Για μάθημα 29/11/2023

Αν αγοράσω iPhone, θα ξοδέψω ~~τα~~ περιεχόμενο του κουμπαρά μου. Θα πάω στην Αράχωβα για Χριστούγεννα αν και μόνον αν κρατήσω το περιεχόμενο του κουμπαρά μου. Αν δεν πάω στην Αράχωβα για Χριστούγεννα, θα διαβάσω για την εξεταστική Ιανουαρίου. Άρα θα διαβάσω για την εξεταστική Ιανουαρίου ή δεν θα αγοράσω ~~το~~ iPhone.

p: αγοράζω iPhone

q: ξοδεύω το περιεχόμενο του κουμπαρά μου

r: πάω στην Αράχωβα για Χριστούγεννα

s: διαβάζω για την εξεταστική Ιανουαρίου

1η υπόθεση: $p \rightarrow q$

2η υπόθεση: $r \leftrightarrow \sim q$

3η υπόθεση: $\sim r \rightarrow s$

Συμπέρασμα: $s \vee \sim p$

<u>Ερώτημα:</u> Είναι έγκυρη η επιχειρηματική μορφή;

<u>Σημασιολογικός έλεγχος:</u> Συνεπάγονται λογικά οι υποθέσεις το συμπέρασμα; Δηλαδή, παίρνει το συμπέρασμα τιμή 1, κάθε φορά που και οι τρεις υποθέσεις παίρνουν τιμή 1;

Κατασκευάζουμε τον κατάλληλο πίνακα αλήθειας.

$\sim p$	p	q	r	s	$\sim q$	$\sim r$	$p \to q$	$r \leftrightarrow \sim q$	$\sim r \to s$	$s \vee \sim p$
0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1

Πράγματι είναι λογικά έγκυρη η συγκεκριμένη επιχειρηματική μορφή (και το αντίστοιχο επιχείρημα).

<u>Συντακτικός ή τυπικός έλεγχος</u>: Χωρίς κατασκευή πινάκων αλήθειας, αλλά με χρήση αξιωμάτων και αποδεικτικών (ή παραγωγικών) κανόνων.

<u>1η μέθοδος</u>: semantic tableaux

<u>2η μέθοδος</u>: κανόνες φυσικής παραγωγής (natural deduction)

<u>3η μέθοδος</u>: αξιώματα και αποδεικτικός κανόνας.

Σημασιολογικοί πίνακες (semantic tableaux)

Evert W. Beth (1908-1964)

$$\begin{array}{ccc} & P \to Q & \\ \swarrow & & \searrow \\ \sim P & & Q \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \sim(P \to Q) \\ \downarrow \\ P \\ \sim Q \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \sim\sim P \\ \downarrow \\ P \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & P \vee Q & \\ \swarrow & & \searrow \\ P & & Q \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \sim(P \vee Q) \\ \downarrow \\ \sim P \\ \sim Q \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \sim(P \& Q) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \sim P & & \sim Q \end{array}$$

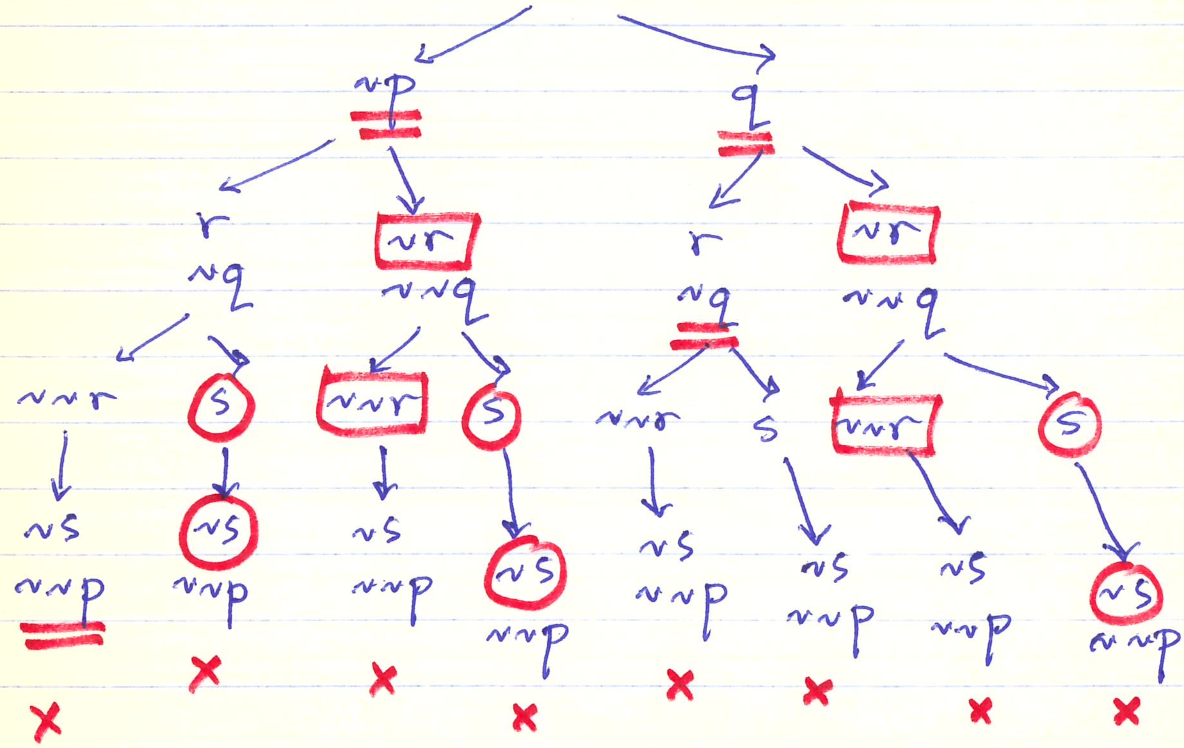
$$\begin{array}{c} P \& Q \\ \downarrow \\ P \\ Q \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & P \leftrightarrow Q & \\ \swarrow & & \searrow \\ P & & \sim P \\ Q & & \sim Q \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \sim(P \leftrightarrow Q) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \sim P & & P \\ Q & & \sim Q \end{array}$$

<u>Εφαρμογή σε παράδειγμα</u>: Για να ελέγξουμε αν από τις υποθέσεις $p \to q$, $r \leftrightarrow \sim q$, $\sim r \to s$ προκύπτει, με λογικά έγκυρο τρόπο, το συμπέρασμα $s \vee \sim p$, κατασκευάζουμε ένα "δένδρο", ξεκινώντας με τις υποθέσεις και την άρνηση του συμπεράσματος. Αν το "δένδρο" "κλείσει", τότε είναι έγκυρη η επιχειρηματική μορφή. Αν τουλάχιστον ένα "κλαδί" μένει "ανοικτό", η επιχειρηματική μορφή είναι άκυρη.

$$p \to q,\ r \leftrightarrow \sim q,\ \sim r \to s,\ \sim(s \vee \sim p)$$



Το "δένδρο" έχει όλα τα κλαδιά "κλειστά", οπότε η αρχική επιχειρηματική μορφή είναι έγκυρη.

Αντιπαράδειγμα (counter-example ή counter-model).

Αν ο αριθμός κρουσμάτων γίνει διψήφιος, θα σταματήσει το lockdown ή αν αρχίσει ο εμβολιασμός, θα σταματήσει το lockdown. Συνεπώς, αν ο αριθμός κρουσμάτων γίνει διψήφιος ή αρχίσει ο εμβολιασμός, θα σταματήσει το lockdown.

p: ο αριθμός κρουσμάτων γίνεται διψήφιος

q: αρχίζει ο εμβολιασμός

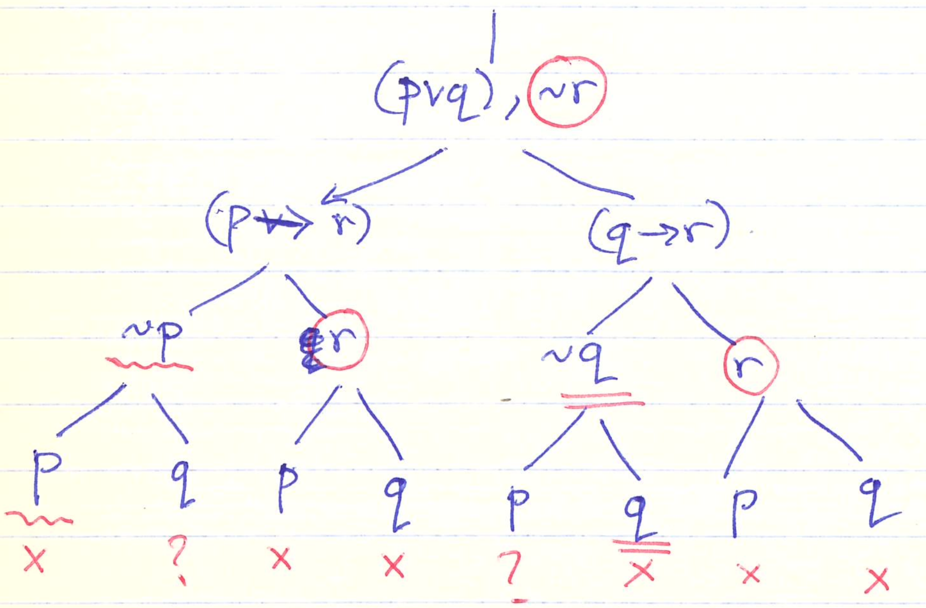
r: σταματά το lockdown

Υπόθεση: $(p \to r) \vee (q \to r)$

Συμπέρασμα: $(p \vee q) \to r$.

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο σημασιολογικών πινάκων για να ελέγξουμε τη λογική εγκυρότητα του επιχειρήματος

$$(p \to r) \vee (q \to r),\ \sim((p \vee q) \to r)$$



Δύο κλαδιά του tableau έχουν παραμείνει ανοικτά, πράγμα που σημαίνει ότι προκύπτουν "αντιπαραδείγματα", δηλαδή, αποτιμήσεις οι οποίες δίνουν τιμή 1 στην υπόθεση και, ταυτόχρονα, τιμή 0 στο συμπέρασμα.

Πράγματι, από το ανοικτό κλαδί στο αριστερό μέρος του tableau, βλέπουμε ότι, αν οι προτασιακές μεταβλητές p, r πάρουν τιμή αλήθειας 0 και η προτασιακή μεταβλητή q πάρει τιμή 1, τότε οι τύποι $p \to r$, $q \to r$, $p \vee q$ παίρνουν (αντίστοιχα) τιμή 1, 0 και 1, οπότε ο προτασιακός τύπος $(p \to r) \vee (q \to r)$ παίρνει τιμή 1, ενώ ο προτασιακός τύπος $(p \vee q) \to r$ παίρνει τιμή 0.

Προκύπτει λοιπόν ότι

$$(p \to r) \vee (q \to r) \not\models (p \vee q) \to r,$$

οπότε το αρχικό επιχείρημα είναι άκυρο.

Με άλλα λόγια, στην κατάσταση πραγμάτων, όπου

(1) ο αριθμός κρουσμάτων δεν γίνεται διψήφιος

(2) αρχίζει ο εμβολιασμός

(3) δεν σταματάει το lockdown,

θα είναι αληθής η υπόθεση, αλλά ψευδές το συμπέρασμα.

<u>Σημείωση</u>. Θα μπορούσαμε, με όμοιο τρόπο, να έχουμε χρησιμοποιήσει το άλλο ανοικτό κλαδί του tableau.

Κανόνες φυσικής παραγωγής (natural deduction)

Gerhard Gentzen (1909–1945)

$\begin{array}{c} P \to Q \\ P \\ \hline Q \end{array}$	Modus Ponens	$\begin{array}{c} P \to Q \\ \sim Q \\ \hline \sim P \end{array}$	Modus Tollens
$\begin{array}{c} P \to Q \\ Q \to R \\ \hline P \to R \end{array}$	Υποθετικός Συλλογισμός	$\begin{array}{c} P \vee Q \\ \sim P \\ \hline Q \end{array}$	Διαζευκτικός Συλλογισμός
$\begin{array}{c} P \& Q \\ \hline P \end{array}$	Απλοποίηση	$\begin{array}{c} P \\ \hline P \vee Q \end{array}$	Πρόσθεση
$\begin{array}{c} P \\ Q \\ \hline P \& Q \end{array}$	Σύζευξη		

Κατασκευάζουμε μια "τυπική απόδειξη" (formal proof) του συμπεράσματος, ξεκινώντας από τις υποθέσεις και εφαρμόζοντας κανόνες φυσικής παραγωγής (μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και οποιαδήποτε ταυτολογία).

1.	$p \to q$	υπόθεση
2.	$r \leftrightarrow \sim q$	υπόθεση
3.	$\sim r \to s$	υπόθεση
4.	$(r \to \sim q) \& (\sim q \to r)$	2, νόμος διπλής συνεπαγ.
5.	$r \to \sim q$	4, απλοποίηση
6.	$\sim\sim q \to \sim r$	5, νόμος αντιθετοαναστροφής
7.	$q \to \sim r$	6, νόμος διπλής άρνησης
8.	$p \to \sim r$	1, 7, υποθετ. συλλογισμός
9.	$p \to s$	3, 8, υποθετικός συλλογισμός
10.	$\sim p \vee s$	9, νόμος συνεπαγωγής
11.	$s \vee \sim p$	10, νόμος αντιμεταθετικότητας

Jan Łukasiewicz (1878–1956)

Αξιώματα και αποδεικτικός κανόνας

A1. $P \to (Q \to P)$

A2. $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$

A3. $(\sim Q \to \sim P) \to ((\sim Q \to P) \to Q)$.

Κανόνας Modus Ponens:

$$\frac{\begin{array}{c} P \to Q \\ P \end{array}}{Q}$$

Παράδειγμα: Ο τύπος $P \to P$ αποδεικνύεται τυπικά.
Κατασκευάζουμε την ακόλουθη τυπική απόδειξη.

1. $[P \to ((P \to P) \to P)] \to [(P \to (P \to P)) \to (P \to P)]$ προκύπτει από το Α2 με κατάλληλη αντικατάσταση
2. $P \to ((P \to P) \to P)$ προκύπτει από το Α1 με κατάλληλη αντικατάσταση
3. $(P \to (P \to P)) \to (P \to P)$ προκύπτει από τους τύπους 1 και 2, με εφαρμογή Modus Ponens
4. $(P \to (P \to P))$ προκύπτει από το Α1
5. $P \to P$ προκύπτει από τους τύπους 3 και 4 με εφαρμογή του Modus Ponens

Θεώρημα ορθότητας: Αν $\Sigma \vdash P$, τότε $\Sigma \models P$.

Θεώρημα πληρότητας: Αν $\Sigma \models P$, τότε $\Sigma \vdash P$.