παρόντος Κεφαλαίου 1 είναι να εισαγάγει εκείνα τα στοιχεία των μαθηματικών που θα διευκολύνουν την κατανόηση θεωριών και πρακτικών της Υπολογιστικής Γλωσσολογίας

Στην Ενότητα 1.1 δίνουμε στοιχεία της θεωρίας των συνόλων. Στην επόμενη Ενότητα 1.2 στοιχεία για τις σχέσεις και τις συναρτήσεις. Στην Ενότητα 1.3 εισάγουμε βασικά στοιχεία της μαθηματικής Λογικής και κοιτάμε λίγο πιο λεπτομερώς δύο τυπικά συστήματα, τον προτασιακό λογισμό και τον κατηγορικό λογισμό πρώτης τάξης. Κλείνουμε με την Ενότητα 1.4 όπου γίνεται αναφορά στη θεωρία των τυπικών γλωσσών, η οποία είχε εξαιρετικά σημαντική επίδραση στην ανάπτυξη της σύγχρονης Γλωσσολογίας.

1.1 Σύνολα

Στη βάση των σύγχρονων μαθηματικών βρίσκεται η θεωρία των συνόλων και θα την βρίσκουμε και εμείς μπροστά μας στο εξής.

Ορισμός, στοιχεία συνόλου

Τα ***σύνολα*** (sets), λοιπόν, είναι συλλογές διακριτών αντικειμένων, είτε της πραγματικότητας είτε της φαντασίας μας ή της αφηρημένης σκέψης μας. Τα αντικείμενα τα οποία ***περιέχει*** ή από τα οποία ***αποτελείται*** ένα σύνολο λέγονται ***στοιχεία*** ή ***μέλη*** του συνόλου και ***ανήκουν*** στο σύνολο.

Ένα σύνολο με οντότητες από την πραγματικότητα είναι το σύνολο των παιχνιδιών του αδελφού μου που στο εξής θα το λέμε σύνολο Π. Το Star Wars Lego που αγόρασα στον αδελφό μου την Πρωτοχρονιά είναι στοιχείο ή μέλος του συνόλου Π. Ένα σύνολο με οντότητες της φαντασίας μας είναι το σύνολο των δώδεκα θεών του Ολύμπου και θα το πούμε σύνολο Ο. Δηλαδή, ο Δίας ανήκει στο σύνολο Ο. Και ένα σύνολο με οντότητες της αφηρημένης σκέψης μας είναι το σύνολο των αξιωμάτων που στηρίζουν την Ευκλείδια Γεωμετρία και θα το πούμε σύνολο Ε.

Μαθηματική γραφή για τα σύνολα

Όπως αυτά που λέμε στην γλώσσα τα γράφουμε κιόλας, έτσι και για τα μαθηματικά έχουμε επινοήσει ειδική γραφή. Έχουμε λοιπόν δύο τρόπους να περιγράψουμε ένα σύνολο.

Ο ένας τρόπος είναι να απαριθμήσουμε τα στοιχεία του, όπως κάνουμε στο (3) για το σύνολο Ο.

(3) Ο = {Δίας, Αθηνά, Ποσειδών, ..., Εστία}.

Στο (3) προσέξτε τις τρεις τελείες: σημαίνουν μια σειρά στοιχείων του συνόλου που είναι γνωστά. Ούτε δύο, ούτε τέσσερεις τελείες: τρεις, όταν θέλουμε να δηλώσουμε συγκεκριμένη ή και άπειρη σειρά στοιχείων που είναι γνωστά. Σημαντικό: η σειρά των στοιχείων δεν έχει καμία σημασία απολύτως.

Ο άλλος τρόπος είναι να περιγράψουμε ένα σύνολο με βάση μία ιδιότητα που χαρακτηρίζει όλα τα στοχεία του, όπως κάνουμε στο (4) πάλι για το σύνολο Ο. Χρησιμοποιούμε το γράμμα x για να συμβολίσουμε το τυχαίο στοιχείο ενός συνόλου. Η (4) διαβάζεται ως εξής: «το σύνολο Ο απαρτίζεται από διάφορα στοιχεία x τέτοια ώστε το x είναι θεός του Ολύμπου».

(4) Ο= {x|x θεός του Ολύμπου}

Όμως, στο σημείο αυτό πρέπει να κάνουμε μία διευκρίνιση: αν και τα σύνολα που δίνουμε ως παραδείγματα εδώ περιέχουν στοιχεία με τουλάχιστον μία κοινή ιδιότητα, όπως π.χ. «θεός του Ολύμπου» (4), η ύπαρξη μιας κοινής ιδιότητας δεν είναι αναγκαία για να ορίσουμε ένα σύνολο. Δηλαδή, εντελώς ανόμοια στοιχεία μπορούν να απαρτίζουν ένα σύνολο. Έτσι, για παράδειγμα το σύνολο Α={1, μουσακάς, Μπετόβεν, κλειδαριά} είναι ένα καθόλα αποδεκτό σύνολο.

Διαγράμματα Venn

Έχουμε και γραφιστικό τρόπο να αναπαραστήσουμε τα σύνολα. Πρόκειται για τα διαγράμματα Venn. Έτσι το Ο αναπαρίσταται ως εξής:

Εικόνα 1.1 *Αναπαράσταση του συνόλου Ο με διάγραμμα Venn*

Στοιχείο συνόλου

Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό x ∈ A αν το x ανήκει στο σύνολο A ή, ισοδύναμα, το x είναι μέλος ή στοιχείο του συνόλου A (5), και το συμβολισμό x ∉ A αν το x δεν ανήκει στο σύνολο A ή, ισοδύναμα, δεν είναι μέλος ή στοιχείο του συνόλου A (6).

(5) Δίας ∈ O

(6) Star Wars Lego ∉ E

Ένα σύνολο ορίζεται αποκλειστικά και μόνο από τα στοιχεία που περιέχει. Τα στοιχεία ενός συνόλου είναι διακριτά αντικείμενα και για αυτό είναι μοναδικά (για το συγκεκριμένο σύνολο). Δεν έχει συνεπώς νόημα ένα σύνολο με δύο ή παραπάνω ίδια στοιχεία, π.χ. το σύνολο O1 ={Δίας, Δίας, Ερμής} δεν υπάρχει εκτός αν πρόκειται για δύο διακριτά αντικείμενα με το όνομα Δίας. Σε αυτήν την περίπτωση, για να είμαστε σίγουροι θα γράφαμε, για παράδειγμα, {Δίας1, Δίας2, Ερμής}.

Κενό σύνολο

Υπάρχει ένα σύνολο που δεν περιέχει κανένα στοιχείο, το λεγόμενο ***κενό σύνολο*** (empty set). Το συμβολίζουμε με { } ή με το Ø.

Υποσύνολο συνόλου

Αν έχουμε δύο σύνολα όπου όλα τα στοιχεία του ενός, π.χ. του O1, είναι στοιχεία του άλλου, π.χ. του O, τότε λέμε ότι το O1 είναι ***υποσύνολο*** (subset) του O και γράφουμε τη σχέση (7). Για παράδειγμα, το O1 είναι το σύνολο των γυναικείων θεοτήτων του Ολύμπου, δηλαδή O1 = {Ήρα, Αθηνά, Αφροδίτη, Άρτεμη, Δήμητρα, Εστία} και είναι υποσύνολο του O.

(7) O1 ⊆ O

Εάν το O περιέχει έστω και ένα μόνο στοιχείο παραπάνω από το O1, τότε λέμε ότι το O1 είναι ***γνήσιο υποσύνολο*** (proper subset) του O και γράφουμε τη σχέση (8):

(8) O1 ⊂ O

Άσκηση 1.1: Ποιο από τα (1), (2) είναι σωστό και γιατί:

1. O ⊆ O
2. O ⊂ O

Ισότητα συνόλων

Έτσι, δύο σύνολα είναι ίσα εάν περιέχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία.

Εάν για δύο σύνολα Π1 και Π2 ισχύει ότι Π1 ⊆ Π2 και Π2 ⊆ Π1, τότε Π1=Π2

Άσκηση 1.2: Έστωσαν τα σύνολα Π1 και Π2

Π1={Lego_διαστημόπλοιο, Lego_Darth Vader, Lego_φρουρός1}

Π2={Lego_φρουρός1 ,Lego_διαστημόπλοιο, Lego_Darth Vader}

Ποιες προτάσεις είναι σωστές:

1. Π1 = Π2
2. Π1 ≠ Π2
3. Π1 ⊂ Π2
4. Π1 ⊆ Π2

Ένωση συνόλων

Αν έχουμε δύο σύνολα A και B μπορούμε να φτιάξουμε ένα σύνολο Γ τέτοιο που να περιέχει όλα τα στοιχεία του A και όλα τα στοιχεία του B και τίποτε άλλο: λέμε ότι το σύνολο Γ είναι η ***ένωση*** (union) των συνόλων A και B και γράφουμε τη σχέση (9):

(9) A ∪ B = Γ

Προφανώς ισχύει ότι A ∪ Ø=A.

Άσκηση 1.3: Δώστε την ένωση των συνόλων O1, O2 και O3

O1 = {Δίας, Ερμής, Ήφαιστος, Εστία, Δήμητρα}

O2 = {Απόλλων, Άρτεμη, Ερμής, Δίας}

O3 = {x/x χωλός θεός του Ολύμπου}

Άσκηση 1.4: Είναι το O3 η ένωση των O1 και O2;

O1= {Άρης, Ερμής}

O2= {Άρτεμη, Ήρα}

O3= {Άρης, Ερμής, Άρτεμη, Ήρα, Δίας}

Τομή συνόλων

Αν έχουμε δύο σύνολα A και B μπορούμε να φτιάξουμε ένα σύνολο Γ τέτοιο που να περιέχει μόνο τα κοινά στοιχεία των A και B και τίποτε άλλο: λέμε ότι το σύνολο Γ είναι η ***τομή*** (intersection) των συνόλων A και B και γράφουμε τη σχέση (10):

(10) $A \cap B = \Gamma$

Προφανώς ισχύει ότι $A \cap \emptyset = \emptyset$.

Λέμε ότι δύο σύνολα A και B είναι ***ξένα μεταξύ τους*** (disjoint sets) εάν $A \cap B = \emptyset$

Άσκηση 1.5: Δώστε την τομή των συνόλων O1, O2 και O3

O1 = {Δίας, Ερμής, Ήφαιστος, Εστία, Δήμητρα}

O2 = {x/x άρρην θεός του Ολύμπου}

O3 = {x/x χωλός θεός του Ολύμπου}

Άσκηση 1.6: Είναι το O3 η τομή των O1 και O2;

O1 = {Άρης, Ερμής, Ήρα}

O2 = {Άρτεμη, Ήρα, Δήμητρα}

O3 = {Ήρα, Δίας}

Συμπερασματικά

Τα σύνολα είναι μαθηματικά αντικείμενα που θα μας χρειαστούν στη συνέχεια για να ορίσουμε τα μοντέλα αναπαράστασης της φυσικής γλώσσας. Άρα είναι σημαντικό να έχουμε στο μυαλό μας τί είναι αυτό το μαθηματικό αντικείμενο και τις βασικές πράξεις που γίνονται με τα σύνολα. Στη βάση της σκέψης μας βρίσκεται το ότι τα σύνολα είναι συλλογές αντικειμένων και τα αντικείμενα είναι μοναδικά, όπως μοναδικός είναι ο καθένας από εμάς.

Άσκηση 1.7:

1. Είναι ο Δίας μέλος του {Δίας};
2. Είναι το {Δίας} μέλος του {Δίας};
3. Είναι το {Δίας} υποσύνολο του {Δίας};
4. Είναι το {Δίας} μέλος του {{Δίας}};

Άσκηση 1.8: Χρησιμοποιήστε τα σύνολα O1,O2 και O3

O1 = {Δίας, Ερμής, Ήφαιστος, Εστία, Δήμητρα}

O2 = { x/x άρρην θεός του Ολύμπου}

O3 = {x/x χωλός θεός του Ολύμπου}

για να δείξετε ότι ισχύουν οι κάτωθι προτάσεις που είναι και γνωστές ως νόμοι του de Morgan.

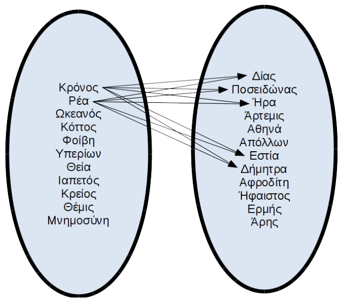
$(O1 \cup O2) \cap O3 = (O1 \cap O3) \cup (O2 \cap O3)$

$(O1 \cap O2) \cup O3 = (O1 \cup O3) \cap (O2 \cup O3)$

1.2 Σχέσεις

Η έννοια της σχέσης (relation) είναι καθημερινή. Λέμε ότι ανάμεσα σε δύο σύνολα αντικειμένων υφίσταται κάποια σχέση όταν υπάρχουν καταστάσεις που για να τις περιγράψουμε χρειαζόμαστε και τα δύο. Για παράδειγμα ας σκεφτούμε το σύνολο των Τιτανίδων Τ = {Κρόνος, Ρέα, Ωκεανός, Κόττος, Φοίβη, Υπερίων, Θεία, Ιαπετός, Κρείος, Θέμις, Μνημοσύνη}. Ο Κρόνος και η Ρέα γέννησαν τους Δία, Ήρα, Δήμητρα, Εστία, Ποσειδώνα, Πλούτωνα που είναι στοιχεία του συνόλου Ο. Υπάρχει λοιπόν μια κατάσταση που εμπλέκει μέλη και των δύο συνόλων. Αυτήν την συγκεκριμένη κατάσταση ονομάζουμε σχέση «γονιός του».

Την σχέση αυτή μπορούμε να την απεικονίσουμε με διάγραμμα Venn.



Εικόνα 1.2. *Αναπαράσταση της σχέσης «γονιός του» με διαγράμματα Venn*

Καρτεσιανό γινόμενο

Είναι δυνατόν να απεικονίσουμε τις σχέσεις μεταξύ των στοιχείων δύο συνόλων A και B ως υποσύνολα του συνόλου που αποτελεί το ***καρτεσιανό γινόμενο*** (Cartesian product) των A και B.

Για να ορίσουμε το καρτεσιανό γινόμενο δύο συνόλων μας χρειάζεται η έννοια του ***διατεταγμένου ζεύγους*** (ordered pair): πρόκειται για δύο στοιχεία τα οποία δίνονται σε συγκεκριμένη σειρά, π.χ. <Κρόνος, Ήρα>. Σε αυτό το διατεταγμένο ζεύγος, το πρώτο στοιχείο είναι «Κρόνος» και το δεύτερο «Ήρα» και θεωρούμε ότι το διατεταγμένο ζεύγος <Κρόνος, Ήρα> είναι διαφορετικό από το διατεταγμένο ζεύγος <Ήρα, Κρόνος>. Δηλαδή, η σειρά έχει σημασία στα διατεταγμένα ζεύγη (αλλιώς τί «διατεταγμένα» θα ήταν;), σε αντίθεση με τα σύνολα όπου δεν έχει, όπως έχουμε ήδη πει.

Έστω, λοιπόν, ότι έχουμε δύο σύνολα, π.χ. το A={1,2,3} και το B={α,β}. Το καρτεσιανό γινόμενο A X B των συνόλων A και B, είναι το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών όπου το πρώτο στοιχείο είναι στοιχείο του A και το δεύτερο στοιχείο του B. Δηλαδή, το καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων A και B φαίνεται στην σχέση (11):

(11) A X B ={<1,α>, <1,β>, <2,α>, <2,β>, <3,α>, <3,β>}.

Σύμφωνα με τα πιο πάνω, η σχέση Γ:«x∈T γονιός του/της y∈O» θα απεικονιστεί σαν το υποσύνολο Γ του καρτεσιανού γινομένου T X O, το οποίο είναι ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών (12) :

(12) Γ= {<Κρόνος, Ήρα>, <Κρόνος, Εστία>, <Κρόνος, Δήμητρα>, <Κρόνος, Ποσειδώνας>, <Κρόνος, Πλούτωνας>, <Κρόνος, Δίας>, <Ρέα, Ήρα>, <Ρέα, Εστία>, <Ρέα, Δήμητρα>, <Ρέα, Ποσειδώνας>, <Ρέα, Πλούτωνας>, <Ρέα, Δίας>}

Ονομάζουμε το σύνολο T ***πεδίο ορισμού*** (domain) της σχέσης και το σύνολο O ***πεδίο τιμών*** (range) της σχέσης.

Προσοχή: η σειρά με την οποία γράφουμε τα σύνολα στο καρτεσιανό γινόμενο είναι Πεδίο Ορισμού X Πεδίο Τιμών και ακριβώς η ίδια σειρά διατηρείται στα στοιχεία των διατεταγμένων ζευγών.

Προσέξτε ότι για τον ορισμό μιας απλής σχέσης δεν απαιτούμε να ορίζεται η σχέση σε ολόκληρη το πεδίο ορισμού: και ένα υποσύνολό του αρκεί. Η κατάσταση είναι διαφορετική για το είδος των σχέσεων που ονομάζουμε «συναρτήσεις», όπως θα δούμε σε λίγο.

Άσκηση 1.9: Γονείς του Κρόνου και της Ρέας ήταν ο Ουρανός και η Γη. Αν έχουμε ένα σύνολο O1={Ουρανός, Γη} ποια σχέση ισχύει ανάμεσα στο O1 και στο O; Να απεικονιστεί με διαγράμματα Venn και με διατεταγμένα ζεύγη.

Αντίστροφη σχέση

Αν ως πεδίο ορισμού πάρουμε το σύνολο O και ως πεδίο τιμών το σύνολο T ορίζουμε την αντίστροφη σχέση της Γ. Συνήθως την αντίστροφη σχέση μιας σχέσης Σ την συμβολίζουμε ως $Σ^{-1}$. Έτσι ορίζεται η σχέση $Γ^{-1}$:«x∈O παιδί του/της y∈T» η οποία είναι υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου O X T: {<Δίας, Ρέα>, <Ποσειδώνας, Ρέα>, <Πλούτωνας, Ρέα>, <Ήρα, Ρέα>, <Εστία, Ρέα>, <Δήμητρα, Ρέα>, <Δίας, Ρέα>, <Ποσειδώνας, Κρόνος>, <Πλούτωνας, Κρόνος>, <Ήρα, Κρόνος>, <Εστία, Κρόνος>, <Δήμητρα, Κρόνος>}.

Ιδιότητες των σχέσεων-Ανακλαστική ιδιότητα

Μία σχέση R που ορίζεται σε ένα σύνολο A λέγεται ***ανακλαστική*** (reflexive) εάν και μόνον εάν για όλα τα x∈A ισχύει ότι τα διατεταγμένα ζεύγη <x, x> ανήκουν στην R.

Για παράδειγμα, ας δούμε την σχέση Σ: «x∈O1 έχει την ίδια ηλικία με y∈O1» όπου το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών είναι το σύνολο O1={Γη, Ουρανός}. Πρέπει, βέβαια, να ξεσκονίσουμε λίγο τα οικογενειακά των O1... Λοιπόν, η Γη είναι αρχαιότερη και γέννησε μόνη της τον Ουρανό. Άρα,

Σ ⊂ O1 X O1 και H = {<Γη, Γη>, <Ουρανός, Ουρανός>}.

Δηλαδή, για όλα τα στοιχεία x∈ O1 = {Ουρανός, Γη}, η H περιέχει τα διατεταγμένα ζεύγη <x, x>. Άρα η Σ είναι ανακλαστική.

Ιδιότητες των σχέσεων-Συμμετρική ιδιότητα

Μία σχέση R που ορίζεται σε ένα σύνολο A λέγεται ***συμμετρική*** (symmetric) εάν και μόνον εάν για όλα τα x ∈A και y∈A ισχύει ότι για κάθε διατεταγμένο ζεύγος <x, y>∈R το διατεταγμένο ζεύγος <y, x>∈R επίσης.

Για παράδειγμα, η Ρέα και ο Κρόνος ήταν αδέλφια και, βέβαια, όλα τα παιδιά της Ρέας και του Κρόνου ήταν αδέλφια μεταξύ τους. Η σχέση Σ: «x∈T1 αδελφός/ή του/της y∈T1» συνεπώς για το σύνολο T1 ⊂ T, όπου T1 = {Κρόνος, Ρέα} ορίζεται ως υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου T1 X T1 και είναι A = {<Κρόνος, Ρέα>, <Ρέα, Κρόνος>}. Συνεπώς, η σχέση Σ είναι συμμετρική γιατί για κάθε <x, y>∈Σ ισχύει ότι και <y, x>∈Σ.

Ιδιότητες των σχέσεων- Μεταβατική ιδιότητα

Μία σχέση R λέγεται ***μεταβατική*** (transitive) εάν και μόνον εάν για όλα τα διατεταγμένα ζεύγη <x,y>∈R και <y, z>∈R το διατεταγμένο ζεύγος <x, z>∈R επίσης.

Για να ξαναπιάσουμε τα ηλικιακά των απογόνων του Κρόνου και της Ρέας. Τα πράγματα έχουν ως εξής: πρώτη η Ήρα, μετά η Εστία, μετά η Δήμητρα, μετά ο Ποσειδώνας, μετά ο Πλούτωνας, στερνοπαίδι και φαρμακερό ο Δίας. Στο σύνολο, λοιπον O1 = {Ήρα, Εστία, Δήμητρα, Ποσειδώνας, Πλούτωνας, Δίας} ορίζουμε την σχέση Σ: «x∈O1 έχει ηλικία μεγαλύτερη από y∈O1», δηλαδή

Σ = {<Ήρα, Εστία>, <Ήρα, Δήμητρα>, <Ήρα, Ποσειδώνας>, <Ήρα, Πλούτωνας>, <Ήρα, Δίας>, <Εστία, Δήμητρα>, <Εστία, Ποσειδώνας>, <Εστία, Πλούτωνας>, <Εστία, Δίας>, <Δήμητρα, Ποσειδώνας>, <Δήμητρα, Πλούτωνας>, <Δήμητρα, Δίας>, <Ποσειδώνας, Πλούτωνας>, <Ποσειδώνας, Δίας>, <Πλούτωνας, Δίας>}. Παρατηρούμε ότι για κάθε δυάδα ζευγών <x,y>∈Σ και <y,z>∈Σ υπάρχει ένα τρίτο ζεύγος <x,z>∈Σ επίσης, π.χ. για τα ζεύγη <Ήρα, Εστία>, <Εστία, Πλούτωνας> υπάρχει το ζεύγος <Ήρα, Πλούτωνας>.

Άσκηση 1.10: Ποιο είναι το πεδίο ορισμού και ποιο το πεδίο τιμών της σχέσης Σ που δίνεται ως παράδειγμα στην ενότητα για την μεταβατική ιδιότητα; Είναι η Σ ανακλαστική και συμμετρική;

Άσκηση 1.11: Ανώνυμοι θεϊκοί κύκλοι ισχυρίζονται ότι ο Πλούτωνας ήταν κοντύτερος από τον Ποσειδώνα και τον Δία που είχαν το ίδιο ύψος και ότι η Ήρα ήταν ψηλότερη από την Δήμητρα που είχε ίδιο ύψος με την Εστία. Ακόμη, πάντα στην ανωνυμία, ισχυρίζονται ότι η Ήρα ήταν λεβεντοκοπέλα και είχε το ίδιο ύψος με τον Δία. Να αναπαραστήσετε την σχέση Υ: «x∈O1 έχει ίδιο ύψος με y∈O1» και να δείτε αν είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.

Διαμερισμός συνόλου-Σχέσεις ισοδυναμίας

Οι σχέσεις που είναι ταυτόχρονα ανακλαστικές, συμμετρικές και μεταβατικές λέγονται ***σχέσεις ισοδυναμίας*** (equivalence relations). Χρησιμεύουν για να ***διαμερίσουμε*** (partition) ένα σύνολο σε υποσύνολα ξένα μεταξύ τους, τις λεγόμενες ***κλάσεις ισοδυναμίας*** (equivalence classes) των οποίων τα μέλη είναι ισοδύναμα ως προς κάποια σχέση ισοδυναμίας, όπως θα δούμε και στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Για παράδειγμα, ορίζουμε την σχέση Σ: «x∈Λ είναι συνώνυμο του y∈Λ» στο σύνολο Λ = {πουλί, πτηνό, κοτσύφι, κότσυφος, κόσσυφος}

Σ={<πουλί, πουλί>, <πτηνό, πτηνό>, <πουλί, πτηνό>, <πτηνό, πουλί>, <κοτσύφι, κοτσύφι>, <κότσυφος, κότσυφος>, <κόσσυφος, κόσσυφος>, <κοτσύφι, κότσυφος>, <κότσυφος, κοτσύφι>, <κοτσύφι, κόσσυφος>, <κόσσυφος, κοτσύφι>, <κότσυφος, κόσσυφος>, <κόσσυφος, κότσυφος>}

Η σχέση Σ είναι σχέση ισοδυναμίας καθώς είναι

-ανακλαστική διότι για κάθε x∈Λ ορίζεται το ζεύγος <x, x>, π.χ. <πουλί, πουλί>, <κόσσυφος, κόσσυφος>

-συμμετρική διότι για κάθε x,y ∈Λ για τα οποία ορίζεται το ζεύγος < x,y> ορίζεται και το ζεύγος <y, x> π.χ. <πουλί, πουλί>, <πτηνό, πτηνό>

-η σχέση είναι μεταβατική διότι για κάθε x,y,z ∈Λ για τα οποία ορίζονται τα ζεύγη <x, y> και <y, z> ορίζεται και το ζεύγος <x, z> π.χ. <κοτσύφι, κότσυφος>, <κότσυφος, κόσσυφος>, <κοτσύφι, κόσσυφος>.

Αν την προσέξουμε καλύτερα, η Σ χωρίζει το Λ σε δύο κλάσεις ισοδυναμίας, δηλαδή σε δύο υποσύνολα του Λ, τα Λ1 και Λ2, όπου Λ1 = {πτηνό, πουλί} και Λ2 = {κοτσύφι, κότσυφος, κόσσυφος}. Τα Λ1 και Λ2 είναι ξένα μεταξύ τους, δηλαδή η τομή τους είναι το κενό σύνολο αφού δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο. Αυτές οι κλάσεις ισοδυναμίας ανταποκρίνονται στην γλωσσική μας διαίσθηση. Σε αυτήν την περίπτωση, το γλωσσικό μοντέλο, το οποίο στηρίζεται στην μαθηματική έννοια «σχέση» και στις ιδιότητές της, αναπαριστά ικανοποιητικά την γλωσσική διαίσθηση. Δεν είναι πάντα έτσι, όπως θα δούμε πολλές φορές σε αυτό το βιβλίο.

Άσκηση 1.12: Δείτε αν οι σχέσεις «έχει την ίδια ηλικία με» και «είναι παιδί του» ορίζουν σχέσεις ισοδυναμίας στο σύνολο των Ολυμπίων θεών O.

1.2.1 Συναρτήσεις

Οι συναρτήσεις είναι ένα ιδιαίτερο είδος σχέσης. Μία σχέση Σ με πεδίο ορισμού το A και πεδίο τιμών το B (Σ ⊆ A X B) είναι συνάρτηση αν και μόνον αν πληροί τις ακόλουθες συνθήκες:

1. Κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού ζευγαρώνει με ένα και μόνο ένα στοιχείο του πεδίου τιμών
2. Το πεδίο ορισμού της Σ ισούται με το A.

Ως παράδειγμα θα ξαναχρησιμοποιήσουμε τα οικογενειακά των Ολυμπίων. Ας δούμε πάλι τα παιδιά του Κρόνου και της Ρέας, δηλαδή το γνωστό μας σύνολο O1 = {Ήρα, Εστία, Δήμητρα, Ποσειδώνας, Πλούτωνας, Δίας}. Ας δούμε το σύνολο T1= {Κρόνος, Ρέα} και ας ορίσουμε την σχέση M: «x∈O1 έχει μητέρα y∈T1», δηλαδή M= {<Ήρα, Ρέα>, <Εστία, Ρέα>, <Δήμητρα, Ρέα>, <Ποσειδώνας, Ρέα>, <Πλούτωνας, Ρέα>, <Δίας, Ρέα>}. Η σχέση M είναι συνάρτηση γιατί ικανοποιεί και τις δύο συνθήκες που θέσαμε: η πρώτη συνθήκη ικανοποιείται γιατί μάνα είναι μόνο μία και η δεύτερη γιατί αγέννητη υπήρξε μόνο η Γη, όλοι οι άλλοι, θνητοί και αθάνατοι, γεννηθήκαμε.

Άσκηση 1.13: Ποια είναι η αντίστροφη σχέση της M; Είναι συνάρτηση;

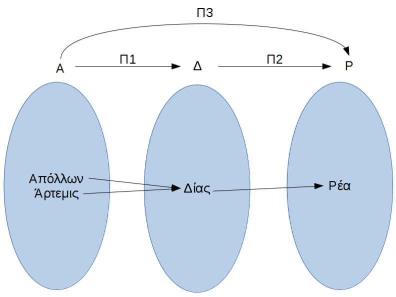
Άσκηση 1.14: Και ένα γλωσσολογικό θέμα: σκεφτείτε το σύνολο Σ={υποκείμενο, αντικείμενο, προσδιορισμός} και το σύνολο Φ των φράσεων από τις οποίες αποτελείται η πρόταση {Χθες ο Πέτρος είδε την Έρση στο σινεμά}. Ορίστε την σχέση Σ Χ Φ και αιτιολογήστε αν είναι ή όχι συνάρτηση.

Σύνθεση συναρτήσεων

Ας γυρίσουμε στα οικογενειακά των Ολυμπίων τώρα. Ο Δίας, ως γνωστόν, ήταν ζωηρός. Δηλαδή, ενώ είχε ως σύζυγο την λεβεντοκοπέλα την Ήρα, έκανε και εξωσυζυγικές σχέσεις (όχι σαν και τις σχέσεις που μελετάμε εδώ, μα τον Δία) και με τα παιδιά που γεννιόντουσαν συμπλήρωσε το Δωδεκάθεο. Λαμπρό παράδειγμα ο Απόλλων και η Άρτεμη, παιδιά του Δία και της Λητούς. Δηλαδή, για να μην χάσουμε την σειρά, ο Απόλλων ήταν παιδί του Δία και ο Δίας παιδί της Ρέας, δηλαδή ο Απόλλων ήταν εγγόνι της Ρέας.

Ας το εκφράσουμε αυτό με σύνολα. Έστω ότι έχουμε το σύνολο Α={Απόλλων, Άρτεμη} και τα μονοσύνολα Δ={Δίας}, Ρ={Ρέα}. Η σχέση Π1: «x∈A είναι παιδί y∈Δ» ορίζεται ως εξής Π1= {<Απόλλων, Δίας},{Άρτεμη, Δίας>} και η σχέση Π2:«x∈Δ είναι παιδί y∈ Ρ» αντίστοιχα ως {<Δίας, Ρέα>}. Η σχέση Π3: «x∈A είναι εγγόνι y∈Ρ» λέγεται σύνθεση των Π2 και Π1. Γράφουμε Π3 = Π2 ° Π1.

Η εικόνα 1.3 δείχνει τις Π1, Π2, Π3.



Εικόνα 1.3. *Αναπαράσταση των συναρτήσεων Π2 και Π1 και της σύνθεσής τους Π3*

1.3 Στοιχεία λογικής

Ένα ισχυρό μαθηματικό εργαλείο που χρησιμοποιεί ιδιαίτερα η Γλωσσολογία και η Υπολογιστική Γλωσσολογία είναι η μαθηματική ***Λογική*** (Logics). Η μαθηματική Λογική έχει αναπτύξει σειρά συστημάτων, μεταξύ των οποίων ο ***προτασιακός λογισμός*** (propositional calculus) και ο ***κατηγορικός λογισμός πρώτης τάξης*** (first order predicate calculus). Τα δύο αυτά συστήματα θα δούμε (κάπως απλοποιημένα) στη συνέχεια γιατί χρησιμοποιούνται ευρύτατα για την αναπαράσταση της σημασίας των εκφωνημάτων της φυσικής γλώσσας. Θα τα αντιμετωπίσουμε σαν τυπικά συστήματα που διαθέτουν την δική τους τυπική γλώσσα με το λεξιλόγιο και τους συντακτικούς κανόνες της καθώς και κανόνες ερμηνείας των ορθά σχηματισμένων προτάσεων του συστήματος. Και τα δύο αυτά συστήματα είναι κατά πολύ απλούστερα από την φυσική γλώσσα παρόλο που χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση της σημασίας των εκφωνημάτων. Χρησιμοποιούνται όμως ευρύτατα γιατί οι μαθηματικές τους ιδιότητες έχουν γίνει κατανοητές σε βαθμό που μας επιτρέπει να εμπιστευόμαστε τις διεργασίες που βασίζουμε σε αυτά.

1.3.1 Προτασιακός Λογισμός

1.3.1.1 Σύνταξη

Ο προτασιακός λογισμός, όπως τον παρουσιάζουμε εδώ, χειρίζεται απλές ατομικές δηλώσεις τις οποίες αντιμετωπίζει ως ενιαία αντικείμενα σε αντίθεση με τον κατηγορικό λογισμό. Οι δομές που ακολουθούν ανήκουν στο λεξιλόγιο του προτασιακού λογισμού, όπως το αντιμετωπίζουμε σε αυτό το βιβλίο:

- Ο Άλκης τρέχει.
- Η Μαρίνα είναι ψηλή.
- Ο Άλκης ξέρει την Οδύσσεια.

Ενώ οι δομές που ακολουθούν δεν ανήκουν στο λεξιλόγιο του προτασιακού λογισμού:

- Περπατώντας σκόνταψα πάνω στον Άλκη (σύνθετη)

- Θυμάμαι ότι η Μαρίνα ήταν ψηλή (σύνθετη)
- Πού πήγε ο Άλκης; (ερώτηση)
- Τι ωραίο παιδάκι η Μαρίνα! (επιφωνηματική)

Μετά από τις πιο πάνω διευκρινίσεις, ορίζουμε την σύνταξη της τυπικής γλώσσας του προτασιακού λογισμού ως εξής:

1. Το λεξικό της γλώσσας αποτελείται από άπειρες ατομικές δηλώσεις που αναπαριστούμε με τα γράμματα p, q, r,…και τόνους ή δείκτες ανάλογα με τις ανάγκες μας, π.χ. p: «Το υποκείμενο συμφωνεί με το ρήμα κατά πρόσωπο και αριθμό», q: «Οι γάτες έχουν πράσινο χρώμα».
2. Κάθε ατομική δήλωση αποτελεί μια ***ορθά σχηματισμένη πρόταση*** (well formed formula) (ΟΣΠ).
3. Κάθε ΟΣΠ της οποίας προηγείται το σύμβολο ¬ (άρνηση) είναι μια ΟΣΠ, π.χ. ¬ p.
4. Κάθε δύο (όχι αναγκαστικά διακριτές) ΟΣΠ μπορούν να συνενωθούν σε μία ΟΣΠ με
   - σύζευξη, σύμβολο Λ, π.χ. ¬ p Λ ¬ q
   - διάζευξη, σύμβολο V, π.χ. ¬ p Vq
   - συνεπαγωγή, σύμβολο →, π.χ. p→q
   - διπλή συνεπαγωγή ή ισοδυναμία, σύμβολο ↔, π.χ. p ↔ q

1.3.1.2 Προτασιακός λογισμός-Σημασία

Σε κάθε ατομική δήλωση αποδίδεται μία και μόνο μία από τις δύο διαθέσιμες τιμές αληθείας: 0 (ψέμμα-False) ή 1 (αλήθεια-True). Συνήθως χρησιμοποιούμε ***πίνακες τιμών αληθείας*** (truth value tables) για να διευκολυνθούμε στον υπολογισμό των τιμών αληθείας των ΟΣΠ. Οριζοντίως τοποθετούνται οι δομές και καθέτως οι τιμές αληθείας που τους αποδίδονται. Στον Πίνακα 1 έχουμε αποδώσει την τιμή 1 στην ατομική δήλωση p και την τιμή 0 στην ατομική δήλωση q.

p	**q**
1	0

Πίνακας 1.1 *Πίνακας τιμών αληθείας*

Άρνηση

Η άρνηση (negation) αντιστρέφει την τιμή αληθείας μιας πρότασης. Ο Πίνακας 2 δείχνει όλες τις πιθανές περιπτώσεις.

p	**¬ p**
1	0
0	1

Πίνακας 1.2 *Πίνακας τιμών αληθείας για την άρνηση*

Ισχύει ο νόμος της Διπλής Άρνησης:
¬ ¬ p ↔p

Άσκηση 1.15: Ισχύει στη φυσική γλώσσα ο νόμος της διπλής άρνησης; Εξετάστε τα ακόλουθα παραδείγματα και επιχειρηματολογήστε σχετικά με το αν ισχύει ο νόμος αυτός ή όχι.
Ελληνικά:
Αν θεωρήσουμε ότι το “άσκημος” είναι η άρνηση του “ωραίος”, ισχύει ότι
“Δεν είναι άσκημος” ↔ “Είναι ωραίος”;
“Δεν θα κάνω τίποτε” ↔ “Θα κάνω τα πάντα”
Αγγλικά:
“I will not do nothing” ↔ “I will do everything”

Σύζευξη

Η ***σύζευξη*** (conjunction) συμπαραθέτει δύο απλές δηλώσεις (δύο ΟΣΠ). Ο σύνδεσμος της Ελληνικής «και» φαίνεται σαν το αντίστοιχο της λογικής σύζευξης στην φυσική γλώσσα αλλά χρειάζεται προσοχή γιατί είναι αμφίσημος. Στις πιο κάτω προτάσεις ο «και» χρησιμοποιείται σαν τον λογικό σύνδεσμο:

- Ο Γιώργος τρέχει και ο Άλκης κοιμάται.

- Βρέχει και κάνει κρύο.

Ενώ στις πιο κάτω προτάσεις ο «και» δεν χρησιμοποιείται σαν τον λογικό σύνδεσμο:

- Ο Γιώργος τρέχει και κουράζεται (σχέση αιτίου-αιτιατού)
- Η Μαρίνα ντύθηκε και βγήκε έξω (χρονική αλληλουχία)

Για την σύζευξη ισχύει ο Πίνακας 3 όσον αφορά τις τιμές αληθείας:

p	**q**	**p Λ q**
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	0

Πίνακας 1.3 *Πίνακας τιμών αληθείας για την σύζευξη*

Διάζευξη

Και η ***διάζευξη*** (disjunction) συμπαραθέτει δύο απλές δηλώσεις. Ο σύνδεσμος της Ελληνικής «ή» φαίνεται σαν το αντίστοιχο της μαθηματικής διάζευξης στην φυσική γλώσσα αλλά χρειάζεται και πάλι προσοχή γιατί είναι αμφίσημος μεταξύ μιας αποκλειστικής ή μη αποκλειστικής ερμηνείας. Στις πιο κάτω προτάσεις ο «ή» χρησιμοποιείται με μη αποκλειστική ερμηνεία:

- Ο Γιώργος τρέχει ή ο Άλκης κοιμάται (ή και τα δύο).
- Βρέχει ή έχει συννεφιά.

Ενώ στην πιο κάτω πρόταση ο «ή» χρησιμοποιείται με αποκλειστική ερμηνεία:

- Ο Γιώργος τρώει ή ο Γιώργος κοιμάται.

Ο Πίνακας 4 ισχύει για την περίπτωση της μη αποκλειστικής ερμηνείας:

p	**q**	**p V q**
1	1	1
0	1	1
1	0	1
0	0	0

Πίνακας 1.4 *Πίνακας τιμών αληθείας για την διάζευξη (μη αποκλειστική)*

Συνεπαγωγή

Για την ***συνεπαγωγή*** (conditional) **p → q** ισχύει ο Πίνακας 5 όσον αφορά τις τιμές αληθείας:

p	**q**	**p → q**	**¬p**	**¬p V q**
1	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
0	0	1	1	1

Πίνακας 1.5 *Πίνακας τιμών αληθείας για την συνεπαγωγή*

Στον Πίνακα 5 παρατηρούμε την ***λογική ισοδυναμία*** (logical equivalence) των εκφράσεων **p → q** και **¬p V q** (για τη λογική ισοδυναμία μιλάμε αμέσως παρακάτω).

Η συνεπαγωγή έχει αποτελέσει το αντικείμενο πολλών συζητήσεων. Αντιστοιχεί στην ελληνική δομή «εάν…τότε» αλλά με διαφοροποιήσεις, κυρίως ως προς τη σχέση αιτίου-αιτιατού που ενέχει στην φυσική γλώσσα αλλά οπωσδήποτε όχι στη Λογική. Έτσι η πρώτη και η τέταρτη περίπτωση του Πίνακα 1.5 συμφωνούν αρκετά με την διαίσθηση του φυσικού ομιλητή, όπως φαίνεται στην δομή: «Εάν βρέχει, έχει σύννεφα» και όταν οι δύο συνδεόμενες απλές δηλώσεις είναι αληθείς ή και οι δύο είναι ψευδείς.

Πολλές συζητήσεις έχει προκαλέσει κυρίως η δεύτερη περίπτωση του Πίνακα 1.5. Έστω ότι δεν βρέχει αλλά έχει συννεφιά. Είναι η πρότασή μας αληθής ή ψευδής; Ένας λόγος που εξηγεί αυτή την αμφιλεγόμενη, ας πούμε, επιλογή της Λογικής είναι ότι μία ΟΣΠ μπορεί να είναι είτε ψευδής είτε αληθής, καθώς οι τιμές αληθείας είναι όλες και όλες δύο και δεν υπάρχει τρίτη. Η Λογική διάλεξε να θεωρήσει αληθή και όχι ψευδή αυτήν την περίπτωση για λόγους που έχουν να κάνουν με την απόδειξη επιχειρημάτων στα μαθηματικά, πιθανόν απομακρυνόμενη από τον τρόπο που χρησιμοποιείται η συνεπαγωγή στην καθημερινή γλώσσα όπου συχνά δηλώνει μία σχέση αιτιακότητας. Έτσι, στα μαθηματικά το ενδιαφέρον εστιάζεται στην απόδειξη, δηλαδή στο να διασφαλιστεί ότι από αληθείς υποθέσεις λαμβάνονται αληθή συμπεράσματα και ότι αποκλείεται η περίπτωση όπου από αληθείς υποθέσεις λαμβάνονται εσφαλμένα συμπεράσματα. Από αυτήν την οπτική γωνία δεν ενοχλεί το να καταλήγει κανείς σε ορθό συμπέρασμα από εσφαλμένες υποθέσεις. Ας δούμε τη δήλωση «Εάν δύο τρίγωνα είναι ίσα, οι γωνίες τους είναι ίσες». Τα τρίγωνα μπορεί να έχουν ίσες γωνίες χωρίς να είναι ίσα (εάν είναι όμοια) αλλά δεν είναι δυνατόν να είναι ίσα και να μην έχουν ίσες γωνίες.

Λογική ισοδυναμία

Η ***(λογική) ισοδυναμία*** (logical equivalence) **p ↔ q** αντιστοιχεί στη φυσική γλώσσα στα συνδετικά «εάν και μόνον εάν» ή «είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη». Στα αγγλικά το συνδετικό αυτό εκφράζεται από την συντομογραφία *iff* και σε ορισμένα ελληνικά συγγράμματα με την συντομογραφία *ανν*.

Για την ισοδυναμία ισχύει ο Πίνακας 6 όσον αφορά τις τιμές αληθείας:

p	q	p ↔ q
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	1

Πίνακας 1.6 *Πίνακας τιμών αληθείας για την λογική ισοδυναμία*

Ο Πίνακας 6 δείχνει ότι η λογική ισοδυναμία είναι αληθής όταν οι δύο ισοδύναμες ΟΣΠ έχουν τις ίδιες τιμές αληθείας.

1.3.1.3 Νόμοι του προτασιακού λογισμού

Οι νόμοι του προτασιακού λογισμού μας επιτρέπουν να απλοποιούμε φόρμουλες με πολλά σύμβολα και συνδετικά. Είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε μία απόδειξη των νόμων με τη βοήθεια των πινάκων αληθείας. Για παράδειγμα, στον Πίνακα 7 αποδεικνύουμε την πρώτη περίπτωση της ***επιμεριστικής ιδιότητας*** (distributive law) (η σχέση με το νούμερο 1 που ακολουθεί αμέσως πιο κάτω): βλέπουμε ότι οι τιμές αληθείας των στηλών **(pV (q Λ r)) και (p V q) Λ (p V r**) είναι οι ίδιες ή, να το διατυπώσουμε αλλιώς, οι δύο ΟΣΠ είναι λογικά ισοδύναμες.

1. (pV (q Λ r)) ↔(p V q) Λ (p V r)
2. (p Λ (q Vr)))) ↔ (p Λ q) V (p Λ r)

p	q	r	(qΛr)	(pV(qΛr))	(pV q)	(pV r)	(p V q) Λ (p V r)
1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Πίνακας 1.7 *Απόδειξη της επιμεριστικής ιδιότητας (pV (q Λ r)) ↔(p V q) Λ (p V r)*

Άσκηση 1.16: Ποιοι είναι οι καταλληλότεροι λογικοί σύνδεσμοι για τις πιο κάτω σύνθετες δηλώσεις; Εξηγήστε τις επιλογές σας.

(1) Ο Άλκης αγαπά τις γάτες και η Μαρίνα αγαπά τους σκύλους.
(2) Όταν βρέχει, τότε ο Άλκης κρατά ομπρέλα.
(3) Βρέχει και ο Άλκης κρατά ομπρέλα.
(4) Είτε βρέχει είτε έχει ήλιο.
(5) Αγοράζω έπιπλα όταν έχω χρήματα.

Άσκηση 1.17: Αποδείξτε τη δεύτερη περίπτωση της επιμεριστικής ιδιότητας με χρήση πινάκων αληθείας:

(p Λ (q Vr)) = (p Λ q) V (p Λ r)

Άσκηση 1.18: Αποδείξτε τις κάτωθι φόρμουλες με χρήση πινάκων αληθείας (T(rue) είναι η τιμή αληθείας 1 και F(alse) η τιμή αληθείας 0):

(1) (pVT) ↔T, (pVF) ↔p
(2) (pΛT) ↔p, (pΛF) ↔F
(3) (pV¬p) ↔T, ¬¬p↔p, (pΛ¬p) ↔F

Επιχειρήματα και Κανόνες Λογικής

Μέχρι στιγμής έχουμε δει πώς συντάσσονται οι ΟΣΠ του προτασιακού λογισμού και πώς υπολογίζονται οι τιμές αληθείας τους. Στη συνέχεια, θα δώσουμε μια πρώτη ιδέα για το πώς αναπτύσσονται τα ***επιχειρήματα*** (arguments).

Κάθε επιχείρημα περιλαμβάνει ένα μη κενό σύνολο ***προϋποθέσεων*** (premises) που θεωρούνται αληθείς, και ένα ***συμπέρασμα*** (conclusion) που καλούμαστε να αποδείξουμε ότι είναι αληθές. Η απόδειξη αυτή είναι καθαρά συντακτική, δηλαδή στηρίζεται στην διαχείριση των ΟΣΠ ως συμβολοσειρών και όχι στην ερμηνεία τους. Στην διαδικασία της απόδειξης, εκτός από τους νόμους που είδαμε προηγουμένως μας διευκολύνουν και οι ***κανόνες της Λογικής*** (logical laws) των οποίων η ισχύς αποδεικνύεται πάλι με συντακτικό τρόπο. Θα παραθέσουμε δύο μόνο κανόνες της Λογικής.

Modus Ponens

Ο πρώτος κανόνας της Λογικής που παραθέτουμε είναι ο ***Modus Ponens***. Προϋποθέσεις είναι οι p→q, p και συμπέρασμα η q. Γράφουμε σχέσεις σαν την (13). Στον Πίνακα 8 δίνουμε μια απόδειξη του Modus Ponens.

(13) Modus Ponens

p→q, p

‡q

(p→q) Λ p	Οι προϋποθέσεις είναι και οι δύο αληθείς
(¬p V q) Λ p	Αντικαθιστούμε την συνεπαγωγή με την ισοδύναμη διάζευξη
(¬p Λ p) V (q Λ p)	Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα
q Λ p	Η (¬p Λ p) είναι αντίφαση και έχει πάντα τιμή αληθείας 0, άρα η διάζευξη έχει την τιμή αληθείας του πρώτου μέλους της
q Λ T	Η p είναι προϋπόθεση, άρα έχει την τιμή 1 (T)
q	Η τιμή αληθείας της προηγούμενης ΟΣΠ είναι η τιμή αληθείας της q διότι το δεύτερο μέρος της σύζευξης έχει εξ υποθέσεως την τιμή 1(T)

Πίνακας 1.8 *Απόδειξη για τον Modus Ponens*

Ας δούμε μια εφαρμογή του Modus Ponens (14):

(14) Εάν βρέχει, τότε θα πάρω ομπρέλα
Βρέχει
‡ Θα πάρω ομπρέλα

Modus Tollens

Ο δεύτερος κανόνας της Λογικής που παραθέτουμε είναι ο ***Modus Tollens*** (15). Στον Πίνακα 9 δίνουμε μια απόδειξη του Modus Tollens.

(15) Modus Tollens
p→q, ¬q
‡¬p

(p→q) Λ ¬q	Οι προϋποθέσεις είναι και οι δύο αληθείς
(¬p V q) Λ ¬q	Αντικαθιστούμε την συνεπαγωγή με την ισοδύναμη διάζευξη
(¬p Λ ¬q) V (q Λ¬q)	Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα
(¬p Λ ¬q)	Η (qΛ¬q) είναι αντίφαση και έχει πάντα τιμή αληθείας 0, άρα η διάζευξη έχει την τιμή αληθείας του πρώτου μέλους της
¬p Λ T	Η ¬q είναι προϋπόθεση, άρα έχει την τιμή 1 (T)
¬p	Η τιμή αληθείας της προηγούμενης ΟΣΠ είναι η τιμή αληθείας της ¬p διότι το δεύτερο μέρος της σύζευξης έχει τιμή αληθείας 1(T)

Πίνακας 1.9 *Απόδειξη για τον Modus Tollens*

Ας δούμε μια εφαρμογή του Modus Tollens (16):

(16) Εάν ο Γιάννης μελετά, ο Γιάννης έχει καλές επιδόσεις.
Ο Γιάννης δεν έχει καλές επιδόσεις
‡ Ο Γιάννης δεν μελετά

Άσκηση 1.19: Αποδείξτε ότι τα πιο κάτω συμπεράσματα είναι σωστά.

α.

p→q
q→r
¬r
‡¬p

β.

p
¬r
(p Λ ¬r)→q
‡q

Άσκηση 1.20: Δίνεται η εξής προϋπόθεση:

Εάν τα παιδιά κοιμούνται, η Μαρίνα θα πάει βόλτα.

Δώστε την κατάλληλη δήλωση ως προϋπόθεση και χρησιμοποιήστε τον κατάλληλο νόμο της Λογικής για να δείξετε ότι η Μαρίνα θα πάει βόλτα.

Ομοίως δίνεται η προϋπόθεση:

Εάν το όνομα είναι «ιαγουάρος», τότε το όνομα «αίλουρος» είναι υπερώνυμο.

Δώστε την κατάλληλη δήλωση ως προϋπόθεση και χρησιμοποιήστε τον κατάλληλο νόμο της Λογικής για να δείξετε ότι το όνομα «αίλουρος» είναι υπερώνυμο.

Άσκηση 1.21: Δίνεται η εξής προϋπόθεση:

Αν ο Γιάννης αγαπά την Μαρία, τότε η Μαρία είναι ευτυχισμένη.

Δώστε την κατάλληλη δήλωση ως προϋπόθεση και χρησιμοποιήστε τον κατάλληλο νόμο της Λογικής για να δείξετε ότι Ο Γιάννης δεν αγαπά την Μαρία.

Ομοίως δίνεται η προϋπόθεση:

Εάν η ονοματική φράση NP1 είναι σε ονομαστική, η NP1 είναι υποκείμενο κάποιου ρήματος.

Δώστε την κατάλληλη δήλωση ως προϋπόθεση και χρησιμοποιήστε τον κατάλληλο νόμο της Λογικής για να δείξετε ότι η ονοματική φράση NP1 δεν είναι σε ονομαστική.

Συμπερασματικά

Είδαμε τον απλούστερο τρόπο που διαθέτει η μαθηματική Λογική για να χτίζει βήμα-βήμα ορθά επιχειρήματα ξεκινώντας από ορθές προϋποθέσεις. Γιατί ενδιαφέρει τον Υπολογιστικό Γλωσσολόγο ένα τέτοιο σύστημα; Διότι αυτούς τους μηχανισμούς χρησιμοποιούν και οι άνθρωποι και οι υπολογιστές για να κωδικοποιήσουν, ταξινομήσουν και επεξεργαστούν δεδομένα και μάλιστα τα γλωσσικά δεδομένα, όπως φάνηκε από τις δύο τελευταίες ασκήσεις. Η κατανόηση των αρχών και μεθόδων της Υπολογιστικής Γλωσσολογίας προϋποθέτει καλή κατανόηση των βασικών μαθηματικών εργαλείων που τις υποστηρίζουν.

1.3.2 Κατηγορικός λογισμός πρώτης τάξης (ΚΛ)

Δυστυχώς, ο προτασιακός λογισμός είναι υπερβολικά απλός για τις ανάγκες μας. Ας ξαναδούμε τις προτάσεις που δώσαμε ως παραδείγματα απλών δηλώσεων για τον προτασιακό λογισμό:

(1) Ο Άλκης τρέχει.
(2) Η Μαρίνα είναι ψηλή.
(3) Ο Άλκης ξέρει την Οδύσσεια.

Στον προτασιακό λογισμό, αυτές τις δηλώσεις τις αντιμετωπίσαμε ως ενιαίες δομές και αποδώσαμε τιμές αληθείας σε κάθε μία χωριστά. Δεν είχαμε τρόπο να δούμε αν η Μαρίνα τρέχει, για παράδειγμα, ή εάν ο Άλκης είναι ψηλός ή ποιοι άλλοι τρέχουν ή ποιοι άλλοι είναι ψηλοί γιατί δεν είχαμε πρόσβαση στα δομικά μέρη των δηλώσεων.

1.3.2.1 Σύνταξη του κατηγορικού λογισμού πρώτης τάξης

Αν και ορίσαμε τις ΟΣΠ του προτασιακού λογισμού με τυπικό τρόπο, δεν θα κάνουμε το ίδιο και για τον κατηγορικό λογισμό πρώτης τάξης (ΚΛ) αλλά θα περιγράψουμε τις ΟΣΠ άτυπα. Επιλέγουμε αυτήν την προσέγγιση γιατί στόχος μας είναι να γίνουν αντιληπτές οι ιδέες χωρίς να βαρύνουμε ιδιαίτερα το κείμενο με μαθηματικές διατυπώσεις. Οι ενδιαφερόμενοι θα βρουν την τυπική διατύπωση των ιδεών που περιγράφουμε στη βιβλιογραφία που δίνουμε, π.χ. Partee et al. (1990).

Στον ΚΛ έχουμε τη δυνατότητα να συνθέσουμε μία ΟΣΠ χρησιμοποιώντας ***κατηγορήματα*** (predicates) και ***όρους*** (terms) που διακρίνονται σε σταθερούς και μεταβλητούς. Αν «μεταφράσουμε» τις πιο πάνω δηλώσεις σε ΟΣΠ του ΚΛ έχουμε την εξής αντιστοιχία:

(1΄) Ο Άλκης τρέχει ---- *τρέχω* (Άλκης)
(2΄) Η Μαρίνα είναι ψηλή. ---- *είμαι_ψηλός* (Μαρίνα)
(3΄) Ο Άλκης ξέρει την Οδύσσεια. ---- *ξέρω* (Άλκης, Οδύσσεια)

Τα κατηγορήματα είναι τα *τρέχω*, *είμαι_ψηλός* και *ξέρω* και το καθένα από αυτά υποστηρίζει έναν ή δύο σταθερούς όρους, όπως ο σταθερός όρος Άλκης για το *τρέχω* και οι σταθεροί όροι Άλκης, Οδύσσεια για το *ξέρω*. Τα κατηγορήματα, λοιπόν, υποστηρίζουν όρους και δεν υπάρχει περιορισμός στον αριθμό των όρων, πλην του ότι πρέπει να είναι πεπερασμένος.

Κάλλιστα θα μπορούσαν οι όροι να είναι μεταβλητοί, δηλαδή οι παραστάσεις *τρέχω* (x), *είμαι_ψηλός* (y), *ξέρω* (x,y), όπου οι x, y είναι μεταβλητές, είναι ορθά σχηματισμένες παραστάσεις (ΟΣΠ) στον ΚΛ. Επιτρέπουμε μεταβλητές και για τα κατηγορήματα, π.χ. P(x) όπου P είναι μία μεταβλητή που παίρνει τιμές από το σύνολο {*τρέχω*, *είμαι_ψηλός*, *ξέρω*, ...}.

Μέχρι στιγμής έχουμε εισαγάγει

- τα κατηγορήματα που τα γράφουμε στα Ελληνικά με μικρούς πλάγιους χαρακτήρες π.χ. *ξέρω*
- μεταβλητές για τα κατηγορήματα που τις γράφουμε με κεφαλαίους λατινικούς χαρακτήρες, π.χ. P,
- τους σταθερούς όρους που τους γράφουμε με ορθούς χαρακτήρες και το πρώτο κεφαλαίο, π.χ. Άλκης
- τους μεταβλητούς όρους που τους γράφουμε με λατινικούς μικρούς ορθούς χαρακτήρες, π.χ. x, y

Άσκηση 1.22: Μεταφράστε σε ΚΛ τις πιο κάτω δηλώσεις:

1. Ο Πέτρος δίνει στην Ξένια την Ιλιάδα.
2. Η Έφη ζωγράφισε την Ακρόπολη.
3. Ο Τάκης είναι ψηλός.

1.3.2.2 Ποσοδείκτες

Ο ΚΛ μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε και τις εξής δύο σημαντικές δυνατότητες της φυσικής γλώσσας:

-τον ***καθολικό ποσοδείκτη*** (universal quantifier) (∀), ο οποίος στις πιο κάτω δηλώσεις αντιστοιχεί στις λέξεις «κάθε», «όλοι»:

- Κάθε κατεργάρης στον πάγκο του.
- Όλοι αντάμα και ο ψωριάρης χώρια.

-τον ***υπαρξιακό ποσοδείκτη*** (existential quantifier) (∃) ο οποίος στις πιο κάτω δηλώσεις αντιστοιχεί στις λέξεις «μερικοί», «ένα» και «κάποιο»:

- Μερικοί το προτιμούν καυτό
- Μου τό ‘πε ένα πουλάκι
- Κάποιο λάκκο έχει η φάβα

Έτσι δημιουργούμε δηλώσεις του ΚΛ όπως οι πιο κάτω:

- Όλοι τρέχουν---(∀x) *τρέχω* (x)
- Υπάρχει (τουλάχιστον) ένας/κάποιος είναι ψηλός--- (∃y) *είμαι_ψηλός* (y)

Η άρνηση, η σύζευξη, η διάζευξη, η συνεπαγωγή και η ισοδυναμία χρησιμοποιούνται και στον ΚΛ όπως και στον προτασιακό λογισμό.

Για την σχέση της άρνησης με τους ποσοδείκτες ισχύει ο κάτωθι νόμος τον οποίο θα σχολιάσουμε αργότερα στην ενότητα 1.3.2.4 για τους ποσοδείκτες:

Αν η μεταβλητή P πάρει την τιμή *τρέχω* τότε έχουμε την φόρμουλα

¬(∀x) *τρέχω* (x) ↔(∃ x) ¬*τρέχω*(x)

που αποδίδεται στα Ελληνικά ως εξής: '«Δεν τρέχουν όλοι» ισοδυναμεί με «Υπάρχει τουλάχιστον ένας που δεν τρέχει»'.

Εμβέλεια ποσοδείκτη

Έστω φ μία ΟΣΠ του ΚΛ στην οποία είναι προσαρτημένος ένας ποσοδείκτης, π.χ. (∀x)φ. Λέμε ότι η φ βρίσκεται στην εμβέλεια του καθολικού ποσοδείκτη (φ is the scope of the quantifier). Στον Πίνακα 10 δίνουμε μερικά παραδείγματα όπου έχουμε υπογραμμίσει το μέρος της ΟΣΠ που βρίσκεται στην εμβέλεια του ποσοδείκτη.

(∀x) <u>*τρέχω* (x)</u> Λ (∀y) <u>*τραγουδώ* (y)</u>	εμβέλειες των (∀x) και (∀y)
(∀x) [<u>*τρέχω* (x) Λ (∃y) *τραγουδώ* (x,y)</u>]	εμβέλεια του (∀x)
(∀x) [<u>*τρέχω* (x) Λ *τραγουδώ* (x,y)</u>]	εμβέλεια του (∀x)
(∀x) [*τρέχω* (x) Λ (∃y) <u>*τραγουδώ* (x,y)</u>]	εμβέλεια του (∃y)

Πίνακας 1.10 *Παραδείγματα εμβέλειας ποσοδεικτών*

Μία μεταβλητή που βρίσκεται στην εμβέλεια ενός ποσοδείκτη λέγεται δεσμευμένη. Στο παράδειγμα (∀x) [*τρέχω* (x) Λ *τραγουδώ* (x,y)] η μεταβλητή x είναι δεσμευμένη ενώ η y ελεύθερη.

1.3.2.3 Η σημασία στον ΚΛ

Όπως στον προτασιακό λογισμό, και εδώ οι τιμές αληθείας είναι μόνο δύο, 0 και 1. Κάθε ΟΣΠ μπορεί να έχει μία και μόνο μία τιμή αληθείας.

Η τιμή αληθείας μιας ΟΣΠ προκύπτει από έναν «κόσμο», ένα ***μοντέλο*** (model): αν η ΟΣΠ αντιστοιχεί σε «γεγονός» αυτού του κόσμου, δηλαδή του μοντέλου, τότε είναι αληθής, αλλιώς είναι ψευδής. Αυτή είναι η γενική ιδέα την οποία θα κάνουμε λίγο πιο συγκεκριμένη στη συνέχεια. Η όλη διαδικασία είναι βασισμένη στη θεωρία των συνόλων.

Μοντέλα

Τα μοντέλα είναι δικές μας απεικονίσεις κάποιων όψεων της πραγματικότητας. Γι 'αυτό μιλάμε για μερικά μοντέλα. Ένα μερικό μοντέλο αποτελείται από

- Ένα πεπερασμένο σύνολο οντοτήτων Δ

- Μία συνάρτηση Φ η οποία απεικονίζει

(ι) κάθε σταθερό όρο σε ένα μέλος του Δ

(ιι) κάθε κατηγόρημα με έναν όρο σε κάποιο υποσύνολο του Δ

(ιιι) κάθε κατηγόρημα με δύο όρους σε κάποιο υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου Δx Δ

………………………………………………………………………………..

(ιν) κάθε κατηγόρημα με N όρους σε κάποιο υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου

$\underbrace{\Delta \times \Delta \times \ldots \times \Delta}_{N}$

(ν) μια συνάρτηση γ η οποία θα «αναθέτει» στις μεταβλητές τιμές από το σύνολο Δ (δεν θα επιμείνουμε περισσότερο εδώ στο πώς ακριβώς θα γίνεται αυτή η «ανάθεση»)

Πώς αποδίδεται σημασία στις ΟΣΠ του ΚΛ

Έχοντας σαν βάση την περιγραφή ενός μερικού μοντέλου και την άτυπη περιγραφή της σύνταξης του ΚΛ δίνουμε ένα παράδειγμα για το πώς υπολογίζεται η τιμή αληθείας των ΟΣΠ του ΚΛ.

Αν έχουμε το εξής λεξιλόγιο:

- το σύνολο των σταθερών όρων A={Δι, Αθ, Πο, Απ, Αρ, Ες, Αα, Ββ}

- το σύνολο των μεταβλητών όρων {x, y, z}
- τα κατηγορήματα *είναι_θεός*(x), *είναι_γονιός* (x,y)

Και έστω ότι έχουμε το εξής μερικό μοντέλο:

- Ως βασικό σύνολο οντοτήτων τους παλιούς μας γνώριμους, τους Ολύμπιους θεούς συν μερικούς θνητούς.

Δ= {Δίας, Αθηνά, Ποσειδών, Απόλλων, Άρης, Εστία, Αγαμέμνων, Κλυταιμνήστρα}

- Και την πιο κάτω «ερμηνεία», δηλαδή την συνάρτηση Φ:

Φ(Δι)=Δίας, Φ(Αθ)=Αθηνά, Φ(Πο)=Ποσειδών, Φ(Απ)=Απόλλων, Φ(Αρ)=Άρης, Φ(Ες)=Εστία, Φ(Αα)= Αγαμέμνων, Φ(Ββ)=Κλυταιμνήστρα

Φ(*είναι_θεός*) = {Δίας, Αθηνά, Ποσειδών, Απόλλων, Άρης, Εστία}

Φ(*είναι_γονιός*)= {<Δίας, Αθηνά>, <Δίας, Απόλλων>}

Έστω ότι τώρα θέλουμε να δούμε την τιμή αληθείας της ΟΣΠ *είναι_θεός* (Δι). Η Φ μας δίνει ότι ο σταθερός όρος Δι ερμηνεύεται στο μοντέλο μας ως η οντότητα Δίας. Βλέπουμε ότι η οντότητα Δίας εμφανίζεται στο μοντέλο μας ως μέλος του συνόλου που αποτελεί τιμή της συνάρτησης Φ(*είναι_θεός*). Άρα στην ΟΣΠ *είναι_θεός* (Δι) αποδίδεται η τιμή αληθείας 1.

Στην ΟΣΠ *είναι_θεός* (Αα) αποδίδεται η τιμή αληθείας 0. Αυτό συμβαίνει γιατί Φ(Αα)= Αγαμέμνων και η οντότητα Αγαμέμνων δεν είναι μέλος του συνόλου οντοτήτων που αποτελούν τιμή της Φ(*είναι_θεός*).

Ας δούμε τώρα την τιμή αληθείας της ΟΣΠ *είναι_γονιός* (Δι,Αθ). Όπως και πριν, η Φ μας δίνει ότι ο σταθερός όρος Δι ερμηνεύεται στο μοντέλο μας ως η οντότητα Δίας και ο σταθερός όρος Αθ ως η οντότητα Αθηνά. Και πάλι η Φ μας λέει ότι το διατεταγμένο ζεύγος <Δίας, Αθηνά> είναι μέλος του συνόλου των διατεταγμένων ζευγών οντοτήτων που αποτελούν τιμή της Φ(*είναι_γονιός*).

Μέχρι στιγμής μιλήσαμε για την σημασία των ΟΣΠ που περιέχουν σταθερούς όρους. Εάν η ΟΣΠ περιέχει μεταβλητούς όρους, π.χ. *είναι_θεός*(x), τότε χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση γ η οποία αναθέτει στην μεταβλητή x τιμές οι οποίες είναι μέλη του συνόλου των οντοτήτων. Από το σημείο αυτό και πέρα η διαδικασία είναι όπως και πριν.

Ας δούμε πώς υπολογίζεται η τιμή αληθείας μιας ΟΣΠ που περιέχει τον καθολικό ποσοδείκτη, π.χ. (∀x) *είναι_θεός*(x). Πρέπει να δείξουμε ότι για οποιαδήποτε οντότητα του μοντέλου ισχύει η ως άνω ΟΣΠ. Η συνάρτηση γ εφαρμόζεται διαδοχικά μέχρι να ανατεθούν στην μεταβλητή x όλες οι οντότητες. Κάθε ανάθεση ελέγχεται με βάση την τιμή Φ(*είναι_θεός*). Βλέπουμε ότι κάποιες αναθέσεις, π.χ. γ(x)= Κλυταιμνήστρα δεν ανήκουν στην *είναι_θεός*(x) και την καθιστούν ψευδή (στο συγκεκριμένο μοντέλο). Δίνουμε λοιπόν στην ΟΣΠ (∀x) *είναι_θεός*(x) την τιμή αληθείας 0. Αντίθετα, όπως μπορείτε εύκολα να διαπιστώσετε, η ΟΣΠ (∃x) *είναι_θεός*(x) είναι αληθής στο μοντέλο μας.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η σειρά εφαρμογής των ποσοδεικτών επηρεάζει τις τιμές αληθείας της ΟΣΠ. Θα επανέλθουμε στο θέμα αυτό στην Ενότητα Νόμοι Αλληλεξάρτησης των Ποσοδεικτών.

Η ΟΣΠ με δύο ποσοδείκτες, (∀x) (∃y) *είναι_γονιός* (x,y) θα ήταν αλήθεια εάν για κάθε x οριζόταν ένα τουλάχιστον παιδί του. Όμως, δεν είναι δυνατόν σε ένα πεπερασμένο σύνολο να ορίζονται για κάθε οντότητα οι απόγονοί της. Ένα πεπερασμένο σύνολο αφήνει αναγκαστικά κάποιες οντότητες χωρίς απογόνους. Έτσι και εδώ υπάρχουν οντότητες, π.χ. Ποσειδών, Απόλλων για τις οποίες δεν δίνεται πληροφορία για απογόνους. Συνεπώς η συγκεκριμένη ΟΣΠ παίρνει την τιμή αληθείας 0.

Η ΟΣΠ με την αντίθετη σειρά εφαρμογής των ποσοδεικτών (∃y)(∀x) *είναι_γονιός* (x,y) θα ήταν αλήθεια εάν υπήρχε κάποια οντότητα που θα ήταν γονέας όλων των οντοτήτων, δηλαδή και του εαυτού της. Όμως αυτό δεν είναι πληροφορία που είναι δυνατόν να υπάρξει στο μοντέλο μας και συνεπώς η συγκεκριμένη ΟΣΠ παίρνει την τιμή αληθείας 0.

Κλείνουμε αυτήν την ενότητα αναφέροντας ότι οι πίνακες αληθείας που ορίστηκαν για την άρνηση, την σύζευξη, τη διάζευξη, την συνεπαγωγή και την ισοδυναμία, ισχύουν και για τον ΚΛ (αφού ληφθούν όλα τα προηγούμενα υπόψη).

Άσκηση 1.23: Διαμορφώστε το μερικό μοντέλο της ενότητας έτσι ώστε η ΟΣΠ (∃y) (∀x) *είναι_γηραιότερος* ή *συνομήλικος* (x,y) να είναι αληθής.

Ενδιαφέρουσες αντιστοιχίες ανάμεσα στον ΚΛ και την φυσική γλώσσα

Ας δούμε την «μετάφραση» της πρότασης «Όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί» στον ΚΛ. Ορίζουμε τα κατηγορήματα *άνθρωπος*(x) και *θνητός*(x) και γράφουμε (∀x)(*άνθρωπος*(x)→*θνητός*(x)). Η μετάφραση αυτή θα μπορούσε να αποδοθεί χονδρικά ως εξής: “στο συγκεκριμένο σύμπαν (σσ. που αναπαριστάται κάθε φορά από το αντίστοιχο μοντέλο) εάν κάτι είναι άνθρωπος είναι και θνητός”. Λόγω της συνεπαγωγής, αν το μοντέλο δεν περιέχει ανθρώπους, η πρόταση έχει τιμή αληθείας 1 για όλες τις αναθέσεις της μεταβλητής x. Αν πάλι περιέχει ανθρώπους, δεν αληθεύει όταν δεν υπάρχουν θνητοί στο μοντέλο ή όταν έστω και ένας άνθρωπος δεν είναι θνητός. Δεν έχουμε μεταφράσει την δήλωση «Όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί» ως σύζευξη, που πιθανόν θα φαινόταν σαν ένα καλό μεταφραστικό αντίστοιχο, γιατί θα ήταν σα να δεσμεύαμε το σύμπαν λέγοντας ότι οτιδήποτε είναι σε αυτό είναι άνθρωπος και θνητός. Αντίθετα, εμείς επικεντρώνουμε την προσοχή μας, περιορίζοντας κατάλληλα το σύνολο οντοτήτων στο οποίο αναφερόμαστε, λέγοντας ότι εάν είναι άνθρωπος (περιορισμός) είναι και θνητός. Δεν απαιτούμε να υπάρχουν άνθρωποι στο μοντέλο μας και αυτό είναι το σημαντικό σημείο στην γλωσσική δήλωση και στο μεταφραστικό της αντίστοιχο στον ΚΛ.

Ας δούμε και την «μετάφραση» της πρότασης «Υπάρχει ένας άνθρωπος θνητός» στον ΚΛ. Ορίζουμε τα κατηγορήματα *άνθρωπος*(x) και *θνητός*(x) και γράφουμε (∃x)((*άνθρωπος*(x) Λ *θνητός*(x)). Η μετάφραση αυτή είναι αληθής σε ένα μοντέλο όπου υπάρχει ένας τουλάχιστον θνητός άνθρωπος. Εδώ έχει επιλεχθεί η σύζευξη γιατί η γλωσσική δήλωση εμπεριέχει μία προϋπόθεση, ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον άνθρωπος και συνεπώς θέλουμε να αληθεύει η πρόταση μόνον όταν το μοντέλο μας περιέχει ανθρώπους.

Άσκηση 1.24: "Μεταφράστε" στον ΚΛ τις πιο κάτω προτάσεις:

Το αηδόνι είναι πουλί.

Το αηδόνι και το περιστέρι είνα πουλιά.

Κάποιος άγνωστος τραγουδάει.

Κάποιος άγνωστος βαρύτονος τραγουδάει.

1.3.2.4 Νόμοι για τους ποσοδείκτες

Άρνηση στους Ποσοδείκτες

Για την σχέση της άρνησης με τους ποσοδείκτες ισχύει ο νόμος της ***Άρνησης στους Ποσοδείκτες***:

$$\neg(\forall x)\ P(x) \leftrightarrow (\exists\ x)\ \neg P\ (x)$$

Ο νόμος της Άρνησης στους Ποσοδείκτες, ως προς το δεξιό του σκέλος ∃ (x) ¬P (x) λέει ότι υπάρχει τουλάχιστον μία οντότητα στο μοντέλο μας για την οποία η ΟΣΠ P(x) έχει τιμή αληθείας 0. Συνεπώς η P(x) δεν ισχύει για όλες τις οντότητες του μοντέλου, πράγμα που λέει το αριστερό μέλος της ισοδυναμίας ¬(∀x) P(x).

Νόμοι Κατανομής των Ποσοδεικτών

Νόμοι ***Κατανομής των Ποσοδεικτών (Quantifier Distribution)***

Στη συνέχεια δίνουμε την σχέση των ποσοδεικτών και των βασικών συνδετικών, δηλαδή της σύζευξης και της διάζευξης. Βλέπουμε την σχέση ισοδυναμίας που υφίσταται για παραστάσεις που περιέχουν τον καθολικό ποσοδείκτη και σύζευξη (17) και παραστάσεις που περιέχουν τον υπαρξιακό ποσοδείκτη και διάζευξη (18).

(17) (∀x) (P(x) Λ R (x))↔(∀x) (P(x)) Λ (∀x) (R (x))

(18) (∃x) (P(x) V R (x))↔(∃x) (P(x)) V (∃x) (R (x))

Προφανώς, δεν είναι δυνατόν να υπάρχει σχέση ισοδυναμίας για τον καθολικό ποσοδείκτη και την διάζευξη (19). Σκεφτείτε ότι για να αποδοθούν τιμές αληθείας στην (17) αποδίδονται τιμές στην μεταβλητή x. Στο αριστερό σκέλος της (17) η εκάστοτε τιμή της x είναι ίδια για τις P(x) και R (x) καθώς ο καθολικός ποσοδείκτης έχει και τις δύο στην εμβέλεια του. Στο δεξί μέρος, όμως, οι P(x) και R (x) βρίσκονται στην εμβέλεια δύο ξεχωριστών καθολικών ποσοδεικτών και δεν είναι αναγκαίο ότι στις δύο μεταβλητές x έχει αποδοθεί η ίδια τιμή κάθε φορά. Όμως λόγω της σύζευξης, που απαιτεί να είναι και οι δύο ΟΣΠ αληθείς για να είναι η σύζευξη αληθής, διασφαλίζεται η ισοδυναμία. Δεν ισχύει όμως το ίδιο με την διάζευξη, που απαιτεί να είναι αληθής τουλάχιστον μία ΟΣΠ, και έτσι στην περίπτωση της (19) ισχύει μόνο συνεπαγωγή. Ομοίως σκεπτόμαστε για την περίπτωση του υπαρξιακού ποσοδείκτη (18), (20).

(19) (∀x) (P(x) V (∀x) (R (x)) → (∀x) (P(x) V R (x))

(20) (∃x) (P(x) Λ R (x)) →(∃x) (P(x)) Λ (∃x) (R (x))

Άσκηση 1.25: Ισχύουν οι πιο κάτω ισοδυναμίες;

1. Δεν είναι όλοι έξυπνοι ↔ Υπάρχει τουλάχιστον ένας που δεν είναι έξυπνος
2. Δεν είναι όλα παγωμένα ↔ Υπάρχει κάτι που είναι καυτό
3. Όλοι τρέχουν και όλοι σκοντάφτουν ↔ Όλοι τρέχουν και σκοντάφτουν
4. Κάτι τρέχει ή κάτι σκοντάφτει ↔ Κάτι τρέχει ή σκοντάφτει

Νόμοι Αλληλεξάρτησης των Ποσοδεικτών

Νόμοι ***Αλληλεξάρτησης των Ποσοδεικτών (Quantifier (In)Dependence)***

Έχουμε ήδη δει στην Ενότητα 1.3.2.3 πώς αποδίδεται η σημασία στις ΟΣΠ του ΚΛ, ότι η σειρά εμφάνισης του καθολικού και του υπαρξιακού ποσοδείκτη είναι σημαντική και ότι η αντιστροφή της δεν γεννά ισοδύναμες ΟΣΠ. Έτσι οι ΟΣΠ (∀x) (∃y) *είναι_γονιός* (x,y) και (∃y)(∀x) *είναι_γονιός* (x,y) δεν είναι ισοδύναμες.

Αυτό το πρόβλημα δεν υφίσταται αν οι ποσοδείκτες είναι ίδιοι:

(∀x) (∀y) P (x,y) ↔ (∀y) (∀x) P (x,y)

(∃x) (∃y) P (x,y) ↔ (∃y)(∃x) P (x,y)

Άσκηση 1.26: Εξηγήστε γιατί ισχύει (∃y)(∀x) P(x,y) → (∀x) (∃y) P (x,y)

Άσκηση 1.27: Για κάθε μία από τις πιο κάτω ΟΣΠ δίνονται δύο εναλλακτικές. Βρείτε ποια απο τις εναλλακτικές ΟΣΠ είναι ισοδύναμη με την αρχική.

(1) Αρχική ΟΣΠ (∀x) P (x,y) → (∀z) (∀x) P (x,z)

(∀x) (∀z) [P (x,y) → P (x,z)]

(∀x) (∀y) [P (x,y) → P (x,z)]

(2) Αρχική ΟΣΠ (∃x)¬¬ P (x,y) V (∃y)(∃x) Q (x,z)

(∃x)(∃y)[P (x,y) V Q (x,z)]

(∃x)[¬P (x,y) → (∃y) Q (x,z)]

1.3.2.5 Απαγωγή ή Παραγωγή (Natural Deduction)

Έχουμε δώσει τους δύο βασικούς κανόνες της Λογικής, τους Modus Ponens και Modus Tollens. Θα εμπλουτίσουμε τη δυνατότητα μας να εξάγουμε συμπεράσματα από ορθές προϋποθέσεις με δύο ακόμη νόμους που αξιοποιούν τον καθολικό ποσοδείκτη: το ***Καθολικό Στιγμιότυπο*** (Universal Instantiation) (ΚΣ) και η ***Καθολική Γενίκευση*** (Universal Generalisation) (ΚΓ).

Καθολικό Στιγμιότυπο

Καθολικό Στιγμιότυπο

(∀x) P (x)

‡P (Αα)

όπου Αα ένας σταθερός όρος. Το ΚΣ λέει ότι εφόσον μία ΟΣΠ P (x) ισχύει για όλες τις οντότητες του μοντέλου, μία ΟΣΠ όπου στην μεταβλητή που είναι δεσμευμένη από τον καθολικό ποσοδείκτη έχει ανατεθεί ένας σταθερός όρος του μοντέλου, θα έχει τιμή αληθείας 1. Στην συνέχεια χρησιμοποιούμε το ΚΣ για να αποδείξουμε ότι ο Αα είναι θνητός ξεκινώντας από τις προϋποθέσεις *Όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί* και *Ο Αα είναι άνθρωπος*.

Απόδειξη

1. (∀x)((*άνθρωπος*(x)→*θνητός*(x))	
2. *άνθρωπος*(Αα)	
3. *άνθρωπος*(Αα)→*θνητός*(Αα)	3. ΚΣ
4. *θνητός*(Αα)	4. Modus Ponens

Καθολική Γενίκευση

Καθολική Γενίκευση

P (Αα)

‡(∀x) P (x)

όπου Αα ένας σταθερός όρος τυχαία επιλεγμένος από ένα συγκεκριμένο σύνολο. Είναι πολύ σημαντικό να είναι τυχαία η επιλογή του όρου γιατί η ΚΓ στηρίζεται ακριβώς στο ότι ο όρος επελέγη μόνο και μόνο γιατί ανήκει στο σύνολο και όχι για κάποια άλλη του ιδιότητα. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε την ΚΓ για να αποδείξουμε ότι *Όλα τα αηδόνια τραγουδούν ωραία* από τις υποθέσεις ότι *Τα αηδόνια είναι ωδικά πτηνά* και *Όλα τα ωδικά πτηνά τραγουδούν ωραία*.

Απόδειξη

1. (∀x)((*αηδόνι*(x)→*ωδικό_πτηνό*(x))	
2. (∀x)((*ωδικό_πτηνό*(x)→*τραγουδά_ωραία*(x))	
3. *αηδόνι*(Αα)→*ωδικό_πτηνό*(Αα)	3. ΚΣ
4. *ωδικό_πτηνό*(Αα)→*τραγουδά_ωραία*(Αα)	4. ΚΣ
5. *αηδόνι*(Αα)	5. Υπόθεση
6. *ωδικό_πτηνό*(Αα)	6. ΜΡ
7. *τραγουδά_ωραία*(Αα)	7. ΜΡ

8. *αηδόνι*(Αα)→*τραγουδά_ωραία*(Αα)

(∀x)((*αηδόνι*(x)→*τραγουδά_ωραία*(x)) 9. ΚΓ

Στα βήματα 5 έως 8 έχουμε εφαρμόσει τον Modus Ponens και έχουμε δείξει ότι εάν η τιμή αληθείας για την ΟΣΠ *αηδόνι*(Αα) είναι 1 τότε η τιμή αληθείας για την ΟΣΠ *τραγουδά_ωραία*(Αα) είναι επίσης 1. Έτσι προκύπτει το βήμα 8.

Άσκηση 1.28: Αποδείξτε τα κάτωθι επιχειρήματα εξηγώντας πώς προχωρήσατε σε κάθε σας βήμα.

Επιχείρημα 1.

Όλα τα μωρά βγάζουν δόντια.

Ο Μάνος είναι μωρό.

‡Ο Μάνος βγάζει δόντια

Επιχείρημα 2.

Όλα τα μωρά κλαίνε.

Όσοι κλαίνε πεινάνε.

‡Όλα τα μωρά πεινάνε.

Συμπερασματικά

Η μαθηματική Λογική χρησιμοποιεί την θεωρία των συνόλων για να ορίσει την σημασία των ορθά σχηματισμένων προτάσεων (ΟΣΠ) της τυπικής γλώσσας του κατηγορικού λογισμού πρώτης τάξης (ΚΛ). Ο ΚΛ αποτελεί το σύστημα αναφοράς όλων των σύγχρονων τάσεων της μαθηματικής λογικής και σε αυτόν θα επιστρέφουμε στο βιβλίο αυτό με διάφορες ευκαιρίες.

1.4 Τυπικές γλώσσες

Στην εισαγωγή αυτού του κεφαλαίου υποσχεθήκαμε ότι θα μιλήσουμε για τις τυπικές γλώσσες που χρησιμοποιούμε προσπαθώντας να μελετήσουμε τη φυσική γλώσσα ως φυσικό φαινόμενο. Στη συνέχεια, όταν μιλήσαμε για τη μαθηματική Λογική και τα τυπικά συστήματα του προτασιακού λογισμού και του κατηγορικού λογισμού πρώτης τάξης, ξεχωρίσαμε την έννοια «τυπική γλώσσα» από την έννοια «σημασία»: η πρώτη αφορά τους κανόνες σχηματισμού ορθά σχηματισμένων προτάσεων (ΟΣΠ) ενός συστήματος και η δεύτερη την ερμηνεία των ΟΣΠ ως προς κάποιο σύμπαν που το είπαμε «μοντέλο».

Σε αυτήν την ενότητα θα δούμε με αυστηρότερο τρόπο την έννοια της τυπικής γλώσσας και της γραμματικής μιας τυπικής γλώσσας και θα παρουσιάσουμε εν συντομία την λεγόμενη Ιεραρχία του Chomsky που αποτελεί μία από τις πιο διάσημες προσπάθειες κατανόησης της σχέσης των τυπικών γλωσσών με την φυσική γλώσσα.

Αλφαριθμητικά και η πράξη της σύνδεσης αλφαριθμητικών

Ξεκινάμε με την απαραίτητη έννοια ***αλφαριθμητικό*** (string):

Έστω ένα σύνολο Α. Λέμε ότι το Κ είναι ένα αλφαριθμητικό επί του Α εάν το Κ είναι μια πεπερασμένη ακολουθία στοιχείων του Α. Ως μήκος του αλφαριθμητικού Α ορίζουμε το πλήθος των στοιχείων της ακολουθίας. Λέμε ότι το σύνολο Α είναι ένα αλφάβητο ή λεξιλόγιο. Για παράδειγμα, έστω το σύνολο Α = {1,2,α,β}. Το α1β1 είναι ένα αλφαριθμητικό επί του Α και έχει μήκος 4.

Ορίζουμε ότι το αλφαριθμητικό e έχει μήκος 0.

Επί των αλφαριθμητικών ορίζεται η πράξη της ***συνένωσης*** (concatenation) βάσει της οποίας λέμε ότι το αλφαριθμητικό ΑΒ είναι η συνένωση των αλφαριθμητικών Α και Β. Το μήκος της συνένωσης ισούται με το άρθροισμα των μηκών των συνδεομένων αλφαριθμητικών. Για παράδειγμα, τα αλφαριθμητικά Β1=αα και Β2=ββ με μήκος το καθένα 2 ορίζονται επί του συνόλου Α. Το αλφαριθμητικό Β1Β2=ααββ αποτελεί την συνένωση των Β1 και Β2, ορίζεται επί του συνόλου Α και έχει μήκος 2+2=4.

1.4.1 Τυπικές γλώσσες

Προχωρούμε τώρα στον αυστηρότερο ορισμό της έννοιας *τυπική γλώσσα*. Η αλήθεια είναι ότι παρόμοιους ορισμούς έχουμε δει ήδη, λίγο πιο τυπικά στην περίπτωση του προτασιακού λογισμού και άτυπα στην περίπτωση του ΚΛ.

Μια ***τυπική γλώσσα*** Σ ορίζεται ως εξής:

Έστω Α ένα πεπερασμένο σύνολο γραμμάτων ή τερματικών στοιχείων. Το Α είναι το λεξιλόγιο ή αλφάβητο της τυπικής γλώσσας Σ.

Έστω Α* το σύνολο όλων των αλφαριθμητικών επί του Α.