Ernst Mally: Elemente des Sollens. Grundgesetze der Logik des Willens, Leuschner & Lubensky, Graz, 1926. (1)

Deontik: p soll sein (όχι tunsollen)

Σύμβολα συστήματος E. Mally

Για Μάθημα 17/1/2024

(α) προτασιακές μεταβλητές

(β) σύνδεσμοι

(γ) παρενθέσεις

(δ) τελεστής O (ought ή obligatory, ο Mally είχε !)

(ε) προτασιακές σταθερές:

u (unconditionally, actually, tatsächlich & obligatory)

n (άρνηση του u), W (the facts, what is the case)

m (das Untatsächliche, what is not the case)

(στ) υπαρξιακός ποσοδείκτης $\exists$

Αξιώματα Mally

MA1. $[(P \to OQ) \,\&\, (Q \to R)] \to (P \to OR)$

MA2. $[(P \to OQ) \,\&\, (P \to OR)] \to [P \to O(Q \,\&\, R)]$

MA3. $(P \to OQ) \leftrightarrow O(P \to Q)$

MA4. $\exists u\, Ou$

MA5. $\sim(u \to On)$

Αρχές για σταθερές Mally

(i) για κάθε P, $P \to W$

(ii) για κάθε P, $m \to P$.

P, Q, R είναι τυχόντες προτασιακοί τύποι του συστήματος του Mally.

Karl Menger (1902–1985)
Αυστρο-Αμερικανός μαθηματικός, γιος του οικονομολόγου Carl Menger, ιδρυτή της Αυστριακής Σχολής Οικονομικών

K. Menger: A logic of the doubtful: On operative and imperative logic, in K. Menger (ed.), Reports of a Mathematical Colloquium, 2nd series, 2nd issue, pp. 53-64, Indiana University Press, 1939.

Στο σύστημα του Mally αποδεικνύεται ότι

$$P \leftrightarrow OP.$$

"This result seems to me to be detrimental for Mally's theory, however. It indicates that the introduction of the sign ! is superfluous in the sense that it may be cancelled or inserted in any formula at any place we please. But this result (in spite of Mally's philosophical justification) clearly contradicts not only our use of the word "ought" but also some of Mally's own correct remarks about this concept, e.g. the one at the beginning of his development to the effect that $p \rightarrow (!q \text{ or } !r)$ and $p \rightarrow !(q \text{ or } r)$ are not equivalent. Mally is quite right that these two propositions are not equivalent according to the ordinary use of the word "ought". But they are equivalent according to his theory by virtue of the equivalence of p and $!p$."

Στο σύστημα του Mally, αποδεικνύεται ότι ισχύει $OP \to P$, για κάθε προτασιακό τύπο P.
Θα χρησιμοποιήσουμε τα τρία αξιωματικά σχήματα και τον κανόνα Modus Ponens του προτασιακού λογισμού, τα αξιώματα του Mally και κάποια "θεωρήματα του προτασιακού λογισμού", δηλαδή, προτασιακούς τύπους που αποδεικνύονται μόνο με βάση τα αξιωματικά σχήματα και τον κανόνα Modus Ponens.

1. $[(u \to OP) \& (P \to n)] \to (u \to On)$ αξίωμα MA1

2. $\sim(u \to On)$ αξίωμα MA5

3. $\sim(u \to On) \to \sim[(u \to OP) \& (P \to n)]$ από προτασιακό λογισμό και τον τύπο 1

(επεξήγηση: από τον προτασιακό λογισμό είναι γνωστό ότι κάθε τύπος της μορφής $Q \to R$ είναι ισοδύναμος με τον τύπο $\sim R \to \sim Q$. Θέτοντας ως Q τον $[(u \to OP) \& (P \to n)]$ και ως R τον τύπο $(u \to On)$, με βάση τον τύπο στο 1, που είναι της μορφής $Q \to R$, προκύπτει ο τύπος στο 3, που είναι της μορφής $\sim R \to \sim Q$)

4. $\sim[(u \to OP) \& (P \to n)]$ 2, 3, Modus Ponens

(επεξήγηση: ο τύπος στο 3 έχει τη μορφή $Q \to R$ και ο τύπος στο 2 έχει τη μορφή Q, οπότε, με βάση τον κανόνα Modus Ponens, προκύπτει ο τύπος R, δηλ. ο 4)

5. $\sim(u \to OP) \vee \sim(P \to n)$ 4, προτασ. λογισμός

(επεξήγηση: είναι γνωστό ότι κάθε τύπος της μορφής $\sim(Q \& R)$ είναι ισοδύναμος με τον τύπο $\sim Q \vee \sim R$. Θέτοντας λοιπόν ως Q τον τύπο $(u \to OP)$ και ως R τον $(P \to n)$, με βάση το βήμα 4, προκύπτει το βήμα 5)

6. $(u \& \sim OP) \vee (P \& \sim n)$ από 5 και προτασ. λογισμό

(επεξήγηση: είναι γνωστό ότι κάθε τύπος της μορφής $\sim(Q \to R)$ είναι ισοδύναμος με τον τύπο $Q \& \sim R$. Θέτοντας λοιπόν ως Q τον τύπο u και ως τύπο R τον τύπο OP, από τον $\sim(u \to OP)$ προκύπτει ο τύπος $u \& \sim OP$. Όμοια, προκύπτει ο τύπος $(P \& \sim n)$ από τον $\sim(P \to n)$)

7. $(u \& \sim OP) \vee (\sim n \& P)$ από 6 και προτασ. λογισμό

(επεξήγηση: είναι γνωστό ότι κάθε τύπος της μορφής $Q \& R$ είναι ισοδύναμος με τον $R \& Q$. Θέτοντας λοιπόν ως Q τον P και ως R τον $\sim n$, προκύπτει ο τύπος $(\sim n \& P)$ από τον $P \& \sim n$ και, επομένως, ο 7 από τον 6)

8. $(u \& \sim OP) \vee (u \& P)$ από τον 7 και το γεγονός ότι, εξ ορισμού, ο u είναι ισοδύναμος με τον $\sim n$

9. $u \& (\sim OP \vee P)$ από τον 8 και προτασ. λογισμό

(επεξήγηση: είναι γνωστό ότι κάθε τύπος της μορφής $(Q \& R) \vee (Q \& S)$ είναι ισοδύναμος με τον τύπο $Q \& (R \vee S)$. Θέτοντας λοιπόν ως Q τον u, ως R τον $\sim OP$ και ως S τον P, προκύπτει ο 9 από τον 8)

10. $\sim OP \vee P$ από τον 9 με βάση τον (παραγόμενο) κανόνα απλοποίησης, σύμφωνα με τον οποίο από κάθε τύπο της μορφής $Q \& R$ μπορούμε να συμπεράνουμε τον τύπο Q ή τον τύπο R

11. $OP \to P$ από τον 10 και προτασ. λογισμό (κάθε τύπος της μορφής $\sim Q \vee R$ είναι ισοδύναμος με τον τύπο $Q \to R$)

Στο σύστημα του Mally, αποδεικνύεται ότι $P \to OP$, για κάθε προτασιακό τύπο P.
Για την απόδειξη, θα χρησιμοποιήσουμε τα αξιωματικά σχήματα του προτασιακού λογισμού, τον κανόνα Modus Ponens και τα αξιώματα του Mally.

1. $OP \to OP$ προτασ. λογισμός
2. $(OP \to OP) \to [(P \to Q) \to (OP \to OP)]$ αξ. σχήμα 1
3. $[(P \to Q) \to (OP \to OP)]$ 1, 2, MP
4. $(P \to Q) \to (P \to Q)$ προτασ. λογισμός
5. $(P \to Q) \to [(OP \to OP) \& (P \to Q)]$ 3, 4 προτ. λογισμός
6. $[(OP \to OP) \& (P \to Q)] \to (OP \to OQ)$ αξ. MA1
7. $(P \to Q) \to (OP \to OQ)$ 5, 6, προτ. λογισμός
8. $(OP \to OP) \leftrightarrow O(OP \to P)$ αξ. MA3
9. $O(OP \to P)$ 1, 8, προτ. λογισμός
10. $P \to P$ προτασ. λογισμός
11. $(P \to P) \to [(OP \to P) \to (P \to P)]$ αξ. σχήμα 1
12. $(OP \to P) \to (P \to P)$ 10, 11, Modus Ponens
13. $[(OP \to P) \to (P \to P)] \to [O(OP \to P) \to O(P \to P)]$ αδ. περ. 7
14. $O(OP \to P) \to O(P \to P)$ 12, 13, MP
15. $O(P \to P)$ 9, 14, MP
16. $(P \to OP) \leftrightarrow O(P \to P)$ αξ. MA3
17. $P \to OP$ 15, 16, MP.