Σημειώσεις για μάθημα 13/12/2023

Λογική συνεπαγωγή στην τροπική προτασιακή λογική

Σ σύνολο τροπικών προτασιακών τύπων

P τροπικός προτασιακός τύπος

$\Sigma \models P$ αν για κάθε ερμηνεία (W, R, v) και κάθε κόσμο w,
αν $v_w(Q)=1$ για κάθε $Q \in \Sigma$, τότε $v_w(P)=1$.

(Υπενθύμιση για κλασική προτασιακή λογική:
$\Sigma \models P$ αν για κάθε αποτίμηση v,
αν $v(Q)=1$ για κάθε $Q \in \Sigma$, τότε $v(P)=1$.)

Παράδειγμα λογικής συνεπαγωγής στην τροπική προτ. λογική

$$(\Box P \,\&\, \Box Q) \models \Box(P \& Q).$$

Θεωρούμε τυχούσα ερμηνεία (W, R, v). Πρέπει να δείξουμε ότι,
για κάθε κόσμο $w \in W$, αν $v_w(\Box P \,\&\, \Box Q)=1$, τότε ισχύει
$v_w(\Box(P \& Q))=1$.

Ας πάρουμε λοιπόν τυχόντα κόσμο w και ας υποθέσουμε
ότι $v_w(\Box P \,\&\, \Box Q)=1$.

Με βάση τον πίνακα της &, πρέπει να ισχύει ότι
$v_w(\Box P)=1$ και $v_w(\Box Q)=1$.

Χρησιμοποιώντας τώρα τη συνθήκη αλήθειας για τον $\Box$,
προκύπτει ότι

(α) για κάθε κόσμο w' τέτοιο που wRw' ισχύει $v_{w'}(P)=1$.

(β) " " " " " " " ισχύει $v_{w'}(Q)=1$.

Από τις (α) και (β) έπεται ότι
για κάθε κόσμο w' τέτοιο που wRw' ισχύει $v_{w'}(P \& Q)=1$.

Επομένως, πάλι με βάση τη συνθήκη αλήθειας για τον $\Box$,
προκύπτει ότι $v_w(\Box(P \& Q))=1$, δηλ., το ζητούμενο.

Παράδειγμα όπου δεν ισχύει λογική συνεπαγωγή

$$\Box(p\vee q) \not\models (\Box p \vee \Box q).$$

Αρκεί να βρούμε μια ερμηνεία (W,R,v) τέτοια που υπάρχει κόσμος w για τον οποίο ισχύει

$$v_w(\Box(p\vee q))=1, \text{ αλλά } v_w(\Box p\vee \Box q)=0.$$

Θεωρούμε την ερμηνεία που αντιστοιχεί στο ακόλουθο σχήμα:

$$\begin{tikzcd} & w_1 \quad p, \sim q \\ w_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & w_2 \quad \sim p, q \end{tikzcd}$$

(οι τιμές των p,q στον κόσμο w_0 δεν έχουν σημασία).

Ισχυριζόμαστε ότι $v_{w_0}(\Box(p\vee q))=1$ και $v_{w_0}(\Box p\vee\Box q)=0$.

(α) Θα δείξουμε ότι $v_{w_0}(\Box(p\vee q))=1$, δηλαδή, ότι

για κάθε w' τέτοιο που w_0Rw', ισχύει $v_{w'}(p\vee q)=1$.

Για τον κόσμο w_1, προφανώς ισχύει $v_{w_1}(p\vee q)=1$ και

" " " w_2, " " $v_{w_2}(p\vee q)=1$.

Επομένως ισχύει το ζητούμενο.

(β) Θα δείξουμε ότι $v_{w_0}(\Box p\vee\Box q)=0$, δηλαδή, ότι $v_{w_0}(\Box p)=0$ και $v_{w_0}(\Box q)=0$.

Ότι $v_{w_0}(\Box p)=0$ έπεται από το γεγονός ότι υπάρχει κόσμος w' τέτοιος που w_0Rw' και $v_{w'}(p)=0$ (πράγματι, ο w_2 είναι τέτοιος κόσμος).

Ότι $v_{w_0}(\Box q)=0$ έπεται από το γεγονός ότι υπάρχει κόσμος w' τέτοιος που w_0Rw' και $v_{w'}(q)=0$ (πράγματι, ο w_1 είναι τέτοιος κόσμος).

Τροπικοί σημασιολογικοί πίνακες (tableaux)

(1) σε κάθε κόμβο θα υπάρχει P, i (όπου P συμβολίζει ένα προτασιακό τύπο και i ένα φυσικό αριθμό) ή $i r j$ (όπου i, j είναι φυσικοί αριθμοί και το r αντιστοιχεί στη σχέση προσβασιμότητας μεταξύ δυνατών κόσμων)

(2) στον αρχικό κόμβο, θα υπάρχει η ακολουθία $P, 0$ (όπου P συμβολίζει την υπόθεση και το 0 συμβολίζει ένα αρχικό κόσμο) και $\sim Q, 0$ (όπου Q συμβολίζει το υποψήφιο συμπέρασμα και το 0 τον αρχικό κόσμο)

(3) οι πίνακες για τους συνδέσμους θα είναι ίδιοι με πριν, αλλά θα εμφανίζονται δίπλα στους προτασιακούς τύπους και σύμβολα $i, j, \ldots$, που αντιστοιχούν σε δυνατούς κόσμους.

π.χ.)

$$\begin{tikzcd} & P \vee Q, i \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ P, i & & Q, i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} P \& Q, i \arrow[d] \\ \begin{array}{c} P, i \\ Q, i \end{array} \end{tikzcd}$$

(4) υπάρχουν πίνακες για τους τροπικούς τελεστές:

$$\begin{tikzcd} \sim \Box P, i \arrow[d] \\ \Diamond \sim P, i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \sim \Diamond P, i \arrow[d] \\ \Box \sim P, i \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \begin{array}{c} \Box P, i \\ i r j \end{array} \arrow[d] \\ P, j \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Diamond P, i \arrow[d] \\ \begin{array}{c} i r j \\ P, j \end{array} \end{tikzcd}$$

Παράδειγμα. $\Box(P \to Q) \,\&\, \Box(Q \to R) \vdash \Box(P \to R)$.

1α. $\Box(P \to Q) \,\&\, \Box(Q \to R), 0$
1β. $\sim\Box(P \to R), 0$
} αρχικές υποθέσεις

↓

2α. $\Box(P \to Q), 0$
2β. $\Box(Q \to R), 0$
} προκύπτουν από τον τύπο 1α, με βάση το tableau για τον &

↓

3. $\Diamond\sim(P \to R), 0$ — προκύπτει από τον τύπο 1β, με βάση το tableau για $\sim\Box$

↓

4α. $0r1$
4β. $\sim(P \to R), 1$
} προκύπτουν από τον τύπο 3, με βάση το tableau για $\Diamond$

↓

5α. $P, 1$
5β. $\sim R, 1$
} προκύπτουν από τον τύπο 4β, με βάση το tableau για $\sim\to$

↓

6. $P \to Q, 1$ } προκύπτει από τους τύπους 2α, 4α, με βάση το tableau για $\Box$

↓

7. $Q \to R, 1$ } προκύπτει από τους τύπους 2β, 4α, με βάση το tableau για $\Box$

8α. $\sim P, 1$ ×

8β. $Q, 1$ } προκύπτουν από τον τύπο 6, με βάση το tableau για τη $\to$

9α. $\sim Q, 1$ ×

9β. $R, 1$ × } προκύπτουν από τον τύπο 7, με βάση το tableau για τη $\to$.

Παράδειγμα. $\vdash \Diamond(P \& Q) \rightarrow (\Diamond P \& \Diamond Q)$.

1. $\sim(\Diamond(P\&Q) \rightarrow (\Diamond P \& \Diamond Q)), 0$ — άρνηση υποψήφιου συμπεράσματος

2α. $\Diamond(P\&Q), 0$
2β. $\sim(\Diamond P \& \Diamond Q), 0$ — προκύπτουν από τον τύπο 1, με βάση το tableau για $\sim\rightarrow$

3α. $\sim\Diamond P, 0$ | 3β. $\sim\Diamond Q, 0$ — προκύπτουν από τον τύπο 2β, με βάση το ~~tableau~~ tableau για $\sim\&$

4α. $\Box\sim P, 0$ | 4β. $\Box\sim Q, 0$ — προκύπτουν, αντίστοιχα, από τους τύπους 3α, 3β, με βάση το tableau για $\sim\Diamond$

5α. $0r1$
5β. $P\&Q, 1$ | 5γ. $0r1$
5δ. $P\&Q, 1$ — προκύπτουν, αντίστοιχα, από τον τύπο 2α, με βάση το tableau για $\Diamond$

6α. $P, 1$
6β. $Q, 1$ | 6γ. $P, 1$
6δ. $Q, 1$ — προκύπτουν, αντίστοιχα, από τους τύπους 5β, 5δ, με βάση το tableau για $\&$

7α. $\sim P, 1$ | 7β. $\sim Q, 1$ — προκύπτουν, αντίστοιχα, από τους τύπους 4α και 5α, 4β και 5γ, με βάση το tableau για $\Box$

× | ×

<u>(Αντι)παράδειγμα.</u> $\nvdash (\Diamond p \,\&\, \Diamond{\sim}q) \rightarrow \Diamond\Box\Diamond p$.

1. ${\sim}[(\Diamond p \,\&\, \Diamond{\sim}q) \rightarrow \Diamond\Box\Diamond p], 0$ άρνηση υποθ.-συμπεράσματος

2α. $\Diamond p \,\&\, \Diamond{\sim}q, 0$
2β. ${\sim}\Diamond\Box\Diamond p, 0$
προκύπτουν από τον τύπο 1, με βάση ~~το~~ tableau για ${\sim}\rightarrow$

3α. $\Diamond p, 0$
3β. $\Diamond{\sim}q, 0$
προκύπτουν από τον τύπο 2α, με βάση το tableau για &

4. $\Box{\sim}\Box\Diamond p, 0$
προκύπτει από τον τύπο 2β, με βάση το tableau για ${\sim}\Diamond$

5α. $0r1$
5β. $p, 1$
προκύπτουν από τον τύπο 3α, με βάση το tableau για $\Diamond$

6. ${\sim}\Box\Diamond p, 1$
προκύπτει από τους τύπους 4, 5α, με βάση το tableau για $\Box$

7. $\Diamond{\sim}\Diamond p, 1$
προκύπτει από τον τύπο 6, με βάση το tableau για ${\sim}\Box$

8α. $1r2$
8β. ${\sim}\Diamond p, 2$
προκύπτουν από τον τύπο 7, με βάση το tableau για $\Diamond$

9. $\Box{\sim}p, 2$ προκύπτει από τον 8β, λόγω του tableau για ${\sim}\Diamond$.

10α. $0r3$
10β. ${\sim}q, 3$
προκύπτουν από τον τύπο 3β, λόγω του tableau για $\Diamond$

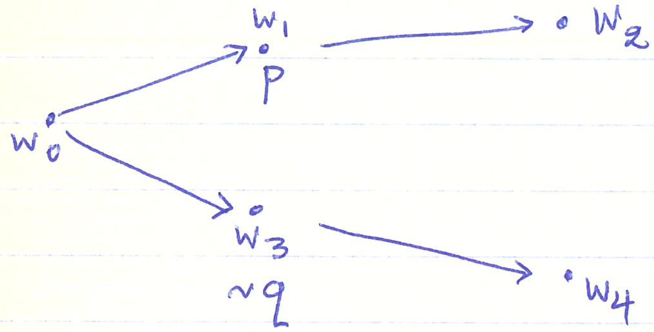
11. ${\sim}\Box\Diamond p, 3$ προκύπτει από 4 και 10α, λόγω tableau για $\Box$

12. $\Diamond{\sim}\Diamond p, 3$ προκύπτει από 11, λόγω tableau για ${\sim}\Box$

13α. $3r4$
13β. ${\sim}\Diamond p, 4$
προκύπτουν από τον τύπο 12, με βάση το tableau για $\Diamond$

14. $\Box{\sim}p, 4$ προκύπτει από τον τύπο 13, με βάση το tableau για ${\sim}\Diamond$.

Από την προηγούμενη κατασκευή, προκύπτει ως αντι-παράδειγμα η ακόλουθη τροπική ερμηνεία:



Με άλλα λόγια, προκύπτει η τριάδα (W, R, v), όπου

$W = \{w_0, w_1, w_2, w_3, w_4\}$

$R = \{\langle w_0, w_1\rangle, \langle w_0, w_3\rangle, \langle w_1, w_2\rangle, \langle w_3, w_4\rangle\}$

$v_{w_1}(p) = 1$, $v_{w_3}(q) = 0$.

Χρησιμοποιώντας τη σημασιολογία που είδαμε στο προηγούμενο μάθημα (που έγινε την 21/12/2022), μπορούμε να ελέγξουμε ότι

$$v_{w_0}(\Diamond p \,\&\, \Diamond \sim q) = 1$$

$$v_{w_0}(\Diamond \Box \Diamond p) = 0,$$

οπότε θα ισχύει ότι $v_{w_0}((\Diamond p \,\&\, \Diamond \sim q) \to \Diamond \Box \Diamond p) = 0$, δηλαδή, ο τύπος $(\Diamond p \,\&\, \Diamond \sim q) \to \Diamond \Box \Diamond p$ δεν αποτελεί τροπική ταυτολογία.

<u>Άσκηση.</u> Θα ελέγξουμε ότι, για τη συγκεκριμένη ερμηνεία, ισχύει ότι $v_{w_0}(\Diamond p \,\&\, \Diamond \sim q) = 1$.

Αρκεί να ελέγξουμε ότι $v_{w_0}(\Diamond p) = 1$ και $v_{w_0}(\Diamond \sim q) = 1$.

(α) Για να ελέγξουμε ότι $v_{w_0}(\Diamond p) = 1$, αρκεί να ελέγξουμε αν υπάρχει κόσμος w' τέτοιος που $w_0 R w'$ και $v_{w'}(p) = 1$.
Πράγματι υπάρχει τέτοιος κόσμος (είναι ο w_1).

(β) Για να ελέγξουμε ότι $v_{w_0}(\Diamond \sim q)=1$, αρκεί να ελέγξουμε αν υπάρχει κόσμος w' τέτοιος που $w_0 R w'$ και $v_{w'}(\sim q)=1$. Πράγματι υπάρχει τέτοιος κόσμος (είναι ο w_3).

<u>Άσκηση.</u> Να ελέγξετε ότι, για τη συγκεκριμένη ερμηνεία, ισχύει ότι $v_{w_0}(\Diamond \Box \Diamond p)=0$.

<u>Αρχή λύσης.</u> Υπενθυμίζουμε ότι η σημασιολογική συνθήκη για τον τελεστή $\Diamond$ είναι η ακόλουθη:

$v_w(\Diamond P)=1$ αν υπάρχει κόσμος w' τέτοιος που wRw' και ισχύει ότι $v_{w'}(P)=1$.

Ο τύπος που έχουμε είναι της μορφής $\Diamond P$, όπου με P συμβολίζουμε τον τύπο $\Box \Diamond p$. Έτσι, για να ελέγξουμε ότι

$$v_{w_0}(\Diamond \Box \Diamond p)=0,$$

αρκεί να ελέγξουμε ότι <u>δεν</u> υπάρχει κόσμος w' τέτοιος που $w_0 R w'$ και να ισχύει ότι $v_{w'}(P)=1$.

Επειδή οι μόνοι κόσμοι (στην ερμηνεία) στους οποίους έχει πρόσβαση ο w_0 είναι οι w_1 και w_3, αρκεί να δείξουμε ότι

(α) δεν ισχύει $v_{w_1}(\Box \Diamond p)=1$ και

(β) δεν ισχύει ότι $v_{w_3}(\Box \Diamond p)=1$.

Συνεχίζουμε τώρα, χρησιμοποιώντας, και για το (α) και για το (β), τη σημασιολογική συνθήκη για τον τελεστή $\Box$, δηλαδή, την ακόλουθη:

$v_w(\Box P)=1$ αν για κάθε κόσμο w' τέτοιο που wRw' ισχύει ότι $v_{w'}(P)=1$,

όπου, βέβαια, αυτή τη φορά το P συμβολίζει τον τύπο $\Diamond p$.