Stanford Encyclopedia of Philosophy

Supplement to Deontic Logic

von Wright's 1951 System and SDL

It is fair to say that von Wright 1951 launched deontic logic as an area of active research. There was a flurry of responses, and not a year has gone by since without published work in this area. von Wright's 1951 system is an important predecessor of SDL, but the variables there ranged over *act types* not propositions. As a result, the deontic operator symbols (e.g., **OB**) were interpreted as applying not to sentences, but to names of act types (cf. "to attend" or "attending") to yield a sentence (e.g., "it is obligatory to attend" or "attending is obligatory"). So iterated deontic sequences (e.g., **OBOB**A) were not well-formed formulas and shouldn't have been on his intended interpretation, since **OB**A (unlike A) is a sentence, not an act description, so not suitable for having **OB** as a preface to it (cf. "it is obligatory it is obligatory to run" or "running is obligatory is obligatory"). However, von Wright did think that there can be negations, disjunctions and conjunctions of act types, and so he used standard connectives to generate not only complex normative sentences (e.g., **OB**A & **PE**A), but complex act descriptions (e.g., A & $\sim B$), and thus complex normative sentences involving them (e.g., **OB**(A & $\sim B$) → **PE**(A & $\sim B$)). The standard connectives of PC are thus used in a systematically ambiguous way in von Wright's initial system with the hope of no confusion, but a more refined approach (as he recognized) would call for the usual truth-functional operators and a second set of act-type-compounding analogues to these.[1] Mixed formulas (e.g., A → **OB**A) were not well-formed in his 1951 system and shouldn't have been on his intended interpretation, since if **OB**A is well-formed, then A must be a name of an act type not a sentence, but then it can't suitably be a preface to →, when the latter is followed by an item of the sentence category (e.g., **OB**A). (Cf. "If to run then it is obligatory to run.") However, this also means that the standard violation condition for an obligation (e.g., **OB**p & $\sim p$) is not expressible in his system. von Wright also rejected NEC, but otherwise accepts analogues to the basic principles of SDL.

Researchers quickly opted for a syntactic approach where the variables and operators are interpreted propositionally as they are in PC (Prior 1962 [1955], Anderson 1956, Kanger 1971 [1957], and Hintikka 1957), and von Wright soon adopted this course himself in his key early revisions of his "old system" (e.g., von Wright 1968, 1971 (originally published in 1964 and 1965, respectively). Note that this is essentially a return to the approach in Mally's Deontic Logic of a few decades before.

Return to Deontic Logic.

Library of Congress Catalog Data: ISSN 1095-5054

Standard Deontic Logic (SDL)

A1. Όλες οι ταυτολογίες (TAUT)

A2. $OB(P \to Q) \to (OBP \to OBQ)$ (OB-K)

A3. $OBP \to \sim OB \sim P$ (OB-D)

R1. Αν $\vdash P$ και $\vdash P \to Q$, τότε $\vdash Q$. (Modus Ponens)

R2. Αν $\vdash P$, τότε $\vdash OBP$. (OB-NEC)

Τυπικά θεωρήματα και παραγόμενοι κανόνες

(1) $OB\top$

(2) $\sim OB\bot$

(3) $OB(P \& Q) \to (OBP \& OBQ)$

(4) $(OBP \& OBQ) \to OB(P \& Q)$

(5) $OBP \vee OPP \vee IMP$

(6) αν $\vdash P \to Q$, τότε $\vdash OBP \to OBQ$

(7) αν $\vdash P \leftrightarrow Q$, τότε $\vdash OBP \leftrightarrow OBQ$.

Αποδείξεις.

(2) Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο απαγωγής σε άτοπο.
Έστω λοιπόν $OB\bot$. Από την κλασσική προτασιακή λογική, ξέρουμε ότι $\vdash \bot \leftrightarrow (p \& \sim p)$.
Άρα, με βάση το (7), θα έχουμε ότι

$$\vdash OB\bot \leftrightarrow OB(p \& \sim p).$$

Έπεται λοιπόν ότι $\vdash OB(p \& \sim p)$, οπότε, λόγω του (3), παίρνουμε ότι $\vdash OBp \& OB\sim p$ και συνεπώς

$\vdash OBp$ και $\vdash OB\sim p$.

Όμως, από το A3, έχουμε ως αξίωμα τον προτασ. τύπο

$$OBp \to \sim OB\sim p.$$

Άρα, εφαρμόζοντας τον κανόνα R1, προκύπτει ότι

$$\vdash \sim OB\sim p.$$

Έπεται ότι $\vdash OB\sim p \;\&\; \sim OB\sim p$, που αποτελεί αντίφαση.

$P \;\&\; \sim P$

(3) Από την κλασική προτασιακή λογική, ξέρουμε ότι

$$\vdash (P\&Q) \to P,$$

για οποιουσδήποτε προτασιακούς τύπους P, Q.

Άρα, λόγω του (7), προκύπτει ότι

$$\vdash OB(P\&Q) \to OBP. \quad \circledast$$

Όμοια μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\vdash OB(P\&Q) \to OBQ. \quad \circledast\circledast$$

Από τις $\circledast$ και $\circledast\circledast$ και την κλασική προτ. λογική, έπεται ότι

$$\vdash OB(P\&Q) \to OBP \& OBQ.$$

(6) Έστω ότι $\vdash P \to Q$. Τότε, λόγω του κανόνα R2, έπεται ότι $\vdash OB(P \to Q)$.

Όμως, λόγω του A2, έχουμε $\vdash OB(P\to Q) \to (OBP \to OBQ)$.

Άρα, εφαρμόζοντας τον R1, προκύπτει ότι

$$\vdash OBP \to OBQ.$$

Supplement to Deontic Logic

Alternative Axiomatization of SDL

The following alternative axiom system, which is provably equivalent to SDL, "breaks up" SDL into a larger number of "weaker parts" (SDL *a la carte*, as it were). This has the advantage of facilitating comparisons with other systems that reject one or more of SDL's theses.[1]

SDL′:	A1. All tautologous wffs of the language	(TAUT)
	A2′. $\mathbf{OB}(p \& q) \rightarrow (\mathbf{OB}p \& \mathbf{OB}q)$	(**OB**-M)
	A3′. $(\mathbf{OB}p \& \mathbf{OB}q) \rightarrow \mathbf{OB}(p \& q)$	(**OB**-C)
	A4.′ $\sim\mathbf{OB}\bot$	(**OB**-OD)
	A5′. $\mathbf{OB}\top$	(**OB**-N)
	R1. If $\vdash p$ and $\vdash p \rightarrow q$, then $\vdash q$	(MP)
	R2′. If $\vdash p \leftrightarrow q$, then $\mathbf{OB}p \leftrightarrow \mathbf{OB}q$	(**OB**-RE)

We recall SDL for easy comparison:

SDL:	A1. All tautologous wffs of the language	(TAUT)
	A2. $\mathbf{OB}(p \rightarrow q) \rightarrow (\mathbf{OB}p \rightarrow \mathbf{OB}q)$	(**OB**-K)
	A3. $\mathbf{OB}p \rightarrow \sim\mathbf{OB}{\sim}p$	(**OB**-D)
	MP. If $\vdash p$ and $\vdash p \rightarrow q$ then $\vdash q$	(MP)
	R2. If $\vdash p$ then $\vdash \mathbf{OB}p$	(**OB**-NEC)

Below is a proof that these two system are "equipollent": any formula derivable in the one is derivable in the other.

I. First, we need to prove that *each axiom (scheme) and rule of SDL′ can be derived in SDL*. A1 and R1 are common to both systems, so we need only show that A2′-A5′ and R2′ are derivable.

Recall that **OB**-RM, and **OB**-RE (i.e. R2′) are derivable in SDL:

Show: If $\vdash p \rightarrow q$, then $\vdash \mathbf{OB}p \rightarrow \mathbf{OB}q$. (**OB**-RM)
Proof: Assume $\vdash p \rightarrow q$. By **OB**-NEC, $\vdash \mathbf{OB}\,(p \rightarrow q)$, and then by **OB**-K, $\vdash \mathbf{OB}p \rightarrow \mathbf{OB}q$.
Corollary: If $\vdash p \leftrightarrow q$ then $\vdash \mathbf{OB}p \leftrightarrow \mathbf{OB}q$ (R2′ or **OB**-RE)

So it remains to show A2′-A5' are derivable in SDL, and to do so we make free use of our already derived rules, **OB**-RM and **OB**-RE.

Show: $\vdash \mathbf{OB}(p \& q) \rightarrow (\mathbf{OB}p \& \mathbf{OB}q)$ (A2′ or **OB**-M)
Proof: By PC, $\vdash (p \& q) \rightarrow p$. So by **OB**-RM $\vdash \mathbf{OB}(p \& q) \rightarrow \mathbf{OB}p$. In the same manner, we can derive $\vdash \mathbf{OB}(p \& q) \rightarrow \mathbf{OB}q$. From these two, by PC, we then get $\mathbf{OB}(p \& q) \rightarrow (\mathbf{OB}p \& \mathbf{OB}q)$.

Show: $\vdash (\mathbf{OB}p \& \mathbf{OB}q) \rightarrow \mathbf{OB}(p \& q)$ (A3′ or **OB**-C)
Proof: By PC, $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow (p \& q))$. So by **OB**-RM $\vdash \mathbf{OB}p \rightarrow \mathbf{OB}(q \rightarrow (p \& q))$. But by **OB**-K, we have $\vdash \mathbf{OB}(q \rightarrow (p \& q)) \rightarrow (\mathbf{OB}q \rightarrow \mathbf{OB}(p \& q))$. So from these two, by PC, $\vdash \mathbf{OB}p \rightarrow (\mathbf{OB}q \rightarrow$

SDL+ : SDL και, επιπλέον, το αξιωματικό σχήμα

A4. $OB(OBP \to P)$.

Παρατήρηση: Στο σύστημα SDL+ αποδεικνύεται ο

$$OBOBP \to OBP.$$

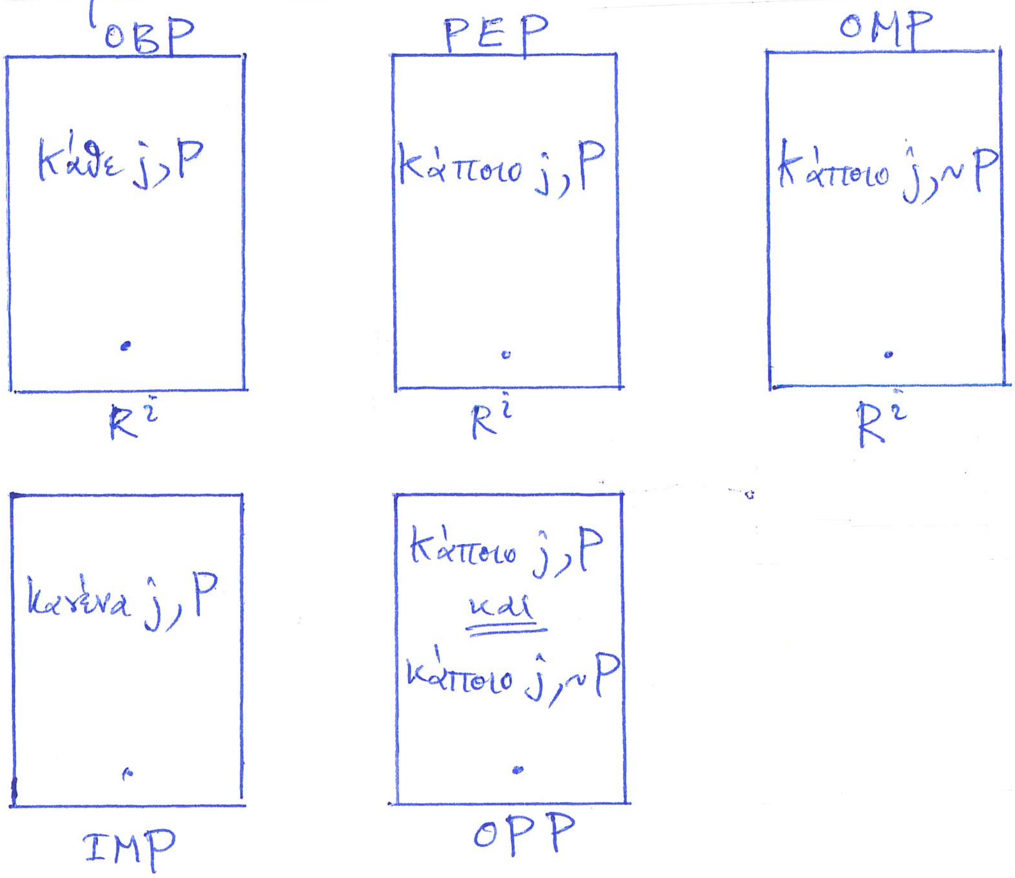
Πράγματι, έχουμε την ακόλουθη απόδειξη:

1. $\boxed{OB(OBP \to P)}$ αξ. σχήμα A4
2. $\boxed{OB(OBP \to P)} \to (OBOBP \to OBP)$ αξ. σχήμα A2
3. $OBOBP \to OBP$. 1, 2, κανόνας R1.

Συνθήκες αλήθειας για δεοντικούς τελεστές

OB = obligatory IM: impermissible OP = optional

PE: permissible OM = omissible



Σημασιολογία δυνατών κόσμων

W σύνολο δυνατών κόσμων

R σχέση προσβασιμότητας ($R \subseteq W \times W$)

Rij ή $R(i,j)$ ή $\langle i,j \rangle \in R$

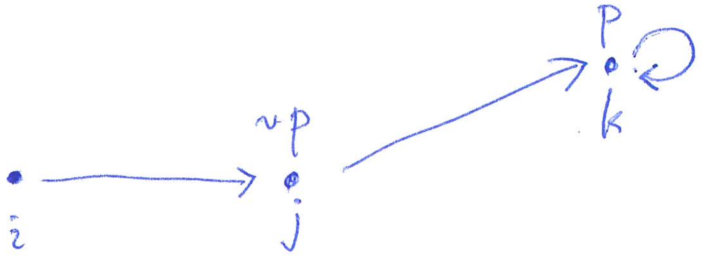
Θα λέμε ότι η R είναι "σειριακή" (serial), αν για κάθε $i \in W$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $j \in W$ τέτοιο που $j \in R^i$ ή Rij (ή $R(i,j)$ ή $\langle i,j \rangle \in R$)

(Υποθέτοντας ότι θεωρούμε μόνο δυνατούς κόσμους στους οποίους η R είναι σειριακή)

Όλα τα αξιώματα και οι κανόνες της SDL είναι έγκυρα.

<u>Αντιπαράδειγμα</u>. $\not\models_{SDL} A4$, δηλ. $\not\models_{SDL} OB(OBP \to P)$.

Αρκεί να βρούμε δυνατό κόσμο (W,R), με R σειριακή, στον οποίο να μην αληθεύει ο τύπος $OB(OBp \to p)$.



$W = \{i, j, k\}$

$R = \{\langle i,j \rangle, \langle j,k \rangle, \langle k,k \rangle\}$.

παρατηρούμε ότι η R είναι σειριακή

Ισχυριζόμαστε ότι ο $OB(OBp \to p)$ είναι ψευδής στον συγκεκριμένο κόσμο που είδαμε πριν, δηλαδή,

$$\models_{(W,R)} \sim OB(OBp \to p).$$

Αυτό θα αληθεύει, αν πράγματι υπάρχει κόσμος στο W όπου είναι ψευδές ότι $OB(OBp \to p)$.
Παρατηρούμε ότι στον κόσμο j

(i) αληθεύει ο τύπος OBp και

(ii) δεν αληθεύει ο τύπος $(OBp \to p)$

Για το (i), βλέπουμε ότι ο τύπος p αληθεύει σε όλους τους κόσμους στους οποίους έχει πρόσβαση ο j (δηλαδή, ακριβώς στον κόσμο k).

Για το (ii), βλέπουμε ότι (με βάση το (i)), αληθεύει ο OBp, αλλά δεν αληθεύει ο p (αφού αληθεύει ο $\sim p$ στον j).
Κατά συνέπεια, υπάρχει κόσμος στον οποίο έχει πρόσβαση ο i και στον οποίο δεν αληθεύει ο $(OBp \to p)$ — πράγματι, ένας τέτοιος κόσμος είναι ο j.
Συνεπώς δεν αληθεύει στον κόσμο i ο τύπος

$$OB(OBp \to p)$$

και επομένως αληθεύει ο $\sim OB(OBp \to p)$ στον i (και στον (W,R)).

Αν θεωρήσουμε μόνο δυνατούς κόσμους στους οποίους η σχέση R είναι "δευτερευόντως ανακλαστική" (secondary reflexive), τότε αληθεύει ο $OB(OBP \to P)$.

Λέμε ότι η R είναι "δευτερευόντως ανακλαστική", αν για κάθε κόσμο $i \in W$ και κάθε $j \in R^i$ ισχύει Rjj.

Σχηματικά:

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r] & j \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

Παράδειγμα. $\models_{SDL} OB(OBP \to P)$, αν R δευτερ. ανακλαστική.

Πράγματι, έστω δυνατός κόσμος (W,R), όπου η R είναι δευτερευόντως ανακλαστική, και i τυχών κόσμος στο W. Θέλουμε να δείξουμε ότι ο τύπος $OB(OBP \to P)$ αληθεύει στο i. Έστω, προς άτοπο, ότι στον κόσμο i αληθεύει το αντίθετο, δηλ. $\sim OB(OBP \to P)$.

Τότε υπάρχει επόμενος κόσμος j, στον οποίο είναι ψευδής ο τύπος $OBP \to P$. Λόγω του ρόλου της συνεπαγωγής, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $j \in R^i$ τέτοιος που

(α) ο OBP αληθεύει στον j και

(β) ο P δεν αληθεύει στον j.

Όμως, επειδή η R είναι δευτερευόντως ανακλαστική, Rjj και συνεπώς, λόγω της σημασιολογικής συμπεριφοράς του τελεστή OB, έπεται ότι

(γ) ο P αληθεύει στον j.

Προφανώς όμως τα (β) και (γ) αντιφάσκουν.

we now provide a counter model to show that OB-U, OB(OBp→p) is indeed a genuine (non-derivable) addition to SDL

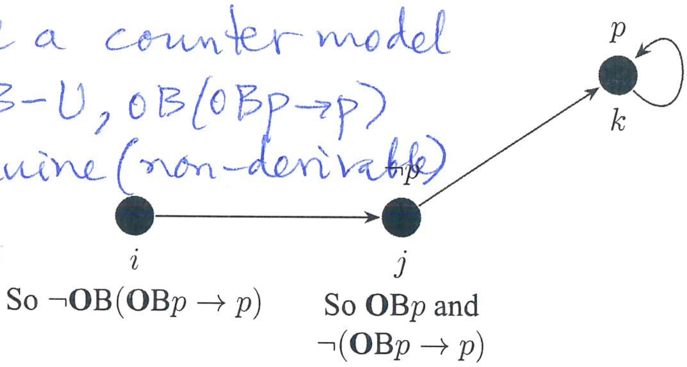


FIG. D.1 [An extended description of figure D.1.]

Here, seriality holds, since each of the three worlds has at least one world acceptable to it (in fact, exactly one), but *secondary* seriality fails, since although j is acceptable to i, j is not acceptable to itself. Now look at the top annotations regarding the assignment of truth or falsity to p at j and k. The lower deontic formulae derive from this assignment and the accessibility relations. (The value of p at i won't matter.) Since p holds at k, which exhausts the worlds acceptable to j, $\mathbf{OB}p$ must hold at j, but then, since p itself is false at j, $(\mathbf{OB}p \to p)$ must be false at j. But j is acceptable to i, so not all i-acceptable worlds are ones where $(\mathbf{OB}p \to p)$ holds, so $\mathbf{OB}(\mathbf{OB}p \to p)$ must be false at i.[102] We have already proven that seriality, which holds in this model, automatically validates NC. It is easy to show that the remaining ingredients of SDL hold here as well.[103]

We proved above that $(\mathbf{OBOB}p \to \mathbf{OB}p)$ is derivable from **OB**-U. Here is a model that shows that the converse fails:

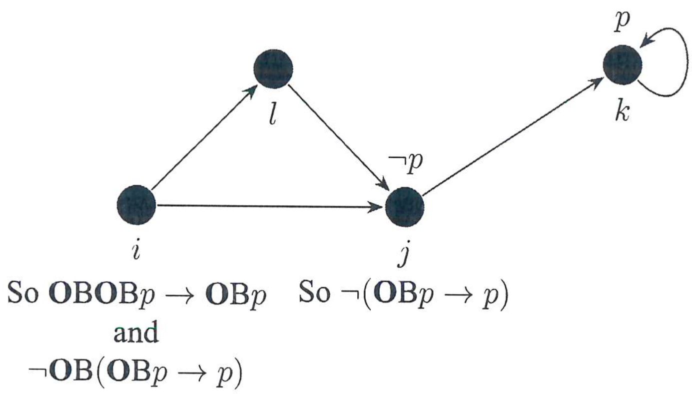


FIG. D.2 [An extended description of figure D.2.]

It is left to the reader to verify that given the accessibility relations and indicated assignments to p at j and k, $\mathbf{OBOB}p \to \mathbf{OB}p$ must be (vacuously) true at i, while $\mathbf{OB}(\mathbf{OB}p \to p)$ must be false at i.

E. Non-Performance versus Refraining/Forbearing

Another interesting operator can be defined via a condition involving embedding of "**BA**":

$$\mathbf{RF}p \overset{def}{=} \mathbf{BA}\neg\mathbf{BA}p.$$

This expresses a widely endorsed analysis of refraining (or "forbearing").[104] In quasi-English, *it is a case of refraining by our agent that* p if and only if our agent brings it about that she does not bring it about that p. The importance of this in agency theory is based on the assumption that refraining from doing something is distinct from simply not doing something. In the current agential framework, this boils down to the denial of the following claim: