπο, ο πίνακας αλήθειας θα έχει

4 σειρές (αφού εμφανίζονται 2 προτασιακές μεταβλητές), ②
ενώ για τον τρίτο θα υπάρχουν 8 σειρές (αφού εμφανίζονται 3 προτασιακές μεταβλητές).

p	q	$\sim q$	$(p\&(\sim q))$
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0

ο προτασιακός τύπος $(p\&(\sim q))$ είναι ενδεχόμενο.

q	p	$(q\to p)$	$(p\to q)$	$(\sim(p\to q))$	$(q\to p)\vee(\sim(p\to q))$
1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1

ο προτασιακός τύπος $(q\to p)\vee(\sim(p\to q))$ είναι ενδεχόμενο.

p	q	r	$(p\vee q)$	$(\sim r)$	$(p\&(\sim r))$	$(p\vee q)\leftrightarrow(p\&(\sim r))$
1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	0	1	0	1

ο προτασιακός τύπος $(p\vee q)\leftrightarrow(p\&(\sim r))$ είναι ενδεχόμενο.

Άσκηση 3.

β) Έστω ότι ο προτασιακός τύπος δεν είναι ταυτολογία, δηλαδή παίρνει τιμή 0 :

$$[((\sim p)\to q)\to(\sim r)]\to(p\vee r) \qquad 0$$

Με βάση τον πίνακα αλήθειας της συνεπαγωγής, η ηγούμενη πρέπει να παίρνει τιμή 1 και η επόμενη τιμή 0:

$[((\sim p) \to q) \to (\sim r)]$ 1

$(p \vee r)$ 0.

Με βάση τον πίνακα αλήθειας της διάζευξης, πρέπει και οι δύο όροι της να πάρουν τιμή 0, δηλ. πρέπει

p 0

r 0.

Αφού η r παίρνει τιμή 0, ο προτασιακός τύπος $(\sim r)$ παίρνει τιμή 1. Άρα ο προτασιακός τύπος

$[((\sim p) \to q) \to (\sim r)]$

παίρνει τιμή 1, οποιαδήποτε τιμή και αν πάρει ο προτασ. τύπος $((\sim p) \to q)$. Αυτό σημαίνει ότι δεν έχουμε καταλήξει σε αντίφαση, οπότε πράγματι ο αρχικός προτασιακός τύπος δεν είναι ταυτολογία.

α)

p	q	r	$(\sim p)$	$(\sim r)$	$((\sim p) \to q)$	$((\sim p) \to q) \to (\sim r)$	$(p \vee r)$	ΟΛΟΣ
1	1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	0	1	1	0	1	0	0

Πράγματι φαίνεται από τον πίνακα αλήθειας ότι ο προτασιακός τύπος $[((\sim p) \to q) \to (\sim r)] \to (p \vee r)$ δεν είναι ταυτολογία.

Άσκηση 4. Θα κατασκευάσουμε κοινό πίνακα αλήθειας για τους δύο προτασιακούς τύπους και θα συγκρίνουμε τις τιμές τους. ④

p	q	$(\sim q)$	$(\sim p)$	$(p\&(\sim q))$	$((\sim p)\&(\sim q))$	$\sim((\sim p)\&(\sim q))$	1ος
1	1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	0	0

Συγκρίνοντας την τελευταία στήλη με την δεύτερη, διαπιστώνουμε ότι οι προτασιακοί τύποι της άσκησης δεν είναι λογικά ισοδύναμοι (θα έπρεπε να παίρνουν την ίδια τιμή αλήθειας σε όλες τις σειρές, αλλά αυτό δεν συμβαίνει, ~~αλλά~~ αφού στη δεύτερη σειρά ο q παίρνει τιμή 0 ενώ ο άλλος προτασιακός τύπος παίρνει τιμή 1).

Άσκηση 5.

α) $((\sim p)\&q)\vee(\sim(q\vee p)) \Leftrightarrow$ (νόμος DeMorgan)

$((\sim p)\&q)\vee((\sim q)\&(\sim p)) \Leftrightarrow$ (νόμος αντιμεταθετικότητας)

$((\sim p)\&q)\vee((\sim p)\&(\sim q)) \Leftrightarrow$ (νόμος [illegible]ριστικότητας)

$(\sim p)\&(q\vee(\sim q)) \Leftrightarrow$ (νόμος συμπληρώματος)

$(\sim p)\&T \Leftrightarrow$ (νόμος ταυτότητας)

$(\sim p)$

β) $[(p\&(\sim q))\vee((\sim p)\&q)]\vee((\sim p)\&(\sim q)) \Leftrightarrow$ (ν. προσεταιριστικ.)

$(p\&(\sim q))\vee[((\sim p)\&q)\vee((\sim p)\&(\sim q))] \Leftrightarrow$ (ν. επιμεριστικότητας)

$(p\&(\sim q))\vee[(\sim p)\&(q\vee(\sim q))] \Leftrightarrow$ (ν. συμπληρώματος)

$(p\&(\sim q))\vee[(\sim p)\&T] \Leftrightarrow$ (ν. ταυτότητας)

$(p \& (\sim q)) \vee (\sim p) \Leftrightarrow$ (ν. αντιμεταθετικότητας)

$(\sim p) \vee (p \& (\sim q)) \Leftrightarrow$ (ν. επιμεριστικότητας)

$((\sim p) \vee p) \& ((\sim p) \vee (\sim q)) \Leftrightarrow$ (ν. αντιμεταθετικότητας)

$(p \vee (\sim p)) \& ((\sim p) \vee (\sim q)) \Leftrightarrow$ (ν. συμπληρώματος)

$T \& ((\sim p) \vee (\sim q)) \Leftrightarrow$ (ν. αντιμεταθετικότητας)

$((\sim p) \vee (\sim q)) \& T \Leftrightarrow$ (ν. ταυτότητας)

$(\sim p) \vee (\sim q)$

(για επιβεβαίωση, μπορούμε να ελέγξουμε με πίνακα αλήθειας ότι ο προτασιακός τύπος

$$[(p \& (\sim q)) \vee ((\sim p) \& q)] \vee ((\sim p) \& (\sim q))$$

είναι λογικά ισοδύναμος με τον προτασιακό τύπο

$$(\sim p) \vee (\sim q)$$).