ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών

ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ
86Κ026. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΥΝΟΛΩΝ
86Ύ12. ΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ

Κ. Ι. ΔΗΜΗΤΡΑΚΟΠΟΥΛΟΣ

ΑΘΗΝΑ, ΜΑΪΟΣ 2023

Κεφάλαιο 4

Λογική δηλώσεων

4.1 Η συμβολική γλώσσα

Η συμβολική γλώσσα της λογικής δηλώσεων είναι πολύ απλή και έχει μόνο τρεις κατηγορίες συμβόλων:

(α) τις δηλωτικές μεταβλητές $p, q, r, \ldots$, με τόνους, όταν χρειάζονται.

(β) το μονομελή τελεστή $\sim$ και τους διμελείς συνδέσμους $\&, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

(γ) τις παρενθέσεις (,).

Οι δηλωτικές μεταβλητές αντιπροσωπεύουν απλές (ή ατομικές) δηλώσεις της ελληνικής γλώσσας, δηλαδή, προτάσεις που μπορούν να χαρακτηριστούν ως αληθείς ή ψευδείς και δεν περιέχουν εμφανίσεις συνδετικών λέξεων/εκφράσεων, όπως "και", "ή" κτλ. Ο τελεστής $\sim$ αντιπροσωπεύει τη λέξη "δεν", όπως στην πρόταση "Ο Γιάννης δεν θα φύγει" ή την έκφραση "δεν ισχύει ότι", όπως στην πρόταση "Δεν ισχύει ότι ο Γιάννης θα φύγει". Οι σύνδεσμοι $\&, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ θεωρούνται ως αντίγραφα των ελληνικών λέξεων/εκφράσεων "και", "ή", "αν ..., τότε ...", "αν και μόνον αν". Τέλος, οι παρενθέσεις παίζουν το ρόλο σημείων στίξεως, όπως το κόμμα στην ελληνική γλώσσα.

Είναι σημαντικό ότι η λογική δηλώσεων είναι σχεδιασμένη για να αντανακλά ορισμένες κατασκευές στις φυσικές γλώσσες, όπως είναι η ελληνική. Σημειώνουμε ότι η λογική δηλώσεων μπορεί να θεωρεί ως απλή (δηλωτική) πρόταση μια πολύπλοκη συντακτικά πρόταση μιας φυσικής γλώσσας. Π.χ., η πρόταση "Το ακατάπαυστο κάπνισμα του Γιάννη έχει θυμώσει αφάνταστα τη Μαρία" δεν περιέχει κανένα από τους καθορισμένους προτασιακούς συνδέσμους κι έτσι θα αναπαρασταθεί ως μια ατομική δήλωση στη λογική δηλώσεων.

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσουμε κάτι σχετικό με την ορολογία. Θα λέμε ότι μια πρόταση όπως η "Ο Γιάννης καπνίζει" εκφράζει μια *δήλωση* ή αποτελεί μια *δηλωτική πρόταση*. Χρησιμοποιούμε τη λέξη "δήλωση" για να αποφύγουμε τη χρήση του πιο συνηθισμένου όρου "πρόταση", ο οποίος χρησιμοποιείται, μερικές φορές, στα ελληνικά για να αποδοθεί οποιοσδήποτε από τους αγγλικούς όρους "statement", "sentence", "proposition", των οποίων τα νοήματα είναι διαφορετικά[1].

Όπως στα ελληνικά, όπου με χρήση απλών δηλώσεων και συνδετικών λέξεων/εκφράσεων, κατασκευάζονται σύνθετες προτάσεις, έτσι και εδώ, μπορούμε να κατασκευάσουμε σύνθετες εκφράσεις από τα σύμβολα που αναφέρθηκαν παραπάνω, τις οποίες καλούμε "δηλωτικούς τύπους".

Ορισμός.

1. Κάθε δηλωτική μεταβλητή είναι δηλωτικός τύπος.
2. Κάθε δηλωτικός τύπος με το σύμβολο "$\sim$" (άρνηση) μπροστά του είναι επίσης δηλωτικός τύπος.
3. Κάθε δύο (όχι απαραίτητα διαφορετικοί) δηλωτικοί τύποι μπορούν να φτιάξουν έναν άλλο δηλωτικό τύπο, αν γράψουμε το σύμβολο "&" (σύζευξη) ή το "$\vee$" (διάζευξη) ή το "$\rightarrow$" (συνεπαγωγή) ή το "$\leftrightarrow$" (διπλή συνεπαγωγή ή ισοδυναμία) μεταξύ τους και περικλείσουμε το αποτέλεσμα σε παρενθέσεις.
4. Δηλωτικοί τύποι είναι μόνο οι εκφράσεις της συμβολικής γλώσσας της λογικής δηλώσεων που μπορούν να παραχθούν από πεπερασμένο πλήθος εφαρμογών των 1.–3. παραπάνω.

Στη συνέχεια, δίνουμε μερικά παραδείγματα προτασιακών τύπων, που κατασκευάζονται με βάση τον προηγούμενο ορισμό.

(4-1) p
q'
$(p \vee q)$
$\sim (p' \leftrightarrow p')$
$\sim r$
$\sim\sim r$
$(((p \& q) \vee \sim q') \rightarrow r) \leftrightarrow s)$.

Οι ακόλουθες εκφράσεις δεν είναι δηλωτικοί τύποι:

(4-2) pq
$\vee p$
$\sim \vee pq$
$p \vee q$ (λείπουν οι εξωτερικές παρενθέσεις)
$\sim (p)$ (δε χρειάζονται παρενθέσεις για ατομικούς προτασιακούς τύπους).

Σημείωση. Συνήθως παραλείπουμε τα εξωτερικά ζεύγη παρενθέσεων, για να αυξήσουμε την αναγνωσιμότητα. Π.χ., θα γράφουμε $p \vee (q \& r)$ αντί για $(p \vee (q \& r))$ (η πρώτη έκφραση μπορεί να θεωρηθεί ως άτυπη συντομογραφία της δεύτερης).

[1] Όμως, ακόμη και στα αγγλικά, μερικές φορές γίνεται σύγχυση των νοημάτων των τριών αυτών όρων και αυτός είναι ο λόγος που η λογική δηλώσεων αναφέρεται άλλοτε ως "statement logic", άλλοτε ως "sentential logic" και άλλοτε ως "propositional logic". Σχετικά με το νόημα των όρων αυτών, ο αναγνώστης μπορεί να διαβάσει το άρθρο [6].

4.2 Σημασιολογία: Τιμές και πίνακες αλήθειας

Η σημασιολογία της δηλωτικής λογικής είναι σχεδόν τόσο απλή όσο το συντακτικό της. Κάθε ατομική δήλωση υποτίθεται ότι αντιστοιχίζεται σε μια από τις *τιμές αλήθειας* 1 (που καλείται επίσης *αληθής*) ή 0 (*ψευδής*). Συστήματα με περισσότερες από δύο τιμές αλήθειας έχουν επίσης μελετηθεί, αλλά δεν θα μας απασχολήσουν εδώ. Κάθε σύνθετος δηλωτικός τύπος δέχεται επίσης μια τιμή αλήθειας που προσδιορίζεται από

(1) τις τιμές αλήθειας των συντακτικών του συνιστωσών δηλώσεων και

(2) τη συντακτική δομή του, δηλαδή, τους συνδέσμους του και τη διευθέτησή τους μέσα στον τύπο αυτό.

Π.χ., η τιμή αλήθειας του τύπου $(p\&q)$ θα προσδιοριστεί από τις τιμές αλήθειας των p και q και από τις αποκαλούμενες *αληθοσυναρτησιακές* ιδιότητες του συνδέσμου &. Οι τελευταίες δίδονται από ένα *πίνακα αλήθειας* που δίνει την τιμή αλήθειας ενός τύπου ως συνάρτηση των τιμών αλήθειας των άμεσων συστατικών του μερών όταν ο κύριος σύνδεσμος είναι ο &. Στη συνέχεια, δίνουμε τους πίνακες αλήθειας για τους πέντε συνδέσμους, μαζί με μερικές παρατηρήσεις για το πώς αυτοί συγκρίνονται με τα ελληνικά αντίγραφά τους. Με P, Q κτλ. θα συμβολίζουμε τυχόντες δηλωτικούς τύπους, ατομικούς ή σύνθετους.

Άρνηση. Η άρνηση κάνει αντίθετη την τιμή αλήθειας της δήλωσης στην οποία εφαρμόζεται. Για κάθε τύπο P, αν ο P είναι αληθής, τότε ο $\sim P$ είναι ψευδής, και, αντίστροφα, αν ο P είναι ψευδής, τότε ο $\sim P$ είναι αληθής. Αυτό συμπυκνώνεται στον πίνακα αλήθειας παρακάτω.

P	$\sim P$
1	0
0	1

Πίνακας 4-1: Πίνακας αλήθειας για την άρνηση.

Η λογική άρνηση είναι φυσικά σχεδιασμένη να αντανακλά την προτασιακή άρνηση στη φυσική γλώσσα. Στα ελληνικά, αυτό συχνά εκφράζεται με την εισαγωγή της λέξης "δεν" μέσα στη φράση. Το σημασιολογικό αποτέλεσμα είναι γενικά η παραγωγή μιας πρότασης με αντίθετη τιμή αλήθειας από την αρχική.

Σύζευξη. Αν συνδέσουμε δύο δηλωτικές προτάσεις (στα ελληνικά) με τη λέξη "και", το αποτέλεσμα είναι, γενικά, αληθές, αν και τα δύο μέρη είναι αληθή, και ψευδές, αν μόνο ένα είναι ψευδές ή και τα δύο είναι ψευδή. Ο πίνακας αλήθειας για το λογικό σύνδεσμο & κατασκευάζεται ανάλογα:

P	Q	$(P\&Q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Πίνακας 4-2: Πίνακας αλήθειας για τη σύζευξη.

Σημειώνουμε ότι οι P και Q είναι μεταβλητές που συμβολίζουν οποιονδήποτε (δηλωτικό) τύπο και ότι υπάρχουν τέσσερις σειρές στον πίνακα που αντιστοιχούν στους τέσσερις τρόπους ν' αντιστοιχίσουμε δύο τιμές αλήθειας ανεξάρτητα σε δύο δηλώσεις.

Όπως αναμένουμε, υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες το & δεν αντιστοιχεί ακριβώς στην ελληνική προτασιακή σύζευξη. Η τελευταία φέρει μερικές φορές μια χρονική έννοια που λείπει από το λογικό σύνδεσμο όπως, π.χ., στις προτάσεις "Ο Γιάννης έκανε μπάνιο και ντύθηκε", "Ο Γιάννης ντύθηκε και έκανε μπάνιο". Στη δηλωτική λογική, ο τύπος $(p\&q)$ έχει πάντα την ίδια τιμή αλήθειας με τον τύπο $(q\&p)$. Επιπλέον, ενώ ο $(p\&p)$ είναι απόλυτα σωστά σχηματισμένος (και έχει την ίδια τιμή αλήθειας με τον p), μια πρόταση όπως η "Ο Γιάννης καπνίζει και ο Γιάννης καπνίζει" είναι παράξενη και θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί μόνο σε ειδικές συνθήκες (ίσως ως γραφικός τρόπος να πούμε ότι ο Γιάννης καπνίζει ακατάπαυστα).

Όταν μεταφράζουμε από τα ελληνικά στη δηλωτική λογική τον προτασιακό σύνδεσμο "αλλά" συχνά τον αποδίδουμε ως &. Έτσι, η δήλωση "Ο Γιάννης καπνίζει αλλά η Τζένη ροχαλίζει" ίσως μεταφραστεί ως $(p\&q)$, όπου το σύμβολο & δεν φέρει καμιά έννοια αντίθεσης ή αίσθησης απροσδόκητου, όπως ο ελληνικός σύνδεσμος. Παρόμοιες παρατηρήσεις θα μπορούσαν να γίνουν για τις φράσεις "εν τούτοις", "αν και", "παρά το γεγονός ότι" και παρόμοιες.

Η ελληνική λέξη "και" χρησιμοποιείται και για συνένωση ονομάτων, ρημάτων κτλ. Π.χ.,"Ο Γιάννης και η Μαρία καπνίζουν και πίνουν", αλλά τίποτε στη λογική γλώσσα μας δεν αντιστοιχεί σ' αυτή τη χρήση (υπενθυμίζουμε ότι αγνοούμε την εσωτερική δομή των απλών προτάσεων). Μερικές φορές, προτάσεις που περιέχουν σύζευξη μπορούν να θεωρηθούν ως ελλειπτικές μορφές προτασιακών συζεύξεων. Π.χ., η πρόταση "Ο Γιάννης και η Μαρία καπνίζουν" μπορεί να θεωρηθεί ως συντομευμένη μορφή της πρότασης "Ο Γιάννης καπνίζει και η Μαρία καπνίζει" και έτσι να μεταφραστεί σε κάτι όπως ο τύπος $(p\&q)$. Δεν μπορούν, όμως, όλες οι περιπτώσεις φραστικών συζεύξεων να ιδωθούν με τον ίδιο τρόπο, όπως φαίνεται από παραδείγματα, π.χ., από την πρόταση "Η Μαρία ανακάτεψε κόκκινο και μπλε χρώμα".

Διάζευξη. Ο λογικός σύνδεσμος $\vee$ έχει τον ακόλουθο πίνακα αλήθειας:

P	Q	$(P \vee Q)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Πίνακας 4-3: Πίνακας αλήθειας για τη διάζευξη.

Έτσι, η διάζευξη δύο δηλώσεων είναι αληθής, αν τουλάχιστον ένα από τα μέρη είναι αληθές, και είναι ψευδής, αν και τα δύο μέρη ψευδή. Χονδρικά το ελληνικό αντίστοιχο είναι ο προτασιακός σύνδεσμος "ή", όπως στην πρόταση "Ο Γιάννης καπνίζει ή η Τζένη ροχαλίζει". Ο λογικός σύνδεσμος είναι η καλούμενη *εγκλειστική διάζευξη*, που είναι αληθής όταν και τα δύο μέρη είναι αληθή. Θεωρείται γενικά ότι το ελληνικό "ή" έχει επίσης μια αποκλειστική έννοια, που αποκλείει τη δυνατότητα να είναι και τα δύο μέρη αληθή ("Μπορείτε να φάτε σούπα ή μπορείτε να φάτε σαλάτα, αλλά όχι και τα δύο").

Είναι όμως αμφιλεγόμενο, αν η ελληνική λέξη είναι πράγματι ασαφής ή αν η έννοια εγκλεισμού ή αποκλεισμού τέτοιων διαζευκτικών προτάσεων καθορίζεται με βάση το πλαίσιο συζήτησης και άλλους ρεαλιστικούς παράγοντες. Οι λατινικές λέξεις "vel" και "aut" έχουν συχνά αναφερθεί ως παραδείγματα διαζεύξεων σε φυσική γλώσσα που φέρουν, αντίστοιχα, την εγκλειστική κι αποκλειστική έννοια, αλλά ακόμα και εδώ τα πράγματα δεν είναι εντελώς σαφή. Σε κάθε περίπτωση, ο λογικός σύνδεσμος $\vee$ είναι ξεκάθαρα εγκλειστικός, όπως φαίνεται από την πρώτη σειρά του πίνακα αλήθειας. Δεν υπάρχει συνηθισμένο σύμβολο για την αποκλειστική λογική διάζευξη, αλλά, αν υπήρχε, ο πίνακας αλήθειάς του θα ήταν όπως ο πίνακας 4-3, με τη διαφορά ότι θα είχε 0 στην πρώτη σειρά.

Παρατηρήσεις παρόμοιες με αυτές που έγιναν στην περίπτωση της σύζευξης μπορούν να γίνουν για τη διάζευξη. Π.χ., η πρόταση "Ο Γιάννης ή η Μαρία καπνίζει" μπορεί να θεωρηθεί ως ελλειπτική μορφή για την πρόταση "Ο Γιάννης καπνίζει ή η Μαρία καπνίζει" και συνεπώς μπορεί να αναπαρασταθεί ως $(p \vee q)$. Μια προβληματική περίπτωση είναι η πρόταση "Ένας γιατρός ή οδοντογιατρός μπορεί να γράφει συνταγές", όπου η πρόθεση ερμηνείας είναι ότι και οι γιατροί και οι οδοντογιατροί μπορούν να γράφουν συνταγές (θα ήταν ψευδής, αν οι γιατροί μπορούσαν, ενώ οι οδοντογιατροί δεν μπορούσαν, ας πούμε). Έτσι, η καλύτερη μετάφραση γι' αυτήν την πρόταση θα ήταν της μορφής $(p\&q)$, όχι $(p \vee q)$.

Συνεπαγωγή. Ο σύνδεσμος "αν ..., τότε ..." χρησιμοποιείται στα ελληνικά με ένα πλήθος διαφορετικών τρόπων και έχει γίνει αντικείμενο πολλών συζητήσεων. Ο αντίστοιχος στη λογική γλώσσα μας, ο $\rightarrow$, μοιράζεται ένα κρίσιμο χαρακτηριστικό με όλες τις χρήσεις σε φυσική γλώσσα, δηλαδή, ότι όταν η "αν"-δήλωση (η ηγούμενη) είναι αληθής και η "τότε"-δήλωση (η επόμενη) είναι ψευδής, ολόκληρη η συνεπαγωγική δήλωση είναι ψευδής. Π.χ., η πρόταση "Αν η Μαρία είναι στο πάρτυ, τότε ο Γιάννης είναι (επίσης) στο πάρτυ" είναι ψευδής, αν η Μαρία είναι στο πάρτυ, αλλά ο Γιάννης δεν είναι. Αυτό αντανακλάται στη δεύτερη σειρά του πίνακα αλήθειας για τον $\rightarrow$:

P	Q	$(P \rightarrow Q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Πίνακας 4-4: Πίνακας αλήθειας για τη συνεπαγωγή.

Η $(P \rightarrow Q)$ είναι αληθής σε όλες τις άλλες περιπτώσεις και αυτή η πλευρά της σημασιολογίας της συνεπαγωγής είναι η πιο αμφιλεγόμενη. Αν ρωτηθούμε για την τιμή αλήθειας της πρότασης "Αν η Μαρία είναι στο πάρτυ, τότε ο Γιάννης είναι (επίσης) στο πάρτυ" στην περίπτωση που η Μαρία δεν είναι στο πάρτυ, ίσως προβληματιστούμε. Ίσως πούμε ότι η συνεπαγωγική δήλωση δεν έχει σαφώς καθορισμένη τιμή αλήθειας ή ότι δεν προκύπτει ερώτημα για την τιμή αλήθειας της. Ακόμα και στην περίπτωση που και η Μαρία και ο Γιάννης δεν είναι στο πάρτυ, ίσως διστάσουμε να πούμε ότι η συνεπαγωγή είναι αληθής, αφού θα αναμέναμε να προσδιοριστεί κάποια λογική ή αιτιώδης σύνδεση μεταξύ της ηγουμένης και της επομένης, πριν μπορέσουμε να προσδιορίσουμε την πραγματική τιμή αλήθειας. Εδώ φαίνεται ότι έχουμε μια περίπτωση, όπου οι ελληνικοί και οι λογικοί σύνδεσμοι διαφέρουν πολύ. Πώς μπορούμε να δικαιολογήσουμε την επιλογή μας της τιμής 1 (αληθής) σ' αυτές τις περιπτώσεις;

Η απάντηση μπορεί να δικαιολογηθεί με δύο τρόπους:

- Σε μια δίτιμη λογική, αν μια δήλωση δεν είναι ψευδής, τότε πρέπει να είναι αληθής - δεν υπάρχει καμιά άλλη επιλογή.
- Αυτός ο ορισμός της συνεπαγωγής αρκεί για την ανάλυση έγκυρων και άκυρων επιχειρημάτων στα μαθηματικά και έτσι φέρει το βάρος της παράδοσης.

Δεν ισχύει όμως αυτό χωρίς μερικές ενοχλητικές και, μερικές φορές, παράδοξες περιπτώσεις.

Διπλή συνεπαγωγή. Ο πίνακας αλήθειας για τη διπλή συνεπαγωγή είναι ο ακόλουθος:

P	Q	$(P \leftrightarrow Q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Πίνακας 4-5: Πίνακας αλήθειας για τη διπλή συνεπαγωγή.

Ελληνικές εκφράσεις που μεταφράζονται ως διπλή συνεπαγωγή είναι οι "αν και μόνον αν", "μόνο στην περίπτωση που" και "ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ισχύει". Μερικές φορές είναι δύσκολο να κρίνουμε, αν μερικές δηλώσεις στη συνήθη γλώσσα θα έπρεπε να παρασταθούν από τη συνεπαγωγή ή τη διπλή συνεπαγωγή. Π.χ., η δήλωση "Θα φύγω αύριο, αν μου επισκευάσουν το αυτοκίνητο" ίσως σημαίνει ότι η επισκευή του αυτοκινήτου είναι ικανή συνθήκη για να φύγω αύριο (αν και ίσως αναχωρήσω οπωσδήποτε αύριο), αλλά ίσως προορίζεται να σημαίνει ότι η επισκευή του αυτοκινήτου είναι όχι μόνο ικανή, αλλά επίσης αναγκαία συνθήκη για να φύγω αύριο (δηλαδή, δεν θα φύγω αύριο, εκτός αν το αυτοκίνητο επισκευαστεί). Η δεύτερη ερμηνεία επιβάλλεται, όταν ο σύνδεσμος είναι "αν και μόνον αν": "Θα φύγω αύριο αν και μόνον αν μου επισκευάσουν το αυτοκίνητο". Στα μαθηματικά, αυτός ο σύνδεσμος συχνά γράφεται σύντομα ως "ανν". Τυπικοί ορισμοί μαθηματικών όρων πάντα τον χρησιμοποιούν. Η συνηθισμένη μορφή είναι

(4-3) Το X καλείται Y (ή είναι Y) ανν το X έχει την ιδιότητα P.

Η χρήση του "αν" αντί για "ανν" θα άφηνε ανοικτό το ενδεχόμενο ότι το X ίσως επίσης καλείται Y και σε άλλες περιπτώσεις. Το "αν και μόνον αν" δίνει ένα σωστό ορισμό, περιορίζοντας τα X που καλούνται Y μόνο σε αυτές τις περιπτώσεις που το X έχει την ιδιότητα P.

Οι πίνακες αλήθειας παρέχουν μια γενική και συστηματική μέθοδο να υπολογίζουμε την τιμή αλήθειας οποιασδήποτε δήλωσης, όσο πολύπλοκη κι αν είναι. Ο αριθμός των γραμμών στον πίνακα αλήθειας καθορίζεται από την απαίτηση να ληφθούν υπόψη όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί τιμών αλήθειας ατομικών δηλώσεων. Γενικά, υπάρχουν 2^n γραμμές όταν εμπλέκονται n ατομικές δηλώσεις. Η σειρά υπολογισμού της τιμής των συνιστωσών δηλώσεων είναι από την πιο βαθιά τοποθετημένη προς την πιο εξωτερικά τοποθετημένη. Έτσι, για να κατασκευάσουμε ένα πίνακα αλήθειας για τη δήλωση $((p\&q)\rightarrow \sim (p\vee r))$, προχωρούμε ως εξής:

(α) κατασκευάζουμε στήλες για τις ατομικές δηλώσεις p, q και r,

(β) κατασκευάζουμε στήλες για τις δηλώσεις $(p\&q)$ και $(p\vee r)$,

(γ) κατασκευάζουμε στήλη για τη δήλωση $\sim(p\vee r)$, παίρνοντας τις αντίθετες των τιμών για τη δήλωση $(p\vee r)$,

(δ) κατασκευάζουμε τη στήλη αλήθειας για την πλήρη δήλωση, εφαρμόζοντας τον πίνακα συνεπαγωγής στη στήλη της $(p\&q)$ και στη στήλη της $\sim(p\vee r)$.

Η πλήρης διαδικασία φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα.

p	q	r	$(p\&q)$	$(p\vee r)$	$\sim(p\vee r)$	$((p\&q)\rightarrow\sim(p\vee r))$
1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	0	0	1	1

Πίνακας 4-6: Πίνακας αλήθειας για τη δήλωση $((p\&q)\rightarrow\sim(p\vee r))$.

Προφανώς οι πίνακες αλήθειας μπορεί να γίνουν πολύπλοκοι, όταν εμπλέκονται περισσότερες από τρεις ατομικές δηλώσεις, και εύκολα γίνονται σφάλματα γραφής. Αλλά κατ' αρχήν μπορούμε να κατασκευάσουμε τον πλήρη πίνακα, για κάθε σύνθετη δήλωση.

4.3 Ταυτολογίες, αντιφάσεις και ενδεχόμενα

Οι δηλώσεις μπορούν να ταξινομηθούν, ως προς τους πίνακες αλήθειας, σε τρεις κατηγορίες:

(α) *ταυτολογίες*, που είναι δηλώσεις που έχουν πάντα τιμή αλήθειας 1, οποιαδήποτε κι αν είναι η αρχική αντιστοίχιση τιμών αλήθειας στις ατομικές δηλώσεις τους β) *αντιφάσεις*, που είναι δηλώσεις που έχουν πάντα τιμή αλήθειας 0, οποιαδήποτε κι αν είναι η αρχική αντιστοίχιση τιμών αλήθειας στις ατομικές δηλώσεις τους

γ) *ενδεχόμενα*, που είναι δηλώσεις που παίρνουν τουλάχιστον μία φορά τιμή 1 και τουλάχιστον μία φορά τιμή 0.

Μερικά παραδείγματα από το κάθε είδος δηλώσεων είναι τα ακόλουθα:
ταυτολογίες: $(p \vee \sim p)$, $(p \rightarrow p)$, $(p \rightarrow (q \rightarrow p))$, $\sim(p \& \sim p)$
αντιφάσεις: $\sim(p \vee \sim p)$, $(p \& \sim p)$, $\sim((p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p))$
ενδεχόμενα: p, $(p \vee p)$, $((p \vee q) \rightarrow q)$, $((p \rightarrow q) \rightarrow p)$.

Ας δούμε, π.χ., τους πίνακες αλήθειας για τις δηλώσεις $(p \vee \sim p)$, $(p \& \sim p)$:

p	$\sim p$	$(p \vee \sim p)$
1	0	1
0	1	1

Πίνακας 4-7: Πίνακας αλήθειας για την ταυτολογία $(p \vee \sim p)$.

p	$\sim p$	$(p \& \sim p)$
1	0	0
0	1	0

Πίνακας 4-8: πίνακας αλήθειας για την αντίφαση $(p \& \sim p)$.

Μια σημαντική ιδιότητα των ταυτολογιών και των αντιφάσεων είναι ότι μπορούμε ν' αντικαταστήσουμε τις ατομικές δηλώσεις που εμφανίζονται σ' αυτές με οποιεσδήποτε δηλώσεις, χωρίς να επηρεάσουμε την τιμή αλήθειας της αρχικής έκφρασης. Π.χ., αν στην ταυτολογία $(p \vee \sim p)$ αντικαταστήσουμε την p με τη δήλωση $(q \rightarrow r)$, η έκφραση που προκύπτει, δηλαδή, η $((q \rightarrow r) \vee \sim(q \rightarrow r))$ είναι πάλι ταυτολογία, όπως φαίνεται στον Πίνακα 4-9. Γενικά, η αντικατάσταση της p στην $(p \vee \sim p)$ από την τυχούσα δήλωση Q παράγει μια δήλωση της μορφής $(Q \vee \sim Q)$. Οποιαδήποτε κι αν είναι η τιμή αλήθειας της Q σε οποιαδήποτε συγκεκριμένη γραμμή, η τιμή αλήθειας της $\sim Q$ είναι η αντίθετη, οπότε η μία πρέπει να είναι αληθής και η άλλη ψευδής. Η διάζευξη των Q και $\sim Q$ είναι συνεπώς αληθής σε κάθε γραμμή του πίνακα αλήθειας. Επειδή η Q μπορεί να είναι απολύτως οποιαδήποτε δήλωση, βλέπουμε ότι αυτή η ταυτολογία (στην πραγματικότητα, κάθε ταυτολογία) είναι αληθής λόγω της μορφής της, δηλαδή, της διευθέτησης των (ατομικών) δηλώσεων και των συνδέσμων και όχι λόγω των συγκεκριμένων δηλώσεων από τις οποίες είναι κατασκευασμένη. Οι ίδιες σκέψεις εφαρμόζονται, λέξη προς λέξη, στις αντιφάσεις.

q	r	$(q \rightarrow r)$	$\sim(q \rightarrow r)$	$((q \rightarrow r) \vee \sim(q \rightarrow r))$
1	1	1	0	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

Πίνακας 4-9: Πίνακας που δείχνει ότι η $((q \rightarrow r) \vee \sim(q \rightarrow r))$ είναι ταυτολογία.

Συχνά είναι πολύ σημαντικό να ξέρουμε αν μια συγκεκριμένη δήλωση είναι ή όχι ταυτολογία, αλλά, αφού οι μεγάλοι πίνακες αλήθειας είναι άβολοι, υπάρχει μια απλή δοκιμασία "γρήγορης διάψευσης (ή ψευδοποίησης)", που ψάχνει συστηματικά για μια γραμμή στην οποία η τελική τιμή είναι 0. Αν το ψάξιμο ολοκληρωθεί, χωρίς να βρεθεί καμιά τέτοια γραμμή, τότε ξέρουμε στα σίγουρα ότι η δήλωση υπό εξέταση είναι ταυτολογία. Η μέθοδος αυτή είναι μια εφαρμογή της γενικής μεθόδου της *απαγωγής σε άτοπο*. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια γραμμή με τελική τιμή 0 και συλλογιζόμαστε "προς τα πίσω", ξεκινώντας από αυτή την υπόθεση για να βρούμε μια αντιστοίχιση τιμών αλήθειας στις ατομικές δηλώσεις, χωρίς να συναντήσουμε αλληλοσυγκρουόμενες αντιστοιχίσεις.

Παράδειγμα. Ας ελέγξουμε ότι η δήλωση $(p \to (q \to p))$ είναι ταυτολογία. Αρχίζουμε υποθέτοντας ότι υπάρχει γραμμή με τελική τιμή 0. Γράφουμε το 0 κάτω από τον κύριο σύνδεσμο, δηλαδή, τον τελευταίο που προστέθηκε κατά την κατασκευή του τύπου.

$$\begin{array}{ccc}(p & \to & (q \to p))\\ & 0 & \end{array}$$

Ξεκινώντας από αυτή την υπόθεση, συμπεραίνουμε ότι η ηγούμενη αυτής της συνεπαγωγής είναι αληθής και η επόμενη ψευδής, αφού αυτή είναι η μόνη 0 - περίπτωση για συνεπαγωγές.

$$\begin{array}{ccccc}(p & \to & (q & \to & p))\\ 1 & 0 & & 0 & \end{array}$$

Κατόπιν συμπληρώνουμε την 1 - αντιστοίχιση για την p παντού (αφού η αντιστοίχιση τιμών αλήθειας πρέπει να είναι ομοιόμορφη).

$$\begin{array}{ccccc}(p & \to & (q & \to & p))\\ 1 & 0 & & 0 & 1\end{array}$$

Εξετάζοντας τώρα τον πίνακα, βλέπουμε ότι υπάρχουν αλληλοσυγκρουόμενες αντιστοιχίσεις: από τη μια πλευρά, η $(q \to p)$ θάπρεπε να είναι ψευδής, αλλά, από την άλλη, αυτό δεν μπορεί να ισχύει, αφού η p είναι αληθής, και η $(q \to p)$ μπορεί να είναι ψευδής, με βάση τον πίνακα για τις συνεπαγωγές. Συνεπώς μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η αρχική υπόθεση ότι υπάρχει μια γραμμή, στον πίνακα αλήθειας αυτής της δήλωσης, που τελειώνει με ψεύδος είναι η ίδια ψευδής. Άρα όλες οι γραμμές έχουν τιμή 1, δηλαδή, η δήλωση $(p \to (q \to p))$ είναι ταυτολογία.

Ας κάνουμε από την αρχή μέχρι το τέλος άλλο ένα παράδειγμα, με την πολύ όμοια, αλλά ενδεχόμενη, δήλωση $((p \to q) \to p)$.

Βήμα 1. $$\begin{array}{ccc}((p \to q) & \to & p)\\ & 0 & \end{array}$$

Βήμα 2. $$\begin{array}{ccc}((p \to q) & \to & p)\\ & 0 & 0\end{array}$$

Βήμα 3. $$\begin{array}{ccccc}((p & \to & q) & \to & p)\\ 0 & 1 & & 0 & 0\end{array}$$

Βήμα 4. $$\begin{array}{ccccc}((p & \to & q) & \to & p)\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{array}$$ ή

Βήμα 4′. $((p \;\rightarrow\; q) \;\rightarrow\; p)$
$\quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0$

Έτσι, η τιμή αλήθειας της q μπορεί να είναι ή 1 ή 0 και η διαδικασία ολοκληρώνεται χωρίς να πέσουμε σε αλληλοσυγκρουόμενες αντιστοιχίσεις. Έτσι, η δήλωση $((p\rightarrow q)\rightarrow p)$ πρέπει να είναι τουλάχιστον ενδεχόμενο, αν και μπορεί να είναι ακόμη και αντίφαση. Δεν μπορούμε να κάνουμε μια παρόμοια σύντομη δοκιμή, για να δούμε αν αυτή είναι αντίφαση, αφού θα καταλήξουμε να γράψουμε τον πλήρη πίνακα, για να ελέγξουμε όλες τις άλλες περιπτώσεις. Σημειώνουμε ότι αυτή η μέθοδος ίσως να μην εξοικονομεί πάντα χρόνο, αν εμφανίζονται πολλές δυνατές αντιστοιχίσεις, που πρέπει να ελέγξουμε, για να βρούμε μια γραμμή που τελειώνει με 0.

4.4 Λογική συνεπαγωγή, λογική ισοδυναμία και νόμοι

Αν μια δήλωση διπλής συνεπαγωγής είναι ταυτολογία, οι δύο συνιστώσες δηλώσεις είναι *λογικά ισοδύναμες*. Π.χ., ο πίνακας αλήθειας στον πίνακα 4-10 δείχνει ότι οι δηλώσεις $\sim(p\vee q)$ και $(\sim p\&\sim q)$ είναι λογικά ισοδύναμες, αφού η $(\sim(p\vee q)\leftrightarrow(\sim p\&\sim q))$ είναι ταυτολογία:

p	q	$(p\vee q)$	$\sim(p\vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p\&\sim q)$	$(\sim(p\vee q)\leftrightarrow(\sim p\&\sim q))$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Πίνακας 4-10: Πίνακας αλήθειας που δείχνει τη λογική ισοδυναμία των δηλώσεων $\sim(p\vee q)$ και $(\sim p\&\sim q)$.

Οι λογικά ισοδύναμες δηλώσεις μπορούν επίσης να χαρακτηριστούν λέγοντας ότι έχουν την ίδια τιμή αλήθειας για κάθε αντιστοίχιση τιμών αλήθειας στις ατομικές δηλώσεις (παρατηρούμε την τέταρτη και την έβδομη στήλη στον Πίνακα 4-10). Είναι φυσικά ακριβώς αυτό το γεγονός που εξασφαλίζει ότι η διπλή συνεπαγωγή που συνδέει τους δύο τύπους θα είναι πάντα αληθής.

Οι λογικά ισοδύναμες δηλώσεις είναι σημαντικές για την ανάλυση έγκυρων επιχειρηματικών μορφών, διότι μπορεί ν' αντικαταστήσουν η μία την άλλη σε οποιαδήποτε δήλωση, χωρίς να επηρεάσουν την τιμή αλήθειάς της. Π.χ., στη δήλωση $(p\vee q)$ η αντικατάσταση της p από τη λογικά ισοδύναμη $(p\&p)$ δίνει τη δήλωση $((p\&p)\vee q)$, της οποίας η τιμή αλήθειας είναι ακριβώς η ίδια με αυτή της αρχικής δήλωσης, όποια κι αν είναι αυτή. Η αντικατάσταση λογικά ισοδύναμων εκφράσεων πάντα διατηρεί την τιμή αλήθειας, δηλαδή, διατηρεί και την αλήθεια και το ψεύδος. Για να συμβολίσουμε τη λογική ισοδυναμία μεταξύ δύο αυθαίρετων δηλώσεων P και Q γράφουμε $P\Leftrightarrow Q$. Σημειώνουμε ότι αυτό το "διπλό βέλος" δεν είναι ένας νέος σύνδεσμος, αλλά ένας βολικός συμβολισμός για να εκφράσουμε ότι η $P\leftrightarrow Q$ είναι ταυτολογία.

Αν μια υποθετική δήλωση είναι ταυτολογία, τότε λέμε ότι η επόμενη είναι μια *λογική συνέπεια* της ηγούμενης ή, ισοδύναμα, ότι η ηγούμενη *συνεπάγεται λογικά* την επόμενη. Ένα παράδειγμα φαίνεται στον Πίνακα 4-11, που δείχνει ότι η q είναι λογική συνέπεια της $((p\rightarrow q)\&p)$.

p	q	$(p\rightarrow q)$	$((p\rightarrow q)\&p)$	$(((p\rightarrow q)\&p)\rightarrow q)$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

Πίνακας 4-11: Πίνακας αλήθειας που δείχνει ότι η q είναι λογική συνέπεια της $((p\rightarrow q)\&p)$.

Σε αντίθεση με τη λογική ισοδυναμία, η σχέση της λογικής συναπαγωγής διατηρεί την αλήθεια, αλλά όχι απαραίτητα το ψεύδος. Δηλαδή, αν η ηγούμενη μιας λογικής συνεπαγωγής είναι αληθής, τότε η επόμενη πρέπει επίσης να είναι αληθής (δείτε την πρώτη γραμμή του Πίνακα 4-11). Αν η ηγούμενη είναι ψευδής, δεν μπορούμε να εγγυηθούμε τίποτε για την τιμή αλήθειας της επόμενης (δείτε τις γραμμές 3-4 του Πίνακα 4-11). Η σχέση της λογικής συνεπαγωγής είναι σημαντική, όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα, αφού είναι η βάση για την κατασκευή έγκυρων επιχειρημάτων. Γράφουμε $P\Rightarrow Q$ για να υποδηλώσουμε ότι η Q είναι λογική συνέπεια της P.

Σημειώνουμε ότι, όταν $P\Rightarrow Q$ δεν μπορούμε γενικά ν' αντικαταστήσουμε την P με την Q σε ένα τύπο και να έχουμε την εγγύηση ότι η αλήθεια θα διατηρηθεί. Π.χ., δοθέντος ότι $(p\&{\sim}p)\Rightarrow p$, πράγμα που επαληθεύεται εύκολα, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $((p\&{\sim}p)\rightarrow q)\Rightarrow(p\rightarrow q)$, αντικαθιστώντας την $(p\&{\sim}p)$ με τη λογική συνέπειά της p. Στην πραγματικότητα, αν η p είναι αληθής και η q είναι ψευδής, τότε η $((p\&{\sim}p)\rightarrow q)$ θα είναι αληθής και η $(p\rightarrow q)$ ψευδής. Έτσι, οι παρατηρήσεις μας για διατήρηση της αλήθειας αναφέρονται μόνο στην αντικατάσταση ενός ολόκληρου τύπου από μια λογική συνέπεια αυτού του τύπου. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με ό,τι συμβαίνει με τη σχέση λογικής ισοδυναμίας, όπου η αντικατάσταση οποιουδήποτε υποτύπου από μια λογικά ισοδύναμη έκφραση διατηρεί την τιμή αλήθειας ολόκληρου του τύπου.

Είναι βολικό να έχουμε πρόχειρο ένα μικρό αριθμό λογικών ισοδυναμιών, από τις οποίες μπορούν να εξαχθούν όλες οι άλλες. Ο Πίνακας 4-12 δίνει εκείνους τους "νόμους" που χρησιμοποιούνται πιο συχνά, μαζί με τα ονόματά τους. Αυτός ο κατάλογος είναι πλεονασματικός, με την έννοια ότι μερικές λογικές ισοδυναμίες που περιλαμβάνει εξάγονται από άλλες, αλλά αποτελεί ένα βολικό σύνολο, με το οποίο μπορούμε να δουλεύουμε. Συμβολίζουμε με T οποιαδήποτε ταυτολογία, με F οποιαδήποτε αντίφαση και με P, Q, R οποιεσδήποτε δηλώσεις, ατομικές ή σύνθετες.

Νόμοι αυτοπάθειας	**Νόμοι προσεταιριστικότητας**
1. $(P\vee P)\Leftrightarrow P$	1. $((P\vee Q)\vee R)\Leftrightarrow(P\vee(Q\vee R))$
2. $(P\&P)\Leftrightarrow P$	2. $((P\&Q)\&R)\Leftrightarrow(P\&(Q\&R))$

Νόμοι αντιμεταθετικότητας
1. $(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$
2. $(P \& Q) \Leftrightarrow (Q \& P)$

Νόμοι επιμεριστικότητας
1. $(P \vee (Q \& R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \& (P \vee R))$
2. $(P \& (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \& Q) \vee (P \& R))$

Νόμοι ταυτότητας
1. $(P \vee F) \Leftrightarrow P$
2. $(P \vee T) \Leftrightarrow T$
3. $(P \& F) \Leftrightarrow F$
4. $(P \& T) \Leftrightarrow P$

Νόμοι συμπληρώματος
1. $(P \vee \sim P) \Leftrightarrow T$
2. $\sim\sim P \Leftrightarrow P$ (νόμος διπλής άρνησης)
3. $(P \& \sim P) \Leftrightarrow F$

Νόμοι de Morgan
1. $\sim(P \vee Q) \Leftrightarrow (\sim P \& \sim Q)$
2. $\sim(P \& Q) \Leftrightarrow (\sim P \vee \sim Q)$

Νόμοι συνεπαγωγής
1. $(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\sim P \vee Q)$
2. $(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\sim Q \rightarrow \sim P)$ (νόμος αντιθετοαναστροφής)
3. $(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow \sim(P \& \sim Q)$

Νόμοι διπλής συνεπαγωγής
1. $(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \& (Q \rightarrow P))$
2. $(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((\sim P \& \sim Q) \vee (P \& Q))$

Πίνακας 4-12: Νόμοι της λογικής δηλώσεων

Κατασκευάζοντας πίνακες αλήθειας, μπορούμε να επαληθεύσουμε τις λογικές ισοδυναμίες του Πίνακα 4-12. Π.χ., ας πάρουμε μια περίπτωση ενός νόμου συνεπαγωγής: $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$. Αν αυτοί οι δύο τύποι είναι λογικά ισοδύναμοι, η αντίστοιχη διπλή συνεπαγωγή πρέπει να είναι ταυτολογία, πράγμα που ελέγχουμε στον Πίνακα 4-13. Επιπλέον, λόγω των παρατηρήσεών μας στην προηγούμενη ενότητα, ξέρουμε ότι η $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\sim P \vee Q)$ θα είναι ταυτολογία, για οποιουσδήποτε τύπους P και Q. Άρα ισχύει ο πρώτος νόμος συνεπαγωγής.

p	q	$(p \rightarrow q)$	$\sim p$	$(\sim p \vee q)$	$((p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q))$
1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

Πίνακας 4-13: Πίνακας αλήθειας που επαληθεύει μια λογική ισοδυναμία.

Επειδή λογικά ισοδύναμες δηλώσεις μπορούν ν' αντικαταστήσουν η μία την άλλη με διατήρηση τιμών αλήθειας, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτούς τους νόμους για το μετασχηματισμό μιας δήλωσης σε μια που είναι λογικά ισοδύναμη, αλλά μικρότερης πολυπλοκότητας. Η διαδικασία μπορεί να επεξηγηθεί μ' ένα απλό παράδειγμα, δείχνοντας ότι ο τύπος: $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$ ανάγεται σε ταυτολογία. Γράφουμε το νόμο που χρησιμοποιούμε στο κάθε βήμα στα δεξιά.

(4-4)
1. $(p \rightarrow (\sim q \vee p))$
2. $(\sim p \vee (\sim q \vee p))$ νόμος συνεπαγωγής
3. $((\sim q \vee p) \vee \sim p)$ νόμος αντιμεταθετικότητας
4. $(\sim q \vee (p \vee \sim p))$ νόμος προσεταιριστικότητας
5. $\sim q \vee T$ νόμος συμπληρώματος
6. T νόμος ταυτότητας

Όπως έχουμε αναφέρει, αντικατάσταση λογικά ισοδύναμων τύπων μπορεί να γίνει σε τύπους που περιέχονται σε μεγαλύτερους τύπους. Π.χ., ο τύπος $(p\&(q\rightarrow r))$ είναι λογικά ισοδύναμος με τον τύπο $(p\&(\sim q\vee r))$, όπου ο δεύτερος προκύπτει από τον πρώτο με αντικατάσταση του υποτύπου $(q\rightarrow r)$ από το λογικά ισοδύναμο τύπο $(\sim q\vee r)$. Επειδή λογικά ισοδύναμοι τύποι έχουν τις ίδιες τιμές αλήθειας, θα συνεισφέρουν με τον ίδιο τρόπο στις τιμές αλήθειας μεγαλύτερων τύπων, στους οποίους είναι εμφυτευμένοι. Συνεπώς η τιμή αλήθειας ενός μεγαλύτερου τύπου δεν θα επηρεαστεί από την αντικατάσταση ενός υποτύπου του από ένα λογικά ισοδύναμο τύπο. Αυτή η αρχή αναφέρεται μερικές φορές ως *Κανόνας της Αντικατάστασης*. Αυτός ο κανόνας εφαρμόζεται μόνο για την αντικατάσταση υποτύπων, δηλαδή, τύπων που είναι συντακτικές συνιστώσες μεγαλύτερων τύπων. Δεν θα επιτρεπόταν, π.χ., να μετατρέψουμε τον τύπο $(p\&(q\rightarrow r))$ στον τύπο $(q\&(p\rightarrow r))$, παραπέμποντας στη λογική ισοδυναμία των τύπων $(p\&q)$ και $(q\&p)$, αφού ο τύπος $(p\&q)$ δεν είναι συνιστώσα του $(p\&(q\rightarrow r))$.

Στον ακόλουθο μετασχηματισμό, η εφαρμογή του Κανόνα της Αντικατάστασης σημειώνεται ρητά με "(Αντικατ.)" στην τέταρτη γραμμή. Αυτός ο μετασχηματισμός δεν επιτυγχάνει απλοποίηση του αρχικού τύπου, αλλά δείχνει πώς μια από τις λογικές ισοδυναμίες, η αντιθετοαναστροφή, μπορεί ν' αποδειχθεί, χρησιμοποιώντας μερικές άλλες λογικές ισοδυναμίες. Εδώ οι P και Q είναι τυχόντες τύποι.

(4-5)	1. $(P\rightarrow Q)$	
	2. $\sim P\vee Q$	νόμος συνεπαγωγής
	3. $Q\vee\sim P$	νόμος αντιμεταθετικότητας
	4. $\sim\sim Q\vee\sim P$	νόμος συμπληρώματος (αντικατ.)
	5. $\sim Q\rightarrow\sim P$	νόμος συνεπαγωγής.

Σημειώνουμε ότι, ουσιαστικά ο ίδιος μετασχηματισμός μπορούσε να είχε δοθεί για να μετατραπεί ο τύπος $(p\rightarrow q)$ στο λογικά ισοδύναμο $(\sim q\rightarrow\sim p)$, αλλά, μια και η ισοδυναμία ισχύει κάτω από οποιεσδήποτε ομοιόμορφες αντικαταστάσεις των p και q από τύπους, μπορούμε επίσης να εκτελέσουμε το μετασχηματισμό και για τη γενική περίπτωση, δηλαδή, ως μετασχηματιστικό σχήμα.

4.5 Φυσική παραγωγή

Έχουμε δείξει μέχρι εδώ πώς συνδυάζονται συντακτικά τύποι, πώς πίνακες αλήθειας απεικονίζουν τη σημασιολογία των συνδέσμων και πώς τους χρησιμοποιούμε για να υπολογίσουμε την τιμή αλήθειας ενός σύνθετου τύπου και πώς οι λογικοί νόμοι επιτρέπουν τη μεταγραφή ενός τύπου σε ένα λογικά ισοδύναμο. Είμαστε τώρα έτοιμοι να συζητήσουμε μια ανάλυση έγκυρων επιχειρηματικών μορφών.

Μια *επιχειρηματική μορφή* αποτελείται από

(1) κάποιους τύπους που καλούνται *υποθέσεις*, οι οποίοι υποτίθεται ότι είναι αληθείς, έστω και μόνο χάριν της επιχειρηματικής μορφής, και

(2) ένα τύπο που καλείται *συμπέρασμα*, του οποίου η αλήθεια ισχυριζόμαστε ότι έπεται αναγκαία από την υποτιθέμενη αλήθεια των υποθέσεων.

Θέλουμε να χαρακτηρίσουμε τις έγκυρες επιχειρηματικές μορφές, ορίζοντας ένα σύνολο συμπερασματικών κανόνων, οι οποίοι εγγυώνται τη διατήρηση της αλήθειας (αλλά οι οποίοι μπορεί ή όχι να διατηρούν το ψεύδος). Μια επιχειρηματική μορφή καλείται *έγκυρη* αν και μόνον αν δεν υπάρχει ομοιόμορφη αντιστοίχιση τιμών αλήθειας στους ατομικούς τύπους της που κάνει όλες τις υποθέσεις αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές. Αν υπάρχει μια τέτοια αντιστοίχιση, καλούμε την επιχειρηματική μορφή *άκυρη*.

Το κριτήριο για την εγκυρότητα μπορεί να διατυπωθεί διαφορετικά, αλλά ισοδύναμα, ως εξής: αν $P_1, P_2, ..., P_n$ είναι οι υποθέσεις και Q το συμπέρασμα, ο τύπος $((P_1\&P_2\&...\&P_n)\rightarrow Q)$ είναι ταυτολογία. Αυτό ισχύει, διότι η συνεπαγωγή είναι ταυτολογική, μόνο στην περίπτωση που δεν υπάρχει δυνατότητα να έχουμε αληθή ηγούμενη και ψευδή επόμενη. Ο συσχετισμός της εγκυρότητας επιχειρηματικών μορφών με ταυτολογίες μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε τους νόμους της προηγούμενης παραγράφου, για να συμπεράνουμε ότι οποιαδήποτε ομοιόμορφη αντικατάσταση ατομικών τύπων σε μια έγκυρη επιχειρηματική μορφή παράγει μια άλλη έγκυρη επιχειρηματική μορφή.

Ας πάρουμε ένα απλό παράδειγμα ενός επιχειρήματος σε φυσική γλώσσα, που όλοι δεχόμαστε ότι είναι έγκυρο.

(4-6) Αν ο Γιάννης αγαπά τη Μαρία, τότε η Μαρία είναι ευτυχής.
<u>Ο Γιάννης αγαπά τη Μαρία.</u>
(Συνεπώς) Η Μαρία είναι ευτυχής.

Μεταφράζοντας αυτό το επιχείρημα στην τυπική μας γλώσσα, συμβολίζοντας με p τη δήλωση "Ο Γιάννης αγαπά τη Μαρία" και με q τη δήλωση "Η Μαρία είναι ευτυχής", έχουμε:

(4-7)
$$\begin{array}{l} p\rightarrow q \\ \underline{p\qquad\quad} \\ q \end{array}$$

Ο πίνακας 4-11 δείχνει ότι αυτή η επιχειρηματική μορφή είναι έγκυρη, δηλαδή, αποδεικνύεται ότι ο τύπος q είναι λογική συνέπεια του $((p\rightarrow q)\&p)$. Με βάση την αρχή της ομοιόμορφης αντικατάστασης σε ταυτολογίες, μπορούμε να πούμε ότι ο τύπος $(((P\rightarrow Q)\&P)\rightarrow Q)$ είναι ταυτολογία, για οποιουσδήποτε τύπους P και Q, και άρα η

(4-8)
$$\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ \underline{P\qquad\quad} \\ Q \end{array}$$

είναι μια έγκυρη επιχειρηματική μορφή. Καλείται παραδοσιακά *Modus Ponens*.

Παρακάτω δίνουμε ένα πιο πολύπλοκο παράδειγμα:

(4-9)
$$\begin{array}{l} (\sim(r\vee s)\rightarrow t)\rightarrow(r\&t) \\ \underline{(\sim(r\vee s)\rightarrow t)\qquad\qquad\quad} \\ (r\&t) \end{array}$$

Δίνουμε επίσης ένα παράδειγμα άκυρης επιχειρηματικής μορφής:

(4-10) $p \rightarrow q$
q
$\overline{p}$

Η δοκιμασία εγκυρότητας με πίνακα αλήθειας (Πίνακας 4-14) δείχνει ότι η αντίστοιχη συνεπαγωγή δεν είναι ταυτολογία, δηλαδή, είναι δυνατό να είναι οι υποθέσεις αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές.

p	q	$(p\rightarrow q)$	$((p\rightarrow q)\&q)$	$(((p\rightarrow q)\&q)\rightarrow p)$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	0	1	0	1

Πίνακας 4-14: Πίνακας αλήθειας για τον τύπο $(((p\rightarrow q)\&q)\rightarrow p)$.

Ένα παράδειγμα επιχειρήματος στα ελληνικά, που αντιπροσωπεύεται από την επιχειρηματική μορφή στο (4-10) είναι το ακόλουθο:

(4-11) Αν Ο Γιάννης αγαπά τη Μαρία, τότε η Μαρία είναι ευτυχής.
Η Μαρία είναι ευτυχής.
Συνεπώς ο Γιάννης αγαπά τη Μαρία.

Είναι εύκολο να δούμε σ' αυτή την απλή περίπτωση ότι η αλήθεια των υποθέσεων δεν συνεπάγεται λογικά την αλήθεια του συμπεράσματος, αλλά σε πιο σύνθετες περιπτώσεις μπορεί κανείς να εξαπατηθεί και να σκεφθεί ότι το επιχείρημα είναι έγκυρο. Τέτοιες δελεαστικές άκυρες επιχειρηματολογικές μορφές καλούνται *πλάνες*. Η συγκεκριμένη πλάνη καλείται *πλάνη της επιβεβαίωσης του συμπεράσματος*. Μια παρόμοια πλάνη, που καλείται *πλάνη της άρνησης του ηγούμενου*, εξάγει από τον τύπο $(p\rightarrow q)$ και τον $\sim p$ το συμπέρασμα $\sim q$.

Αν και η εγκυρότητα οποιασδήποτε επιχειρηματικής μορφής μπορεί να προσδιοριστεί με την κατασκευή ενός πίνακα αλήθειας, είναι συχνά άβολο να το κάνουμε, ιδιαίτερα όταν αυτός περιέχει μεγάλο αριθμό ατομικών τύπων. Π.χ., ο έλεγχος μιας επιχειρηματικής μορφής που περιέχει πέντε ατομικούς τύπους θα απαιτούσε ένα πίνακα αλήθειας με 2^5 (=32) γραμμές. Μια εναλλακτική λύση είναι να αναλύσουμε την επιχειρηματική μορφή σε μια ακολουθία από απλούστερες και, αν έχουμε ήδη δείξει ότι αυτές είναι έγκυρες, μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι η αρχική μορφή είναι επίσης έγκυρη. Π.χ., για να δείξουμε την εγκυρότητα της επιχειρηματικής μορφής:

(4-12) $(p\rightarrow(q\rightarrow(r\&s)))$
p
q
$\overline{(r\&s)}$

θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι το συμπέρασμα έπεται από τις υποθέσεις με μια ακολουθία δύο εφαρμογών της έγκυρης επιχειρηματικής μορφής Modus Ponens, όπως φαίνεται παρακάτω:

(4-13) 1. $(p \to (q \to (r\&s))$
2. p
3. q
4. $(q \to (r\&s))$ από τις γραμμές 1, 2 μέσω Modus Ponens
5. $(r\&s)$ από τις γραμμές 3, 4 μέσω Modus Ponens.

Απλές έγκυρες επιχειρηματικές μορφές που μπορούν να χρησιμοποιηθούν με τον τρόπο που μόλις χρησιμοποιήσαμε τη μορφή Modus Ponens είναι γνωστές ως *συμπερασματικοί κανόνες*. Οι επτά κανόνες που παραθέτουμε στον Πίνακαι 4-15 θα αρκέσουν για όλες τις επιχειρηματικές μορφές που θα συναντήσουμε. Όπως ο πίνακας των λογικών ισοδυναμιών που δώσαμε στην προηγούμενη ενότητα, αυτός ο κατάλογος είναι πλεονασματικός, με την έννοια ότι μερικοί από τους κανόνες μπορούν να εξαχθούν από άλλους (σε συνδυασμό με κάποιες λογικές ισοδυναμίες).

Συμπερασματικοί κανόνες

Modus Ponens (MP): $$\frac{P \to Q \quad P}{Q}$$

Modus Tollens (MT): $$\frac{P \to Q \quad \sim Q}{\sim P}$$

Υποθετικός Συλλογισμός (ΥΣ): $$\frac{P \to Q \quad Q \to R}{P \to R}$$

Διαζευκτικός Συλλογισμός (ΔΣ): $$\frac{P \vee Q \quad \sim P}{Q}$$

Απλοποίηση (Απλ.): $$\frac{P\&Q}{P}$$

Πρόθεση (Πρόσθ.): $$\frac{P}{P \vee Q}$$

Σύζευξη (Σύζ.): $$\frac{P \quad Q}{P\&Q}$$

Πίνακας 4-15: Συνήθεις συμπερασματικοί κανόνες για τη λογική δηλώσεων.

Ας δούμε ένα παραδειγμα ελέγχου εγκυρότητας επιχειρηματικής μορφής, στο οποίο χρησιμοποιούνται αυτοί οι κανόνες. Οι γραμμές είναι αριθμημένες για ευκολία αναφοράς και κάθε γραμμή διαφορετική από τις υποθέσεις δικαιολογείται μέσω ενός συμπερασματικού κανόνα και των γραμμών στις οποίες εφαρμόζεται αυτός ο κανόνας.

(4-14) 1. $p \to q$
2. $p \vee s$
3. $q \to r$
4. $s \to t$
5. $\sim r$
6. $\sim q$ 3, 5, MT
7. $\sim p$ 1, 6, MT
8. s 2, 7, ΔΣ
9. t 4, 8, MP.

Η κατασκευή (4-14) καλείται *απόδειξη* του τύπου t από τις υποθέσεις στις γραμμές 1-5. Αφού οι υποθέσεις επίσης συνεπάγονται λογικά τους τύπους στις γραμμές 6, 7 και 8, αυτοί έχουν επίσης αποδειχθεί και στην πραγματικότητα θα μπορούσαμε να έχουμε σταματήσει μετά από οποιδήποτε από αυτές τις γραμμές και να έχουμε αποκαλέσει την κατασκευή μια απόδειξη του τύπου $\sim q$, του $\sim p$ ή του s - όλα εξαρτώνται από το που συγκεντρώνουμε την προσοχή μας. Σημειώνουμε όμως ότι, δοθέντων μερικών υποθέσεων και ενός υποτιθέμενου συμπεράσματος, δεν είμαστε βέβαιοι ότι υπάρχει κάποια παραγωγή που οδηγεί από τις υποθέσεις σ' αυτό το συμπέρασμα (δεν θα υπάρχει, όταν η επιχειρημτική μορφή είναι άκυρη) και ακόμα κι όταν υπάρχει μια δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι θα την βρούμε. Από την άλλη πλευρά, έχοντας μια υποψήφια απόδειξη όπως η (4-14), είναι απλό θέμα να ελέγξουμε αν πράγματι αποτελεί απόδειξη, επαληθεύοντας την παραγωγή κάθε γραμμής από προηγούμενες γραμμές, με εφαρμογή κάποιου κανόνα. Γενικά, η λογική μας παρέχει μεθόδους για τον έλεγχο αποδείξεων, αλλά όχι για την ανακάλυψή τους. Είναι αλήθεια ότι, στη δηλωτική λογική, μπορεί κάποιος πάντα να εξακριβώσει κατά πόσον ένα δοθέν συμπέρασμα έπεται από δοθείσες υποθέσεις (μπορούμε να κατασκευάσουμε τον πίνακα αλήθειας για την αντίστοιχη συνεπαγωγή), αλλά σε πιο σύνθετα συστήματα, όπως αυτό του επόμενου κεφαλαίου, δεν υπάρχει γενική μέθοδος για αυτή την εξακρίβωση.

Ας δούμε τώρα μια πιο δύσκολη απόδειξη, της οποίας η δυσκολία οφείλεται στο γεγονός ότι οι υποθέσεις δεν είναι της σωστής μορφής, για να εφαρμόσουμε κατευθείαν κάποιο συμπερασματικό κανόνα.

(4-15) Αποδείξτε τον $(p\rightarrow q)$ από τις υποθέσεις $(p\rightarrow(q\vee r))$ και $\sim r$.

1.	$(p\rightarrow(q\vee r))$	
2.	$\sim r$	
3.	$\sim p\vee(q\vee r)$	1, νόμος συνεπαγωγής.
4.	$(\sim p\vee q)\vee r$	3, νόμος προσεταιριστικότητας
5.	$r\vee(\sim p\vee q)$	4, νόμος αντιμεταθετικότητας.
6.	$\sim p\vee q$	2, 5, ΔΣ
7.	$p\rightarrow q$	6, νόμος συνεπαγωγής.

Μετατρέποντας την πρώτη υπόθεση σε ένα λογικά ισοδύναμο τύπο, με βάση τους νόμους συνεπαγωγής, προσεταιριστικότητας και αντιμεταθετικότητας, είμαστε τελικά σε θέση να εφαρμοσουμε τον ΔΣ ως τον μόνο συμπερασματικό κανόνα σ' αυτή την απόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι, η αντικατάσταση λογικά ισοδύναμων τύπων διατηρεί την τιμή αλήθειας κι έτσι, ειδικότερα, διατηρεί την αλήθεια. Επομένως, σε μια απόδειξη δεν μπορούμε να περάσουμε ποτέ από αλήθεια σε ψεύδος, αντικαθιστώντας ένα τύπο από κάποιον λογικά ισοδύναμό του, και η εγκυρότητα δεν θα επηρεαστεί.

Η ακόλουθη απόδειξη χρησιμοποιεί τον κανόνα της αντικατάστασης, για να προκύψει ένας τύπος λογικά ισοδύναμος με ένα δοθέντα:

(4-16) 1. $\sim(p\rightarrow\sim q)$

(4-16)	1. $\sim(p\rightarrow\sim q)$	
	2. $\sim r$	
	3. $\sim\sim(p\&\sim\sim q)$	1, νόμος συνεπαγωγής (αντικατάστ.)
	4. $(p\&\sim\sim q)$	3, νόμος συμπληρώματος
	5. $(p\&q)$	4, νόμος συμπληρώματος (αντικατάστ.)
	6. $((p\&q)\&\sim r)$	2, 5, Σύζευξη
	7. $(p\&(q\&\sim r))$	6, νόμος προσεταιριστικότητας
	8. $(p\&\sim\sim(q\&\sim r))$	7, νόμος συμπληρώματος (αντικατάστ.)
	9. $(p\&\sim(q\rightarrow r))$	8, νόμος συνεπαγωγής (αντικατάστ.)

Στη συνέχεια, δεν θα αναφέρουμε ρητά τον κανόνα της αντικατάστασης μέσα σε αποδείξεις, αλλά απλά θ' αναφερόμαστε στη λογική ισοδυναμία που χρησιμοποιείται για την παραγωγή αυτής της γραμμής.

Υποθετική απόδειξη

Ορισμένες αποδείξεις, των οποίων τα συμπεράσματα περιέχουν μια συνεπαγωγή ως κύριο σύνδεσμο, κατασκευάζονται πιο εύκολα με τη μέθοδο της *υποθετικής απόδειξης*. Έστω ότι μια επιχειρηματική μορφή έχει τους τύπους $P_1, ..., P_n$ ως υποθέσεις και τον τύπο $Q\rightarrow R$ ως συμπέρασμα. Σε μια υποθετική απόδειξη, προσθέτουμε τον ηγούμενο Q του συμπεράσματος ως μια επιπλέον βοηθητική υπόθεση και μετά, από τον Q και τις άλλες υποθέσεις, παράγουμε τον R. Η υποθετική απόδειξη συμπληρώνεται με την ακύρωση της βοηθητικής υπόθεσης Q και το γράψιμο του συμπεράσματος $Q\rightarrow R$. Η εγκυρότητα αυτής της αποδεικτικής μεθόδου βασίζεται στο γεγονός ότι ο τύπος $((P_1\&...\&P_n)\rightarrow(Q\rightarrow R))$ είναι λογικά ισοδύναμος με τον τύπο $((P_1\&...\&P_n\&Q)\rightarrow R)$. Ας δούμε, π.χ., μια υποθετική απόδειξη για το παράδειγμα (4-15).

(4-17) Αποδείξτε τον τύπο $(p\rightarrow q)$ από τις υποθέσεις $(p\rightarrow(q\vee r))$ και $\sim r$.

1.	$(p\rightarrow(q\vee r))$	
2.	$\sim r$	
3.	p	βοηθητική υπόθεση
4.	$q\vee r$	1, 3, M P
5.	$r\vee q$	4, νόμος αντιμεταθετικότητας
6.	q	2, 5, ΔΣ
7.	$p\rightarrow q$	3-6, υποθετική απόδειξη.

Μερικές φορές, κατασκευάζοντας μια υποθετική απόδειξη, δηλώνουμε με μια κατακόρυφη γραμμή κάθε τύπο που βασίζεται στη βοηθητική υπόθεση, για να θυμόμαστε ότι δουλεύουμε κάτω από μια ειδική πρόσθετη υπόθεση. Μια υποθετική απόδειξη πρέπει πάντα να ακυρώνει τη βοηθητική υπόθεση, πριν τελειώσει. Για προφανείς λόγους, απαγορεύεται να χρησιμοποιούμε οποιεσδήποτε γραμμές του υποθετικού μέρους της απόδειξης μετά την ακύρωση. Η ακόλουθη απόδειξη δείχνει πώς οι υποθετικές αποδείξεις εντάσσονται η μια μέσα στην άλλη.

(4-18) Αποδείξτε τον τύπο $((q\rightarrow s)\rightarrow(p\rightarrow s))$ από τον τύπο $(p\rightarrow(q\&r))$.

1. $(p \rightarrow (q \& r))$
2. $q \rightarrow s$ βοηθητική υπόθεση
3. p βοηθητική υπόθεση
4. $q \& r$ 1, 3, MP
5. q 4, απλοποίηση
6. s 2, 5, MP
7. $p \rightarrow s$ 3-6, υποθετική απόδειξη
8. $((q \rightarrow s) \rightarrow (p \rightarrow s))$ 2-7, υποθετική απόδειξη.

Ανάλογοι περιορισμοί εφαρμόζονται και σε βαθύτερα εμφυτευμένες βοηθητικές υποθέσεις. Η έξοδος από το ένα επίπεδο στο αμέσως ψηλότερο συνοδεύεται πάντα από το σχηματισμό μιας συνεπαγωγής, με ηγούμενο τύπο τη βοηθητική υπόθεση από το χαμηλότερο επίπεδο και συμπέρασμα τον τύπο που μόλις προέκυψε (π.χ., δείτε τη γραμμή 7 στο (4-18)). Χρησιμοποιώντας γραμμές από χαμηλότερα επίπεδα σε γραμμές της απόδειξης σε ψηλότερα επίπεδα επίσης απαγορεύεται (π.χ., η γραμμή 5 δεν είναι διαθέσιμη για χρήση, αφού έχουμε φύγει από το χαμηλότερο επίπεδο στη γραμμή 7). Σημειώνουμε όμως ότι γραμμές από ψηλότερα επίπεδα είναι διαθέσιμες για χρήση σε χαμηλότερα επίπεδα (π.χ., η γραμμή 1 χρησιμοποιείται για την εξαγωγή της γραμμής 4).

Βοηθητικές υποθέσεις μπορούν να είναι οποιοιδήποτε τύποι, εφ' όσον αυτοί είναι χρήσιμοι για τον τελικό σκοπό. Στο παράδειγμα (4-18) ο τύπος s δεν εμφανίστηκε πουθενά στην αρχική υπόθεση, αλλά είναι απόλυτα νόμιμος ως μέρος μιας βοηθητικής υπόθεσης.

Έμμεση απόδειξη

Οι συλλογισμοί που έχουμε δει μέχρι τώρα είναι άμεσες αποδείξεις, δηλαδή, αποδείξεις στις οποίες το συμπέρασμα παράγεται ως η τελευταία γραμμή μέσω μιας σειράς έγκυρων βημάτων. Σε μια *έμμεση απόδειξη* εισάγουμε την άρνηση του επιθυμητού συμπεράσματος ως βοηθητική υπόθεση και καταλήγουμε σε μια (οποιαδήποτε) αντίφαση. Με την υπόθεση ότι οι άλλες υποθέσεις είναι όλες αληθείς, αυτή η αντίφαση δείχνει ότι η βοηθητική υπόθεση δεν είναι αποδεκτή, οπότε προκύπτει (ή αληθεύει) η θετική μορφή της, δηλαδή, το επιθυμητό συμπέρασμα. Αυτή είναι η μέθοδος απόδειξης που καλούμε *απαγωγή σε άτοπο*. Μια απόδειξη με χρήση της μεθόδου αυτής είναι μια ειδική μορφή υποθετικής απόδειξης, αφού χρησιμοποιεί μια βοηθητική υπόθεση, η οποία είναι η άρνηση του επιθυμητού συμπεράσματος. Το συμπέρασμα δεν είναι κατ' ανάγκη συνεπαγωγή, μπορεί να είναι ακόμη και ατομικός τύπος. Ας δούμε ένα παράδειγμα.

(4-19) Αποδείξτε τον τύπο p από τους τύπους $(p \vee q)$, $(q \rightarrow r)$ και $\sim r$.

1. $p \vee q$
2. $q \rightarrow r$
3. $\sim r$
4. $\sim p$ βοηθητική υπόθεση
5. q 1, 4, ΔΣ
6. r 2, 5, Μ.Ρ

7. $r\&{\sim}r$ 3, 6, σύζευξη
8. p 4-7, έμμεση απόδειξη.

Η γραμμή 7 είναι αντίφαση, άρα η βοηθητική υπόθεση (γραμμή 4) είναι ψευδής.

Με τον ακόλουθο τρόπο μπορεί να εξηγηθεί γιατί μια έμμεση απόδειξη αποτελεί μια ειδική μορφή υποθετικής απόδειξης. Προσθέτοντας τη βοηθητική υπόθεση ${\sim}p$ στην παραπάνω απόδειξη, π.χ., εξάγουμε τον τύπο $(r\&{\sim}r)$. Με βάση τη μέθοδο υποθετικής απόδειξης, προκύπτει ο τύπος $({\sim}p{\rightarrow}(r\&{\sim}r))$. Ως επόμενη γραμμή, προσθέτουμε την ταυτολογία ${\sim}(r\&{\sim}r)$ – υπενθυμίζουμε ότι μια ταυτολογία μπορεί να προστεθεί ως έγκυρο βήμα οπουδήποτε σε οποιαδήποτε απόδειξη, αφού δεν μπορεί ποτέ να είναι ψευδής. Τέλος, παράγουμε τον τύπο ${\sim}{\sim}p$ με χρήση του κανόνα Modus Tollens, από τον οποίο προκήπτει ο τύπος p, με βάση το νόμο διπλής άρνησης.

Έμμεσες αποδείξεις μπορεί να έχουν άλλες έμμεσες αποδείξεις, καθώς και υποθετικές αποδείξεις, εμφυτευμένες σ' αυτές και, όμοια, αυτές μπορούν να εμφυτευθούν σε υποθετικές αποδείξεις. Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις, γραμμές από ένα βαθύτερα εμφυτευμένο μέρος δεν μπορούν να θεωρηθούν ως αληθείς σε ένα λιγότερο βαθιά εμφυτευμένο μέρος.

Έμμεσες αποδείξεις χρησιμοποιούνται πολύ συχνά στα μαθηματικά, όπου είναι πολύ ευκολότερο να κατασκευαστούν από μια άμεση απόδειξη. Είδαμε ένα παράδειγμα, όταν δείξαμε ότι το κενό σύνολο είναι υποσύνολο κάθε συνόλου. Υποθέτοντας την άρνηση αυτής της δήλωσης, οδηγηθήκαμε στο συμπέρασμα ότι το κενό σύνολο έχει ένα στοιχείο, πράγμα που, σε συνδυασμό με τον ορισμό του κενού συνόλου, οδηγεί σε αντίφαση. Έτσι, η υπόθεση ότι το κενό σύνολο δεν είναι υποσύνολο κάθε συνόλου ανάγεται σε μια αντίφαση και δεν μπορεί να διατηρηθεί.

Ασκήσεις

1. Μεταφράστε τις ακόλουθες δηλώσεις στη συμβολική γλώσσα της λογικής δηλώσεων, αναφέροντας ποιοί ατομικοί τύποι αντιστοιχούν σε ποιές ατομικές δηλώσεις στα ελληνικά. Σε μερικές περιπτώσεις, ίσως χρειαστεί να χρησιμοποιήσετε μια συντακτικά διαφορετική μορφή της ελληνικής πρότασης που δίνεται.

   (α) Είτε ο Γιάννης είναι σ' αυτό το δωμάτιο είτε η Μαρία είναι και ίσως είναι και οι δύο.

   (β) Η φωτιά προκλήθηκε από ένα εμπρηστή ή έγινε κάποια τυχαία έκρηξη στο λεβητοστάσιο.

   (γ) Όταν βρέχει, κάνει κατακλυσμό.

   (δ) Ο Νίκος θέλει σκύλο, αλλά η Αλίκη προτιμά τις γάτες.

   (ε) Αν ο Γιάννης γυρίσει σπίτι αργά και δεν έχει φάει για βράδυ, τότε θα ξαναζεστάνουμε το φαγητό.

(στ) Η Μάρθα δεν θα βγει για καφέ με τον Κώστα, εκτός εάν αυτός ξυρίσει το μούσι του και σταματήσει να πίνει πολύ.

(ζ) Το χρηματιστήριο αξιών ανεβαίνει, όταν η εμπιστοσύνη του κοινού στην οικονομία ανεβαίνει και μόνον τότε.

(η) Μια αναγκαία, αλλά ίσως όχι ικανή, συνθήκη για ν' αρχίσουν διαπραγματεύσεις είναι η Ρωσία να σταματήσει όλες τις επιθετικές πράξεις εναντίον της Ουκρανίας.

2. Οι ακόλουθες δηλώσεις έχουν διάφορα είδη ελλείψεων, οπότε μερικοί από τους συνδέσμους φαίνεται ότι δεν συνδέουν πλήρεις δηλώσεις. Διατυπώστε πάλι τις δηλώσεις, με τρόπο που οι σύνδεσμοι να συνδέουν δηλώσεις, και μεταφράστε τις σε συμβολικές εκφράσεις.

   (α) Ο Γιάννης και ο Βασίλης πάνε στο σινεμά, αλλά όχι ο Θωμάς.

   (β) Στην Άννα δεν αρέσουν τα κολοκύθια ή τα παντζάρια.

   (γ) Αν ούτε ο Πέτρος ούτε ο Παύλος δεν πάει στο πάρτυ, τότε ούτε εγώ θα πάω.

   (δ) Αν η Μαρία δε χάθηκε ή δεν έπαθε ατύχημα, θα είναι εδώ σε πέντε λεπτά.

   (ε) Αρκούδα ή λύκος τρόμαξε τα παιδιά.

   (στ) Ένα πάρτυ ή ένα παιχνίδι θα είχε διασκεδάσει τα παιδιά.

3. Έστω ότι οι τύποι p, q και r είναι αληθείς και ο s είναι ψευδής. Βρείτε τις τιμές αλήθειας των ακόλουθων τύπων.

$$((p\&q)\&s),\quad p{\to}s,\quad ((p\&q){\leftrightarrow}(r\&{\sim}s)),$$
$$(p\&(q\&s)),\quad s{\to}p,\quad (p{\to}(q{\to}(r{\to}s))).$$

4. Κατασκευάστε πίνακες αλήθειας για καθένα από τους ακόλουθους τύπους και βρείτε όσους είναι λογικά ισοδύναμοι μεταξύ τους.

$$(p\vee{\sim}q),\quad ((p{\leftrightarrow}q)\&p),\quad (((p{\to}q){\to}p){\to}q),$$
$${\sim}({\sim}p\&q),\quad (((p{\to}(q\vee{\sim}r))\&(p{\to}(q\vee{\sim}r))).$$

5. Για καθένα από τους ακόλουθους τύπους, χρησιμοποιείστε τη μέθοδο γρήγορης διάψευσης, για να βρείτε μια αντιστοίχιση τιμών αλήθειας στους ατομικούς τύπους, η οποία κάνει τον πλήρη τύπο ψευδή

   (α) $(p\vee q)$

   (β) $((p\vee q){\to}(p\&q)$

   (γ) $({\sim}({\sim}q\vee p)\vee(p{\to}q))$

   (δ) $(((p{\to}q){\to}r){\to}s){\to}(p{\to}q))$

   (ε) $(((p\vee q)\&(r\&s)){\leftrightarrow}(((p\&q)\&r)\&s))$.

6. Ποιοί από τους ακόλουθους τύπους είναι ταυτολογίες, ποιοί αντιφάσεις και ποιοί ενδεχόμενα;

$$(p\vee{\sim}p),\ (p\vee q),\ ((p\&q){\to}(p\vee r)),\ ({\sim}p\&{\sim}(p{\to}q)),\ ((p\vee r){\to}{\sim}p).$$

7. Μερικοί από τους λογικούς συνδέσμους μπορούν να οριστούν με τη βοήθεια των άλλων. Π.χ., ο τύπος $(p \to q)$ μπορεί να οριστεί ως συντόμευση του τύπου $(\sim p \vee q)$, αφού οι δύο αυτοί τύποι είναι λογικά ισοδύναμοι. Συνεπώς όλοι οι τύποι που περιέχουν το σύνδεσμο $\to$ θα μπορούσαν ν' αντικατασταθούν από τύπους που περιέχουν τους $\vee, \sim$.
(α) Ορίστε το σύνδεσμο $\to$ με τη βοήθεια των $\&, \sim$.
(β) Ορίστε τον $\&$ με τη βοήθεια των $\vee, \sim$.
(γ) Ορίστε το σύνδεσμο $\leftrightarrow$ με τη βοήθεια των $\to, \&$.
(Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι οι πέντε σύνδεσμοι θα μπορούσαν ν' αναχθούν στους $\vee$ και $\sim$.)
(δ) Δείξτε ότι οι πέντε σύνδεσμοι μπορούν ν' αναχθούν στους $\&$ και $\sim$.

8. Χρησιμοποιώντας τους νόμους του Πίνακα 4-12, να αναγάγετε καθένα από τους ακόλουθους τύπους στον απλούστερο λογικά ισοδύναμο τύπο.

$$(\sim p \vee (p \& q)), \quad ((\sim p \& q) \vee \sim (p \vee q)), \quad ((\sim p \& q) \leftrightarrow (p \vee q)),$$
$$(\sim p \& ((p \& q) \vee (p \& r))), \quad (((p \vee q) \& (r \vee \sim q)) \to (p \vee r)).$$

9. Δώστε μια τυπική απόδειξη εγκυρότητας για καθεμιά από τις ακόλουθες επιχειρηματικές μορφές. Σε κάποιες περιπτώσεις, μια υποθετική ή έμμεση απόδειξη θα είναι πολύ ευκολότερη από μια άμεση.

(α)
$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ \sim r \\ \hline \sim p \end{array}$$

(β)
$$\begin{array}{l} p \\ \sim r \\ (p \& \sim r) \to q \\ \hline q \end{array}$$

(γ)
$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim q \\ r \to \sim p \\ \hline \sim r \end{array}$$

(δ)
$$\begin{array}{l} p \to \sim q \\ r \to q \\ \sim r \to s \\ \hline p \to s \end{array}$$

(ε)
$$\begin{array}{l} \sim p \to q \\ r \to (s \vee t) \\ s \to \sim r \\ p \to \sim t \\ \hline r \to q \end{array}$$

(στ)
$$\begin{array}{l} p \leftrightarrow q \\ \sim p \\ (q \& \sim r) \vee t \\ (s \vee t) \to r \\ \hline r \& \sim q \end{array}$$

(ζ)
$$\begin{array}{l} \sim p \vee q \\ \sim q \& r \\ \sim (p \vee q) \to s \\ \hline r \& s \end{array}$$

(η)
$$\begin{array}{l} p \\ (p \& q) \vee (p \& r) \\ (p \vee q) \to \sim r \\ \hline p \leftrightarrow q \end{array}$$

(θ)
$$\begin{array}{l} (p \& q) \to (p \to (r \& s)) \\ (p \& q) \& u \\ \hline r \vee s \end{array}$$

(ι)
$$\begin{array}{l} p \to (q \& r) \\ q \to s \\ r \to t \\ (s \& t) \to \sim u \\ u \\ \hline \sim p \end{array}$$

(κ)
$$\begin{array}{l} p \to q \\ r \to s \\ \sim q \vee \sim s \\ p \\ (t \& u) \to r \\ \hline \sim t \vee \sim u \end{array}$$

(λ)
$$\begin{array}{l} p \vee (q \& r) \\ \sim t \\ (p \vee q) \to (s \vee t) \\ \sim p \\ \hline r \& s \end{array}$$

10. Εκφράστε τα ακόλουθα επιχειρήματα στη γλώσσα της λογικής δηλώσεων και προσδιορίστε αν είναι έγκυρες οι αντίστοιχες επιχειρηματικές μορφές.

(α) Ο μπάτλερ ή ο μάγειρος ή ο σωφέρ σκότωσε το βαρώνο. Αν ο μάγειρος σκότωσε το βαρώνο, τότε το φαγητό ήταν δηλητηριασμένο και αν ο σωφέρ σκότωσε το βαρώνο, τότε υπάρχε βόμβα στο αυτοκίνητο. Το φαγητό δεν ήταν δηλητηριασμένο και ο μπάτλερ δεν σκότωσε το βαρώνο. Συνεπώς ο σωφέρ σκότωσε το βαρώνο.

(β) Αν το άτομο δεν έχει καταλάβει τις οδηγίες ή δεν έχει τελειώσει το διάβασμα της πρότασης, τότε έχει πατήσει κάθος πλήκτρο ή έχει αποτύχει να παντήσει. Αν το άτομο έχει αποτύχει να απαντήσει, τότε το χρονόμετρο δεν έχει σταματήσει. Το άτομο έχει πατήσει το σωστό πλήκτρο και το χρονόμετρο έχει σταματήσει. Συνεπώς το άτομο κατάλαβε τις οδηγίες.

(γ) Αν η πίεση είναι 1 ατμόσφαιρα, το νερό βράζει μόνον αν η θερμοκρασία είναι τουλάχιστον 100^o C. Αν η πίεση είναι 1 ατμόσφαιρα, τότε το νερό παγώνει μόνον αν η θερμοκρασία είναι το πολύ 0^o C. Η πίεση είναι 1 ατμόσφαιρα και η θερμοκρασία είναι τουλάχιστον 100^o C ή το πολύ 0^o C. Το νερό δεν βράζει. Συνεπώς η θερμοκρασία είναι το πολύ 0^o C.

(δ) Αν είμαι τίμιος, τότε είμαι αφελής. Είμαι τίμιος ή αφελής, αλλιώς ο Γιάννης είχε δίκιο και αυτός ο εφημεριδοπώλης είναι απατεώνας. Δεν είμαι αφελής και αυτός ο εφημεριδοπώλης είναι σίγουρα απατεώνας. Συνεπώς ο Γιάννης είχε δίκιο.

11. Έστω S το ακόλουθο σύνολο προτασιακών τύπων:

$$\{p, (p\vee q), (p\vee p), (p\vee{\sim}p), (p\&(q\vee{\sim}q)), ({\sim}q\rightarrow p), (p\rightarrow(q\rightarrow p)),$$
$$({\sim}p\rightarrow q), (p\vee(q\&{\sim}q)), (p\vee(q\vee{\sim}q))\}.$$

Θεωρούμε τη σχέση $R{=}\{\langle x,y\rangle | x{\in}S$ και $y{\in}S$ και $x{\Leftrightarrow}y\}$.

(α) Δείξτε ότι η R είναι σχέση ισοδυναμίας στο S.

(β) Βρείτε τις κλάσεις ισοδυναμίας στις οποίες η R διαμερίζει το S.