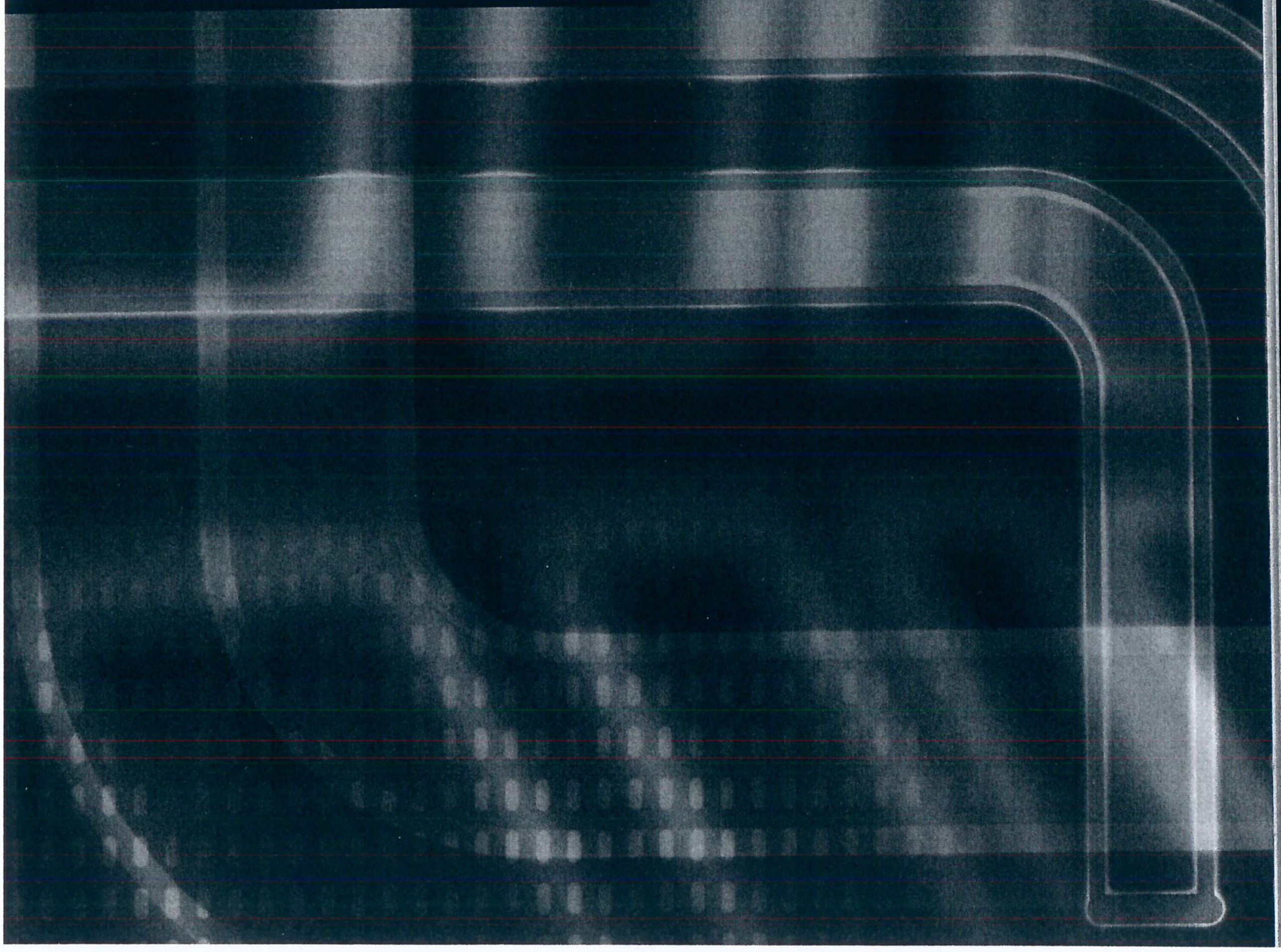
CAMBRIDGE INTRODUCTIONS TO PHILOSOPHY

An Introduction to Non-Classical Logic

From If to Is

GRAHAM PRIEST

Second Edition



Για μάθημα 6/12/2023

Αναλυτικά πρότερα 8.

Ἐπεὶ δ' ἕτερόν ἐστιν ὑπάρχειν τε καὶ ἐξ ἀνάγκης ὑπάρχειν καὶ ἐνδέχεσθαι ὑπάρχειν (πολλὰ γὰρ ὑπάρχει μέν, οὐ μέντοι ἐξ ἀνάγκης· τὰ δ' οὔτ' ἐξ ἀνάγκης οὔθ' ὑπάρχει ὅλως, ἐνδέχεται δ' ὑπάρχειν), δῆλον ὅτι καὶ συλλογισμὸς ἑκάστου τούτων ἕτερος ἔσται, καὶ οὐχ ὁμοίως ἐχόντων τῶν ὅρων, ἀλλ' ὁ μὲν ἐξ ἀναγκαίων, ὁ δ' ἐξ ὑπαρχόντων, ὁ δ' ἐξ ἐνδεχομένων.

πρόχειρη μετάφραση:

Επειδή, λοιπόν, άλλο είναι η απλή απόδοση, άλλο η αναγκαία και άλλο η ενδεχομενική (καθότι πολλά κατηγορούνται μεν, όχι όμως αναγκαία, ενώ άλλα δεν κατηγορούνται ούτε αναγκαία, ούτε απλά, είναι όμως ενδεχόμενα), είναι φανερό ότι και ο συλλογισμός καθενός από τα παραπάνω θα είναι διαφορετικός, και με όχι όμοια διακείμενους τους όρους, αλλά ο ένας θα είναι με αναγκαίους, ο άλλος με απλής απόδοσης, ο τρίτος με ενδεχομενικούς.

Τροπική Προτασιακή Λογική (Modal Propositional Logic)

(α) προτασιακές μεταβλητές
(β) σύνδεσμοι
(γ) παρενθέσεις

$\Big\}$ όπως στην κλασική προτ. λογική

(δ) τροπικοί τελεστές : $\Box$ (είναι αναγκαίο ότι)
$\Diamond$ (είναι δυνατό ότι)

__Σημείωση.__ Αντί για $\Box$, μερικοί συγγραφείς χρησιμοποιούν το σύμβολο N(από τη λέξη "necessary") και αντί για $\Diamond$, μερικοί συγγραφείς χρησιμοποιούν το σύμβολο P(από τη λέξη "possible").

Όπως στην κλασική προτασιακή λογική, ορίζουμε τους "τροπικούς προτασιακούς τύπους", που κατασκευάζονται με χρήση των συμβόλων (α)-(δ) παραπάνω. Συγκεκριμένα:

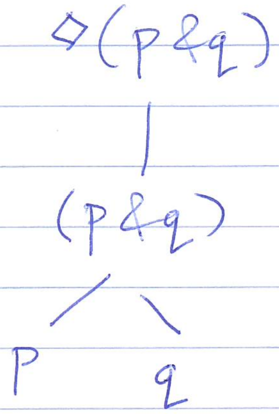
(1) κάθε προτασιακή μεταβλητή είναι τροπικός προτ. τύπος
(2) αν P είναι ήδη κατασκευασμένος τροπικός προτασ. τύπος, τότε η έκφραση $\sim P$ είναι επίσης τροπικός προτασ. τύπος
(3) αν P, Q είναι ήδη κατασκευασμένοι τροπικοί προτασιακοί τύποι, τότε οι εκφράσεις $(P \& Q)$, $(P \vee Q)$, $(P \to Q)$, $(P \leftrightarrow Q)$ είναι επίσης τροπικοί προτασιακοί τύποι
(4) αν P είναι ήδη κατασκευασμένος τροπικός προτασ. τύπος, τότε οι εκφράσεις $\Box P$, $\Diamond P$ είναι επίσης τροπικοί προτασιακοί τύποι.

__Παραδείγματα τροπικών προτασιακών τύπων__

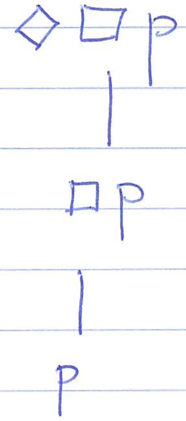
$\Diamond(p \& q)$, $\Diamond\Box p$, $\Box(p \to q)$, $\Diamond(p \vee \sim p)$.

Δενδροδιαγράμματα τροπικών προτασιακών τύπων

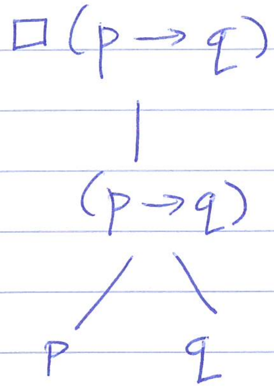
α)



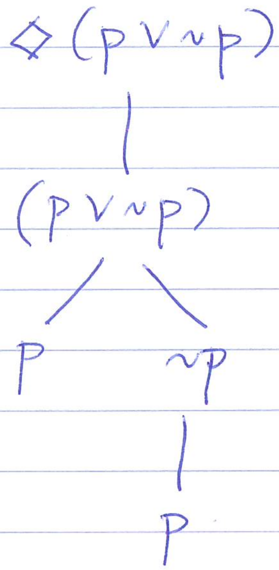
β)



γ)



δ)



Υπενθύμιση για σημασιολογία κλασικής προτασιακής λογικής

αποτίμηση (valuation) v

$$\begin{array}{cccc} p_0, & p_1, & p_2, & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \tau_0, & \tau_1, & \tau_2, & \ldots \end{array}$$

όπου τ_i είναι 1 ή 0.

πίνακες αλήθειας συνδέσμων

$v(P)$	$v(\sim P)$
1	0
0	1

$v(P)$	$v(Q)$	$v(P\&Q)$	$v(P\vee Q)$	$v(P\to Q)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	0	1	1
0	0	0	0	1

Σημασιολογία τροπικής προτασιακής λογικής

σημασιολογία δυνατών κόσμων (possible worlds semantics)

David Lewis (1941–2001)

Saul Kripke (1940–2022)

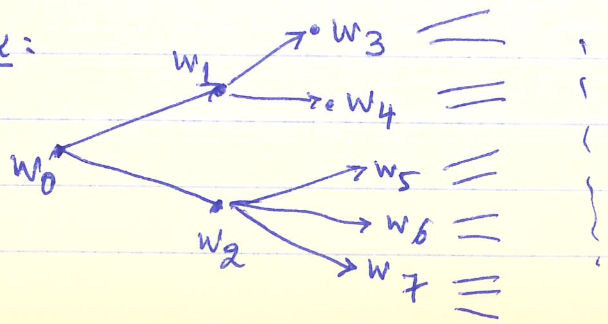
μια ερμηνεία είναι μια τριάδα (W, R, v), όπου

W συμβολίζει ένα σύνολο κόσμων (worlds)

R είναι μια διμελής σχέση μεταξύ κόσμων (accessibility relation)

v είναι μια αποτίμηση, με επεκτεταμένη έννοια (για κάθε κόσμο w, η v δίνει τιμή αλήθειας 1 ή 0 σε κάθε τροπικό προτασιακό τύπο P).

Εικόνα:



Για ευκολία, χρησιμοποιούμε σχήματα για να περιγράψουμε μια ερμηνεία, όπως παρακάτω

$$\begin{tikzcd}
 & w_1 \quad p, q \\
\sim p, \sim q \quad w_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & w_2 \arrow[loop above] \quad p, \sim q
\end{tikzcd}$$

Το σχήμα αυτό αντιστοιχεί στην ερμηνεία

$W = \{w_0, w_1, w_2\}$

$R = \{\langle w_0, w_1\rangle, \langle w_0, w_2\rangle, \langle w_2, w_2\rangle\}$

$v_{w_0}(p)=0$, $v_{w_0}(q)=0$

$v_{w_1}(p)=1$, $v_{w_1}(q)=1$

$v_{w_2}(p)=1$, $v_{w_2}(q)=0$.

Οι πίνακες αλήθειας για τους συνδέσμους παραμένουν ίδιοι, ενώ οι σημασιολογικές συνθήκες για τους τροπικούς τελεστές είναι οι ακόλουθες:

$v_w(\Box P)=1$ ανν για κάθε κόσμο w' τέτοιο που wRw' ισχύει $v_{w'}(P)=1$.

$v_w(\Diamond P)=1$ ανν υπάρχει κόσμος w' τέτοιος που wRw' και ισχύει $v_{w'}(P)=1$.

Για τη συγκεκριμένη ερμηνεία, με βάση τις συνθήκες αλήθειας για τους συνδέσμους και τους τροπικούς τελεστές, υπολογίζουμε την τιμή αλήθειας οποιουδήποτε προτασιακού τύπου σε οποιοδήποτε κόσμο (της ερμηνείας):

$$\begin{tikzcd}
 & w_1 \quad \begin{array}{c} p, q \\ (p \& q), \sim\Diamond q \end{array} \\
\begin{array}{c} \sim p, \sim q \quad w_0 \\ \Diamond(p \& q), \Diamond\Box p \end{array} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & w_2 \arrow[loop above] \quad \begin{array}{c} p, \sim q \\ \Box p, \Diamond\sim(p \to q) \end{array}
\end{tikzcd}$$

Για την ερμηνεία της σελ. 5, θα ελέγξουμε ότι ο τύπος $\Diamond(p\&q)$ είναι αληθής στον κόσμο w_0, με άλλα λόγια, ότι $v_{w_0}(\Diamond(p\&q))=1$.

Επειδή ο δοθείς τύπος είναι της μορφής $\Diamond P$, με βάση τη σημασιολογική συνθήκη για τον τελεστή $\Diamond$, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει κόσμος w' τέτοιος που $w_0 R w'$ και $v_{w'}(P)=1$.

Εξετάζοντας την δεδομένη ερμηνεία, βλέπουμε ότι υπάρχει ο κόσμος w_1 για τον οποίο ισχύει ότι $w_0 R w_1$ και $v_{w_1}(p\&q)=1$.

Το πρώτο, δηλαδή, ότι $w_0 R w_1$ είναι προφανές από το διάγραμμα στο κάτω μέρος της σελ. 5.

Το δεύτερο, δηλαδή, ότι $v_{w_1}(p\&q)=1$ προκύπτει από το γεγονός ότι $v_{w_1}(p)=1$ και $v_{w_1}(q)=1$, που φαίνεται επίσης στο διάγραμμα.

Για την ίδια ερμηνεία, θα ελέγξουμε ότι $v_{w_1}(\sim\Diamond q)=1$, δηλαδή, ότι ο τύπος $\sim\Diamond q$ αληθεύει στον κόσμο w_1.

Με βάση το σημασιολογικό ρόλο της άρνησης $\sim$, αρκεί να δείξουμε ότι $v_{w_1}(\Diamond q)=0$.

Με άλλα λόγια, με βάση τη σημασιολογική συνθήκη για τον τελεστή $\Diamond$, αυτό ισοδυναμεί με το ότι δεν υπάρχει κόσμος w' τέτοιος που wRw' και $v_{w'}(q)=1$. Πράγματι, αφού δεν υπάρχει κανένας κόσμος στον οποίο έχει πρόσβαση ο w_1, κατά μείζονα λόγο, δεν υπάρχει κόσμος w' τέτοιος που wRw' και $v_{w'}(q)=1$, οπότε ισχύει το ζητούμενο.