ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

«ΔΙΑΦΟΡΙΚΈΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ»

ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

«ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ»

Α’ εξάμηνο Φαρμακευτικής

Πανεπιστήμιο Αθηνών

Αριστείδης Δοκουμετζίδης

Αναπληρωτής Καθηγητής

1. ΓΕΝΙΚΑ ΓΙΑ ΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Τι είναι οι διαφορικές εξισώσεις

Οι διαφορικές εξισώσεις (ΔΕ) είναι εξισώσεις που περιέχουν παραγώγους μιας ή περισσότερων συναρτήσεων.
Επίλυση μιας ΔΕ είναι ο προσδιορισμός της συνάρτησης της οποίας η παράγωγος εμφανίζεται στην ΔΕ.
Για παράδειγμα η επίλυση της ΔΕ

$$\frac{df(x)}{dx} = g(x)$$

Περιλαμβάνει την εύρεση της συνάρτησης f(x).
Οι ΔΕ μπορούν να συνδέσουν ποσοτικά τα αίτια με τις παρατηρούμενες μεταβλητές ενός φαινομένου και γι αυτό χρησιμεύουν στη διατύπωση φυσικών νόμων, καθώς και μαθηματικών μοντέλων.

Φυσικοί νόμοι και μαθηματικά μοντέλα

Η χρονική εξέλιξη διαφόρων φυσικών φαινομένων είναι δυνατό να περιγραφεί και να μελετηθεί ποσοτικά από μαθηματικές σχέσεις που συχνά διατυπώνονται από ΔΕ και χαρακτηρίζονται άλλοτε ως φυσικοί νόμοι και άλλοτε ως μαθηματικά μοντέλα
Οι φυσικοί νόμοι και τα μαθηματικά μοντέλα δεν είναι ταυτόσημες έννοιες και παρόλο που έχουν πολλές ομοιότητες έχουν και μια βασική διαφορά:
Οι φυσικοί νόμοι είναι ακριβείς και περιγράφουν πραγματικές ιδιότητες της φύσης. Πχ νόμος της βαρύτητας
Τα μοντέλα ή πρότυπα στα Ελληνικά, είναι ποσοτικές περιγραφές φυσικών φαινομένων που δεν είναι απόλυτα ακριβείς. Είναι προσεγγίσεις και κατασκευάζονται προκειμένου να διατυπώσουν ποσοτικά ένα φαινόμενο εξυπηρετώντας μια συγκεκριμένη σκοπιμότητα, συνήθως περιγράφοντας μια σειρά δεδομένων ή παρατηρήσεων που σχετίζονται με αυτό το φαινόμενο. Έχει διατυπωθεί η ρήση ότι «όλα τα μοντέλα είναι λάθος, αλλά κάποια είναι χρήσιμα».
Η σκοπός του μοντέλου μπορεί να είναι πρακτικός, ή ακόμα και εκπαιδευτικός.

<u>Παράδειγμα φυσικού νόμου: Η εξίσωση κίνησης για ένα αντικείμενο που πέφτει</u>

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα είναι

$$F = m \cdot a$$

Οπού F η δύναμη, m η μάζα και a η επιτάχυνση. Αλλά $a = dv/dt$, όπου v η ταχύτητα, άρα αντικαθιστώντας λαμβάνουμε

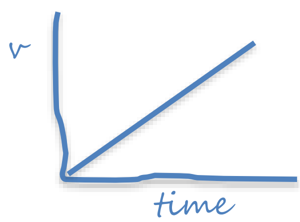
$$F = m\frac{dv}{dt}$$

Η δύναμη που αναπτύσσεται σε ένα αντικείμενο που πέφτει υπό την επίδραση της βαρύτητας στο κενό είναι $F = mg$, όπου m η μάζα του και g η επιτάχυνση της βαρύτητας 9.8 m/sec^2. Η εξίσωση γίνεται

$$m\frac{dv}{dt} = mg$$

ή τελικά $\dfrac{dv}{dt} = g$

και αποτελεί μια απλή διαφορική εξίσωση η λύση της οποίας θα μας δώσει την συνάρτηση της ταχύτητας ως προς το χρόνο, v(t), που πρακτικά μας λέει ότι η ταχύτητα αυξάνεται με σταθερό ρυθμό, δηλαδή σταθερή επιτάχυνση.



Αν υποθέσουμε ότι αρχικά το αντικείμενο είναι σταματημένο, γράφουμε την αρχική συνθήκη

v(0)=0 (m/sec)

που είναι απαραίτητη για την πλήρη διατύπωση του προβλήματος.

Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι το αντικείμενο δεν πέφτει στο κενό αλλά υπάρχει ατμόσφαιρα και υφίσταται αντίσταση ανάλογη της ταχύτητας του. Αυτή η παραδοχή δεν είναι ένας ακριβής νόμος, όπως ο νόμος του Νεύτωνα, αλλά ένα εμπειρικό προσεγγιστικό μοντέλο. Η ΔΕ τότε γίνεται

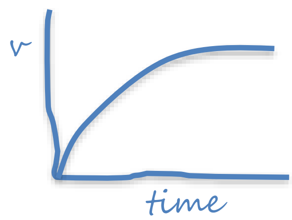
$$m\frac{dv}{dt} = mg - \gamma v$$

ή

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\gamma v}{m}$$

όπου γ μια σταθερά που μπορεί να εξαρτάται από διάφορους παράγοντες όπως το σχήμα (η αεροδυναμική) του αντικειμένου. Π.χ. Μεγάλο γ για αλεξίπτωτο, μικρό για σφαίρα.

Χωρίς να λύσουμε την ΔΕ, διαισθητικά μπορούμε να καταλάβουμε ότι όσο η ταχύτητα είναι μικρή και ισχύει $g > \frac{\gamma v}{m}$ η ταχύτητα θα αυξάνει καθώς $\frac{dv}{dt} > 0$, μέχρι μία οριακή τιμή και θα παραμείνει σταθερή καθώς η διαφορά $g - \frac{\gamma v}{m}$ θα μηδενιστεί και επομένως $\frac{dv}{dt} = 0$.



Η οριακή τιμή της ταχύτητας θα είναι:

$$v = \frac{mg}{\gamma}$$

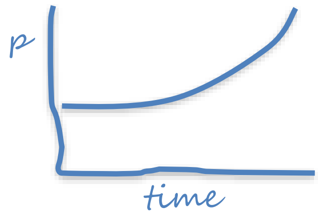
<u>Παράδειγμα μοντέλου: Θηράματα και θηρευτές</u>

Στην επιστήμη της μελέτης των οικοσυστημάτων έχουν αναπτυχθεί θεωρητικά μαθηματικά μοντέλα για την μελέτη της δυναμικής των πληθυσμών ζώων σε οικοσυστήματα, όπως για παράδειγμα ένα πληθυσμό ψαριών σε μία λίμνη.

Αρχικά θεωρούμε ότι έχουμε ψάρια που πολλαπλασιάζονται και ότι ο ρυθμός γέννησης τους είναι ανάλογος του υπάρχοντος πληθυσμού. Αυτό είναι μια λογική υπόθεση αν αναλογιστεί κανείς για παράδειγμα ότι ο διπλάσιος αριθμός γονέων είναι λογικό να γεννήσει περίπου διπλάσιο αριθμό απογόνων.

Οπότε μπορεί κανείς να εκφράσει την παρακάτω απλή ΔΕ

$$\frac{dp}{dt} = rp$$

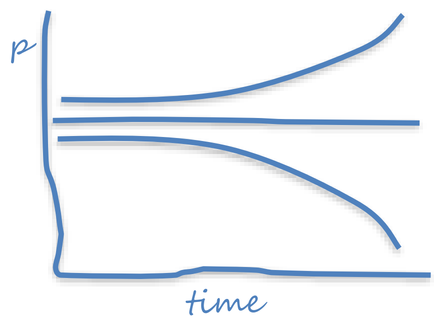


όπου *p* είναι ο πληθυσμός, του οποίου θέλουμε να βρούμε τη συνάρτηση που τον περιγράφει ως προς το χρόνο, *t*, (μονάδες: μήνες). Ο χρόνος συχνά ονομάζεται και ανεξάρτητη μεταβλητή. Επίσης *r* είναι η σταθερά ρυθμού με μονάδες (1/χρόνος ή εδώ 1/μήνες = μήνες^{-1}) η οποία καθορίζει αν ο πληθυσμός αυξάνει αργά ή γρήγορα. Η λύση μίας τέτοιας διαφορικής εξίσωσης θα είναι μια αύξουσα συνάρτηση που θα ξεκινά από την αρχική τιμή του πληθυσμού *p*(0) και θα αυξάνεται ραγδαία, όπως θα δούμε αργότερα εκθετικά.

Αναλογία με επιδημιολογικά μοντέλα.
Κατά την τρέχουσα επιδημία έχουμε ακούσει για τα λεγόμενα επιδημιολογικά μοντέλα και την εκθετική αύξηση των κρουσμάτων. Ουσιαστικά το βασικό μοντέλο που περιγράφει αυτή την εξέλιξη είναι ίδια εξίσωση dp/dt=rp, οπου p ο αριθμός των κρουσμάτων.

Στη συνέχεια θεωρούμε ότι ψαράδες , ψαρεύουν ένα σταθερό αριθμό ψαριών κάθε μέρα, έστω *k*. Ο ρυθμός μεταβολής των θηραμάτων θα περιγράφεται τότε από την εξίσωση που είχαμε προηγούμενα προσθέτοντας τον ορό –*k*, δηλαδή

$$\frac{dp}{dt} = rp - k$$



Σε αντίθεση με την προηγούμενη περίπτωση η λύση εδώ είναι πιο πολύπλοκη. Παρατηρούμε οτι για την οριακή τιμή

$p_c = k/r$

Ισχύει $\frac{dp}{dt} = 0$ και το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας. Δηλαδή ο ρυθμός γέννησης των ψαριών ισούται με τον ρυθμό που αυτά ψαρεύονται.
Αριθμητικό παράδειγμα:
r=0.5/μηνα
k=15 ψάρια /ημέρα = 450 ψάρια /μήνα
$p_c = 450/0.5 = 900$ ψάρια

Η κατάσταση ισορροπίας μπορεί να επιτευχθεί μονό αν από την αρχή ο πληθυσμός έχει την τιμή $p(0)=p_c$. Αν η αρχική τιμή του πληθυσμού είναι έστω και λίγο μεγαλύτερη από p_c, ο ρυθμός ψαρέματος δεν θα επαρκεί για να ελέγξει το ρυθμό αναπαραγωγής και τα ψάρια θα αυξάνονται. Αντίθετα αν η αρχική τιμή είναι έστω λίγο μικρότερη από p_c ο ρυθμός αναπαραγωγής δεν επαρκεί για να ισοσκελίσει το ρυθμό ψαρέματος και ο πληθυσμός των ψαριών καταρρέει μέχρι να μηδενιστεί.

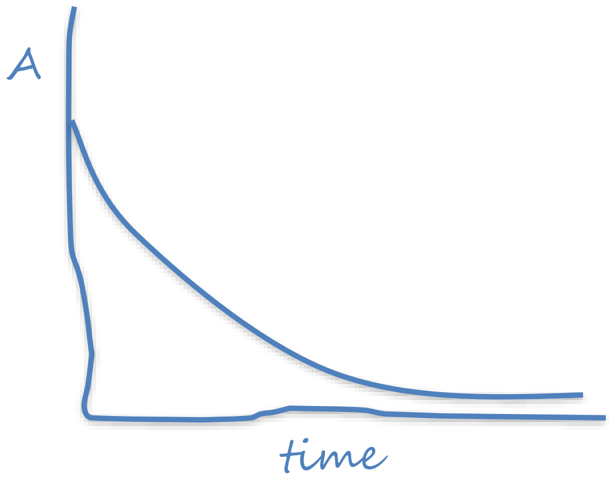
Παράδειγμα: απλό φαρμακοκινητικό μοντέλο

Χορηγούμε μια ποσότητα φαρμάκου ενδοφλεβίως. Θεωρούμε οτι το σώμα είναι ένα ομογενές διαμέρισμα μέσα στο οποίο η ποσότητα του φαρμάκου κατανέμεται ακαριαία οπότε η αρχική ποσότητα ισούται με τη δόση η οποία χορηγείται στιγμιαία. Όμως βαθμιαία η ποσότητα του φαρμάκου μειώνεται καθώς αυτό αποβάλλεται από τον οργανισμό με διάφορους φυσιολογικούς μηχανισμούς απομάκρυνσης, όπως η νεφρική απέκκριση, ο μεταβολισμός στο ήπαρ κ.α. Ο ρυθμός απομάκρυνσης του φαρμάκου θεωρούμε ότι είναι ανάλογος της εναπομείνασας ποσότητας την κάθε χρονική στιγμή. Αυτό διαισθητικά δικαιολογείται ως εξής: Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει μια συγκεκριμένη σταθερή πιθανότητα για κάθε μόριο να απομακρυνθεί από το σύστημα, και το κάθε μόριο είναι ανεξάρτητο από το άλλο, τότε είναι λογικό να πούμε ότι διπλάσιος αριθμός μορίων θα έχουν διπλάσιο ρυθμό απομάκρυνσης.
Η ποσότητα στο σώμα περιγράφεται από την εξίσωση

$$\frac{dA}{dt} = -kA$$

όπου A(0)=Dose

Το k είναι σταθερά ρυθμού και έχει μονάδες χρονος^{-1}. Η λύση αυτού του συστήματος θα είναι μια φθίνουσα συνάρτηση που θα ξεκινά απο την τιμή της δόσης και θα καταλήγει στο μηδέν όταν το φάρμακο θα έχει απομακρυνθεί πλήρως.

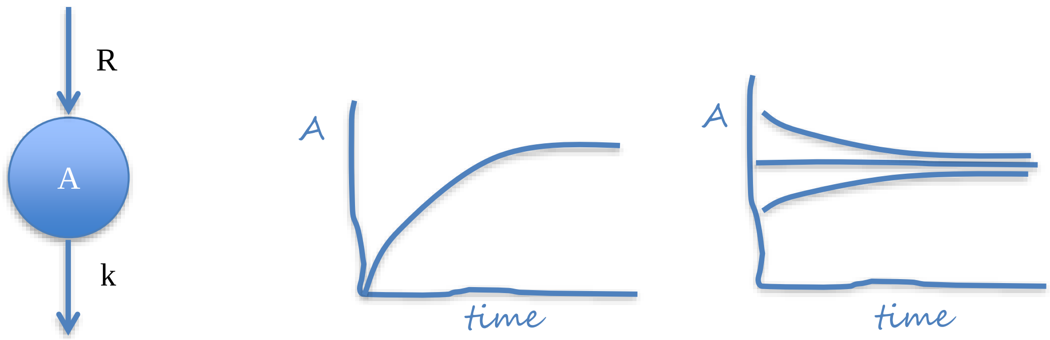


Εναλλακτικά της στιγμιαίας χορήγησης μπορούμε να χορηγήσουμε το φάρμακο με ένα σταθερό ρυθμό. Τότε η εξίσωση θα είναι

$$\frac{dA}{dt} = R - kA$$

όπου A(0)=0 η αρχική ποσότητα του φαρμάκου και R ο ρυθμός χορήγησης. Η χρονική εξέλιξη αυτού του συστήματος θα είναι η εξής: Αρχικά η ποσότητα είναι μηδέν, αυξάνει με ρυθμό R ενώ η απομάκρυνση είναι μηδαμινή καθώς είναι ανάλογη της χαμηλής ποσότητας. Όμως καθώς τα επίπεδα του φαρμάκου ανεβαίνουν ο όρος της απομάκρυνσης γίνεται σημαντικός και επιβραδύνει την αύξηση της ποσότητας. Τελικά ο ρυθμός απομάκρυνσης εξισώνεται με το ρυθμό έγχυσης και το σύστημα ισορροπεί παραμένοντας σε σταθερή κατάσταση.

Θα έχουμε σημείο ισορροπίας όταν $\frac{dA}{dt} = 0$ για $A = R/k$.

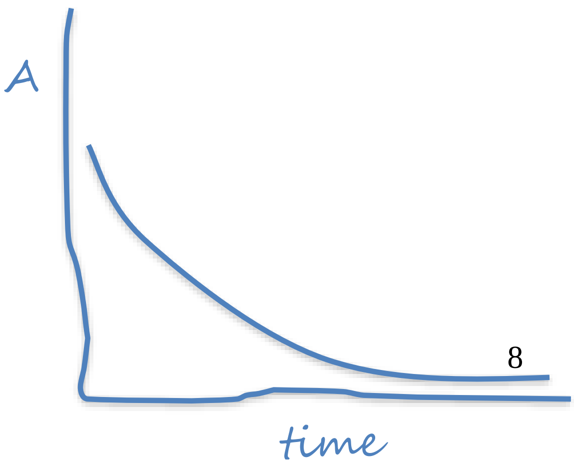


Αν εκτός από την ποσότητα με σταθερό ρυθμό χορηγήσουμε επιπλέον και μια αρχική δόση εφόδου τότε η αρχική ποσότητα δεν θα είναι μηδέν αλλά θα είναι η δόση εφόδου. Όπως και στο μοντέλο της πληθυσμιακής δυναμικής όταν η αρχική ποσότητα είναι ακριβώς $A = R/k$, η ποσότητα θα παραμείνει σταθερή καθώς ο ρυθμός έγχυσης είναι ίσος με τον ρυθμό απομάκρυνσης. Όμως για αρχική ποσότητα μικρότερη της R/k ο ρυθμός έγχυσης θα είναι μεγαλύτερος από το ρυθμό απομάκρυνσης και η ποσότητα θα αυξάνεται ασυμπτωτικά προς το R/k οπού οι δύο ρυθμοί εξισώνονται. Ομοίως για αρχική ποσότητα μεγαλύτερη της R/k ο ρυθμός εγχυσης θα ειναι μικρότερος απο το ρυθμό απομάκρυνσης και η ποσότητα θα μειώνεται ασυμπτωτικά προς το R/k. Έτσι η ισορροπία σε αυτό το σύστημα είναι ευσταθής σε αντίθεση με το σύστημα της πληθυσμιακής δυναμικής όπου το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές.

Λύση απλών διαφορικών εξισώσεων

Θα βρούμε τη λύση του απλού φαρμακινητικού μοντέλου της στιγμιαίας ενδοφλέβιας χορήγησης με δύο τρόπους.
Η ΔΕ είναι:

$\frac{dA}{dt} = -kA$ με A(0)=Dose



Αρχικά θα συνθέσουμε τη λύση.

Αν η ΔΕ ήταν της μορφής

$$\frac{dA}{dt} = A$$

ποια συνάρτηση θα την ικανοποιούσε;

Ψάχνουμε μια συνάρτηση της οποίας η παράγωγος να δίνει τον εαυτό της. Η εκθετική συνάρτηση έχει αυτή την ιδιότητα.

$$A = Be^{t}$$

Εμείς όμως ζητάμε μια συνάρτηση που παραγωγιζόμενη να δίνει τον εαυτό της επί μια σταθερά –k.

$$\frac{dA}{dt} = -kA$$

Η συνάρτηση που ζητάμε είναι η εκθετική αλλά της παρακάτω μορφής

$$A = Be^{-kt}$$

γιατί $\frac{dA}{dt} = \frac{d(Be^{-kt})}{dt} = -k \cdot Be^{-kt} = -kA$

Διαφορικό & παράγωγος

Για να λύσουμε τη ΔΕ
$$\frac{dy(t)}{dt} = g(t)$$
Ολοκληρώνουμε κατά μέλη
$$\int \left(\frac{dy(t)}{dt}\right) dt = \int g(t)dt$$
Εναλλακτικά μπορούμε να θεωρήσουμε την παράγωγο ως κλάσμα διαφορικών και να γράψουμε
$dy(t) = g(t)dt$
και ολοκληρώνουμε τα διαφορικά ως εξής
$$\int dy(t) = \int g(t)dt$$
Το διαφορικό $df(x)$ είναι μια απειροστή μεταβολή του f(x), μεταβολή μεγέθους 0
Το ολοκλήρωμα συμβολίζει $\int$ άθροιση.
Το ορισμένο ολοκλήρωμα
$$\int_{x_1}^{x_2} df(x) = f(x_2) - f(x_1)$$
είναι μια πεπερασμένη μεταβολή του f(x)
Σαν να λέμε ότι ένα ευθύγραμμο τμήμα πεπερασμένου μήκους αποτελείται από άπειρα σημεία μήκους 0 (∞ σημεία) x (0 μήκος) = πεπερασμένο μέγεθος .
Η παράγωγος $\frac{df(x)}{dx}$ είναι η απειροστή μεταβολή του f ανά απειροστή μεταβολή του x, δηλαδή ρυθμός μεταβολής του f ως προς x μεγέθους: $\frac{0}{0}$ =πεπερασμενο.

Τη σταθερά B την υπολογίζουμε από την αρχική τιμή A(0)=dose

$$Dose = Be^{-k\cdot 0} = B$$

Έτσι τελικά η λύση είναι:

$$A = Dose \cdot e^{-kt}$$

Εναλλακτικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των χωριζόμενων μεταβλητών στην οποία θα αναφερθούμε με λεπτομέρεια σε επόμενη ενότητα.

$$\frac{dA}{dt} = -kA$$

A(0)=Dose

Χωρίζουμε τις μεταβλητές μεταφέροντας το A από την αριστερή πλευρά.

$$\frac{1}{A}\frac{dA}{dt} = -k$$

Ολοκληρώνουμε κατά μέλη

$$\int \frac{1}{A}\frac{dA}{dt} dt = -\int kdt$$

Επειδή $\frac{d \ln|A|}{dt} = \frac{1}{A}\frac{dA}{dt}$ ισχύει

$$\int \frac{d \ln|A|}{dt} dt = -\int kdt$$

Το A είναι πάντα θετικό ως ποσότητα φαρμάκου άρα $\ln|A| = \ln A$.
Ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$\ln A = -kt + C$$

Λύνουμε ως προς A απολογαριθμίζοντας

$$e^{\ln A} = e^{-kt+C}$$

ή

$A = e^{-kt}e^{C}$

ή θέτοντας $B = e^{C}$

$A = e^{-kt}B$

Παρατήρηση: αν είχαμε αφήσει το $\ln|A|$ θα είχαμε $A = \pm e^{-kt}e^{C}$ και θα παίρναμε το ίδιο αποτέλεσμα απλώς θέτοντας $B = \pm e^{C}$.
Όπως και πριν υπολογίζουμε το B από την αρχική τιμή

$A = Dose \cdot e^{-kt}$

που είναι η τελική λύση.
Αν σε χρόνο t_1 η ποσότητα του φαρμάκου είναι A_1, σε πόσο χρόνο θα μειωθεί στο μισό;
Έστω $A_1 = Dose \cdot e^{-kt_1}$
Και μία χρονική στιγμή t_2 είναι $A_2=A_1/2$, τότε
$\frac{A_1}{2} = Dose \cdot e^{-kt_2}$
Διαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε
$2 = e^{-k(t_1-t_2)}$
$\ln 2 = -k(t_1 - t_2) = k(t_2 - t_1)$
$t_{1/2} = t_2 - t_1 = \ln 2/k$
Το $t_{1/2}$ ονομάζεται χρόνος ημιζωής του φαρμάκου, είναι σταθερός το οποίο είναι χαρακτηριστικό επακόλουθο του εκθετικού χαρακτήρα της κινητικής. Το μοντέλο μας χρησιμεύει ώστε να κατανοήσουμε αυτό το χαρακτηριστικό. ■

Στη συνέχεια θα λύσουμε το φαρμακοκινητικό μοντέλο με σταθερή έγχυση φαρμάκου

$$\frac{dA}{dt} = R - kA$$

A(0)=0

Μεταφέρουμε το A αριστερά.

$$\frac{1}{R-kA}\cdot\frac{dA}{dt}=1$$

Ολοκληρώνουμε κατά μέλη

$$\int\frac{1}{R-kA}\cdot\frac{dA}{dt}dt=\int dt$$

Επειδή $\frac{d\ln|R-kA|}{dt}=\frac{-k}{R-kA}\frac{dA}{dt}$ ισχύει

$$-\frac{1}{k}\int\frac{d\ln|R-kA|}{dt}dt=\int dt$$

$$-\frac{1}{k}\cdot\ln|R-kA|=t+B$$

$$\ln|R-kA|=-kt-kB$$

$$R-kA=\pm e^{-kt-kB}$$

Θέτουμε $B'=\pm e^{-kB}$

$$R-kA=B'e^{-kt}$$

$$A=-\frac{B'}{k}e^{-kt}+\frac{R}{k}$$

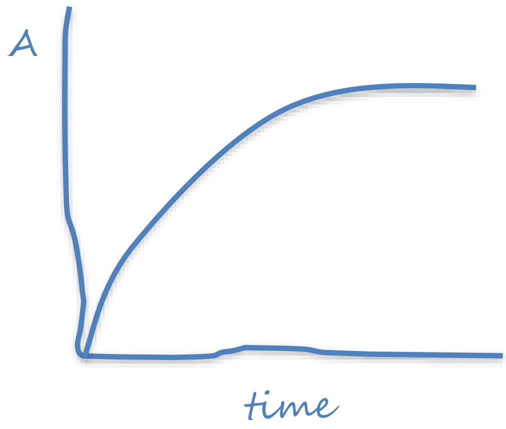
Θέτουμε $B''=B'/k$

$$A=-B''e^{-kt}+\frac{R}{k}$$

A(0)=0

$$0 = -B'' + \frac{R}{k} \rightarrow \; B'' = \frac{R}{k}$$

$$A = \frac{R}{k}(1 - e^{-kt})$$



Το μοντέλο αποκαλύπτει κάποια στοιχεία μη προφανή από την διαίσθηση μας: πχ ο ρυθμός της συσσώρευσης του φαρμάκου στον οργανισμό εξαρτάται από την παράμετρο k που χαρακτηρίζει την απομάκρυνση του φαρμάκου!
Το μοντέλο μας χρησιμεύει ώστε να κατανοήσουμε αυτό το φαινόμενο.

Αξία της μοντελοποίησης:
Εκτιμούμε στο μοντέλο $A = Dose \cdot e^{-kt}$ την παράμετρο k μέσω μιας στιγμιαίας ενδοφλέβιας χορήγησης και μέτρησης των επίπεδων στο αίμα, και κατόπιν μπορούμε να προβλέψουμε τα επίπεδα του φαρμάκου στη σταθεροποιημένη κατάσταση καθώς και το χρόνο που θα πάρει ώστε να επιτευχθεί αυτή μέσω της εξίσωσης $A = R/k(1 - e^{-kt})$ με άλλο δοσολογικό σχήμα.

Κατηγοριοποίηση ΔΕ

Υπάρχουν διάφοροι τύποι ΔΕ. Παρακάτω θα αναφέρουμε μερικές από τις πιο συνηθισμένες κατηγοριοποιήσεις ΔΕ εξισώσεων αλλά και των τύπων των λύσεων αυτών. Συγκεκριμένα θα αναφέρουμε *συνήθεις ΔΕ και με μερικές παραγώγους, Συστήματα ΔΕ, ΔΕ διαφόρων τάξεων, γραμμικές και μη γραμμικές ΔΕ, αυτόνομες και μη αυτόνομες ΔΕ. Επίσης θα αναφέρουμε αναλυτικές και αριθμητικές λύσεις ΔΕ.* Πρέπει να επισημάνουμε ότι πέραν αυτών των κατηγοριών υπάρχουν και άλλοι τρόποι που μπορεί κάνεις να κατηγοριοποιήσει τις ΔΕ.

Συνήθεις ΔΕ και με μερικές παραγώγους

α) Οι συνήθεις ΔΕ, περιέχουν συνήθεις παραγώγους σε αντίθεση με τις ΔΕ με μερικές παραγώγους

Παράδειγμα είναι ο νόμος του Νεύτωνα

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F$$

Μερικές παράγωγοι

Οι μερικές παράγωγοι αφορούν συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, πχ f(x,y), σε αντίθεση με τις συναρτήσεις μιας μεταβλητής f(x). Η μερική παράγωγος μια συνάρτησης ως προς μιας από τις μεταβλητές της είναι η συνήθης παράγωγος της συνάρτησης θεωρώντας όλες τις άλλες μεταβλητές σταθερές.

Παράδειγμα

$f(x,y)=x^2y$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2$

β) Οι ΔΕ με μερικές παραγώγους περιέχουν προφανώς μερικές παραγώγους. Παραδείγματα αποτελούν:
Η εξίσωση επαγωγής θερμότητας ή διάχυσης

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

περιγράφει την εξέλιξη στο χρόνο, t, αλλά και τη διάδοση στη χωρική διάσταση, x, της θερμότητας εντός ενός θερμοαγώγιμου υλικού, ή της διάχυσης μιας ουσίας σε ένα μέσο.

Συστήματα ΔΕ

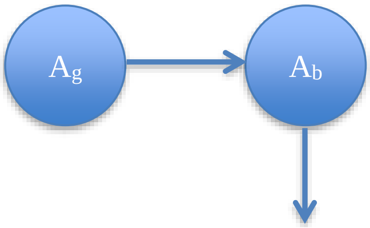
Εκτός από μεμονωμένες ΔΕ που περιγράφουν μια συνάρτηση, μπορούμε να έχουμε συστήματα ΔΕ. Δηλαδή περισσότερες από μία ΔΕ που εμπλέκουν ίσο αριθμό συναρτήσεων με τις παραγώγους τους.
Παράδειγμα είναι οι εξισώσεις που περιγράφουν την ταχύτητα και τη θέση ενός σώματος κατά την ελεύθερη πτώση ενός σώματος

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\gamma v}{m}$$

$$\frac{dx}{dt} = v$$

Επίσης στη φαρμακοκινητική, μπορούμε να έχουν πολύπλοκα μοντέλα με πολλές συναρτήσεις που αντιστοιχούν στην ποσότητα του φαρμάκου σε διάφορα διαμερίσματα, που μπορούν να αντιστοιχούν σε διαφορετικά όργανα όπως για παράδειγμα το παρακάτω μοντέλο που περιέχει γαστρεντερική απορρόφηση ενός σκευάσματος που χορηγείται από το στόμα.

$$\frac{dA_g}{dt} = -k_a A_g$$



$$\frac{dA_b}{dt} = k_a A_g - k_e A_b$$

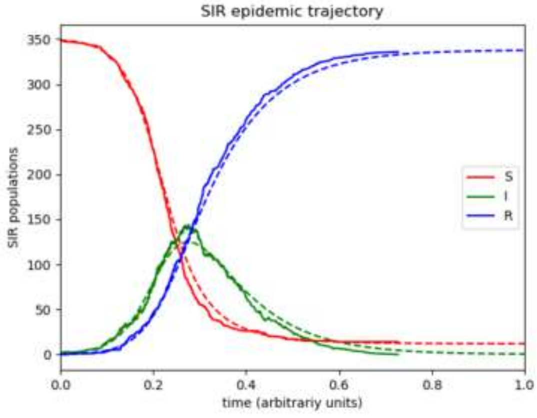
όπου A_g είναι η ποσότητα του φαρμάκου στο διαμέρισμα του γαστρεντερικού, A_b η ποσότητα του φαρμάκου στο διαμέρισμα της κεντρικής κυκλοφορίας, k_a η σταθερά ρυθμού απορρόφησης και k_e η σταθερά ρυθμού απομάκρυνσης.
Επίσης αρχικά το σύνολο της δόσης βρίσκεται στο διαμέρισμα του γαστρεντερικού οπότε $A_g(0)$=Dose ενώ το κεντρικό διαμέρισμα δεν έχει αρχικά φάρμακο $A_b(0)=0$.

Στην επιδημιολογία κατασκευάζονται μαθηματικά μοντέλα με πιο γνωστό το μοντέλο SIR. Θεωρώντας τους εξής πληθυσμούς, Susceptible, Infected, Recovered από τους αρχικά των οποίων λαμβάνει το όνομα του το μοντέλο αυτό αποτελείται από της εξής ΔΕ:

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta I S}{N},$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta I S}{N} - \gamma I,$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I,$$



Όπου N=S+I+R, ο συνολικός πληθυσμός που είναι πάντα σταθερός.

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$$

Η παράμετρος R_0, basic reproduction number: αντιστοιχεί στον αριθμό των ατόμων τους οποίους θα κολλήσει ένας 1 ασθενής, και αποτελεί βασική παράμετρο της επιτήρησης μια επιδημίας. Τέτοιου τύπου μοντέλα βρήκαν ευρεία εφαρμογή στην πανδημία του COVID.

Τάξη ΔΕ

Τάξη μιας ΔΕ ονομάζεται η μέγιστη τάξη παραγώγου που περιέχει.
Η γενική μορφή ΔΕ *n* τάξης είναι:

$$F\left(t, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

Όπου $y^{(n)}$ η παράγωγος n τάξης της y. Μία ΔΕ *n* τάξης χρειάζεται *n* αρχικές συνθήκες

Πχ 2ης τάξης

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F$$

$x(0)=x_0$, $dx/dt=v_0$

Μπορώ να την σπάσω σε 2 πρώτης τάξης

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$x(0)=x_0$, $v(0)=v_0$

Εν γένει μια διαφορική n τάξης μπορεί να γραφεί σαν σύστημα n διαφορικών $1^{ης}$ τάξης:

$$y^{(n)} = F\big(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}\big)$$

γίνεται με αντικατάσταση $x_1=y$, $x_2=y'$, $x_3=y''$, ... , $x_n=y^{(n-1)}$

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n \\ x_n' &= F(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Θα χρειαστούμε n αρχικές συνθήκες.

Γραμμικές και μη γραμμικές ΔΕ

Η ΔΕ $F\big(t, y, y', \dots, y^{(n)}\big) = 0$ είναι γραμμική τάξης n, όταν η συνάρτηση F είναι γραμμική ως προς τις μεταβλητές $y, y', \dots, y^{(n)}$ δηλαδή

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = g(t)$$

στην αντίθετη περίπτωση είναι μη γραμμική
Οι γραμμικές ΔΕ είναι αρκετά πιο εύκολες στην λύση τους, όπως άλλωστε και οι γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις. Πολλά φαινόμενα διατυπώνονται με γραμμικές ΔΕ, αλλά φυσικά σε πολλές περιπτώσεις έχουμε μη γραμμικές ΔΕ. Επειδή η λύση των γραμμικών ΔΕ είναι ευκολότερη και οι ιδιότητες τους καλύτερα μελετημένες, συχνά επιδιώκουμε να **γραμμικοποιήσουμε** μια μη γραμμική ΔΕ, αν είναι φυσικά εφικτό αυτό. Η γραμμικοποίηση είναι μία προσέγγιση που μπορεί να είναι ικανοποιητική κάτω από προϋποθέσεις.

Παράδειγμα: Φαρμακοκινητική Michaelis-Menten

Η εξίσωση Michaelis-Menten συχνά χρησιμοποιείται για την περιγραφή κινητικών φαινομένων που παρουσιάζουν κορεσμό. Στη Φαρμακοκινητική χρησιμοποιείται μεταξύ άλλων για την περιγραφή του ρυθμού της απομάκρυνσης του φαρμάκου από το σώμα στην περίπτωση που αυτή πραγματοποιείται με μεταβολισμό του φαρμάκου μέσω κάποιου ενζύμου, η διαθέσιμη ποσότητα του οποίου μπορεί να κορεστεί.

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{V_{max}A}{K_m + A}$$

A(0)=Dose

Αν η ποσότητα είναι μικρή σε σχέση με το K_m ($A<<K_m$) η ΔΕ γίνεται γραμμική διότι $K_m+A\approx K_m$ άρα

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{V_{max}}{K_m}A$$

Για μεγάλες τιμές του A, $A>>K_m$

$$\frac{dA}{dt} = -V_{max}$$

Όπως φαίνεται από τα παραπάνω η φυσική σημασία των παραμέτρων είναι: V_{max} είναι ο μέγιστος ρυθμός απομάκρυνσης, αφού έχει επέλθει κορεσμός και K_m ονομάζεται σταθερά Michaelis-Menten και είναι η τιμή της ποσότητας A για την οποία ο ρυμός είναι το μισό του μέγιστου V_{max}. Πράγματι για $A=K_m$: $\frac{V_{max}A}{K_m+A} = \frac{V_{max}K_m}{K_m+K_m} = \frac{V_{max}}{2}$.

Αυτόνομες και μη αυτόνομες ΔΕ

Αν μια ΔΕ, γραμμική ή μη γραμμική, δεν εξαρτάται εκπεφρασμένα από την ανεξάρτητη μεταβλητή, που συνήθως είναι ο χρόνος, δηλαδή είναι της μορφής

$$F\left(y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

ονομάζεται αυτόνομη. Παράδειγμα μη αυτόνομης ΔΕ είναι η παρκάτω:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}y = 2 + t$$

Αναλυτικές και αριθμητικές λύσεις ΔΕ

Ιδανικά σε μια ΔΕ επιδιώκουμε να βρούμε την λύση της η οποία έχει την μορφή μιας αναλυτικής συνάρτησης y(t).
Όμως συχνά και ιδιαίτερα σε μη γραμμικές ΔΕ δεν είναι δυνατόν βρούμε αναλυτική λύση, για διάφορους τεχνικούς λόγους, όπως πχ ότι δεν υπάρχει αναλυτική έκφραση για κάποιο ολοκλήρωμα που εμφανίζεται κατά την λύση της.
Ακόμα και σε περιπτώσεις που δεν μπορούμε να γράψουμε μια αναλυτική έκφραση της λύσης της ΔΕ, αυτό δεν σημαίνει ότι δεν υπάρχει λύση. Αν υπάρχει, μπορούμε να την προσομοιώσουμε αριθμητικά με την χρήση επαναληπτικού αλγορίθμου που υλοποιείται σε ηλεκτρονικό υπολογιστή.
Η αριθμητική λύση διαφέρει από την αναλυτική στο ότι ενώ η αναλυτική έχει συνήθως γενικό χαρακτήρα και ισχύει για όλες ή τουλάχιστον για ένα εύρος τιμών παραμέτρων και αρχικών συνθηκών, η αριθμητική λύση είναι ουσιαστικά μία συγκεκριμένη τροχιά που αποτελείται από μία αλληλουχία αριθμών και αναφέρεται σε συγκεκριμένες τιμές, παραμέτρων και αρχικών συνθηκών.

<u>Παράδειγμα</u>

Έστω η ΔΕ

$\frac{dA}{dt} = -kA$ με A(0)=Dose

Αναλυτική λύση:

$$A = Dose \cdot e^{-kt}$$

Ειδικά για Dose=10 και k=0.5

$$A = 10 \cdot e^{-0.5t}$$

Αριθμητική λύση:

Διακριτοποιούμε την εξίσωση θεωρώντας χρόνους t_0, t_1, t_2,…, t_{n-1}, t_n και αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης A δηλαδή A_1, A_2, A_3,…, A_n. Στόχος μας είναι να βρούμε τις τιμές των A_i το σύνολο των οποίων αποτελεί την αριθμητική λύση. Η διακριτοποιημένη ΔΕ για μια χρονική στιγμή t_i και υποθέτοντας για ευκολία ότι $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ για όλα τα i, μπορεί να γραφεί:

$$\frac{dA}{dt} \cong \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{A_{i+1} - A_i}{\Delta t} = -kA_i$$

Λύνουμε ως προς A_{i+1}

$$A_{i+1} = -kA_i\Delta t + A_i$$

που ονομάζεται εξίσωση διαφορών. Η μέθοδος αυτή ονομάζεται μέθοδος του Euler. Πρέπει να θέσουμε Dose=10 και k=0.5 και επιπλέον Δt=0.1, και τελικό t_n=1, οπότε λαμβάνουμε τις διαδοχικές τιμές του A_i , με αρχική τιμή το A_1 για i=1

$$A_1 = 10$$
$$A_2 = -0.5 \cdot 10 \cdot 0.1 + 10 = 9.5$$
$$A_3 = -0.5 \cdot 9.5 \cdot 0.1 + 9.5 = 9.025$$
$$\vdots$$

Χρόνος	**Αριθμητική λύση**	**Αναλυτική λύση**
0	10	10
0.1	9.5	9.512294245
0.2	9.025	9.04837418
0.3	8.57375	8.607079764
0.4	8.1450625	8.187307531
0.5	7.737809375	7.788007831
0.6	7.350918906	7.408182207
0.7	6.983372961	7.046880897
0.8	6.634204313	6.70320046
0.9	6.302494097	6.376281516
1	5.987369392	6.065306597

2. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΕ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

ΔΕ εξισώσεις πρώτης τάξης είναι ΔΕ που περιλαμβάνουν την πρώτη παράγωγο μιας συνάρτησης, δηλαδή είναι της μορφής

$$\frac{dy}{dt} = f(y,t)$$

όπου f(y,t) είναι μια συνάρτηση 2 μεταβλητών.
Μια οποιαδήποτε παραγωγίσιμη συνάρτηση y=φ(t) που ικανοποιεί την ΔΕ για κάθε t σε ένα ορισμένο διάστημα, καλείται λύση της ΔΕ. Στόχος μας είναι βρούμε αυτή τη λύση.

Γραμμικές ΔΕ με μεταβλητούς συντελεστές

Όταν τη συνάρτηση f(y) είναι γραμμική ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή y τότε η ΔΕ εξίσωση καλείται γραμμική ΔΕ όπως έχουμε δει και ένα παράδειγμα είναι η ΔΕ

$$\frac{dy}{dt} = -ay + b$$

Μάλιστα είδαμε ότι μια τέτοια εξίσωση μπορεί να περιγράψει κάτω από ορισμένες παραδοχές, τη κινητική ενός φαρμάκου σε οργανισμό ενός ασθενή κατά τη διάρκεια έγχυσης φαρμάκου με σταθερό ρυθμό.

Θα δούμε πως λύνουμε γραμμικές ΔΕ της γενικότερης δυνατής μορφής η οποία είναι η εξής:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

Όπου p και g είναι συναρτήσεις της ανεξάρτητης μεταβλητής t.
Η πρώτη εξίσωση μπορεί να λυθεί με απευθείας ολοκλήρωση αν την γράψουμε ως

$$\frac{1}{y - b/a}\frac{dy}{dt} = -a$$

Τότε με ολοκλήρωση παίρνουμε

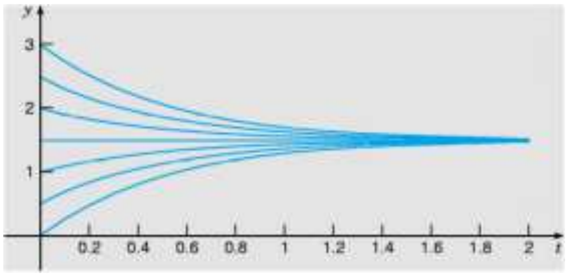
$$\ln|y - \frac{b}{a}| = -at + C$$

Από την οποία παίρνουμε ως γενική λύση την

$$y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-at}$$

Όπου c=±e^C είναι μια αυθαίρετη σταθερά.
Για παράδειγμα αν a=2 και b=3 τότε η εξίσωση γίνεται

$$\frac{dy}{dt} + 2y = 3$$



και η λύση της

$$y = \frac{3}{2} + c \cdot e^{-2t}$$

Για y(0)=3 έχουμε c=3-3/2=3/2 και η λύση γίνεται $y = \frac{3}{2}(1 + e^{-2t})$.

Ενώ για y(0)=0 έχουμε c=-3/2 και η λύση γίνεται $y = \frac{3}{2}(1 - e^{-2t})$.

Όλες οι λύσεις συγκλίνουν ασυμπτωτικά στην λύση $y = \frac{3}{2}$ που προκύπτει για c=0 όταν $y(0) = \frac{3}{2}$.

Δυστυχώς η μέθοδος αυτή δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη λύση της γενικής εξίσωσης.

Μια πιο γενική μέθοδος είναι η μέθοδος των ολοκληρωτικών παραγόντων κατά την οποία η εξίσωση πολλαπλασιάζεται και από τα 2 μέρη με έναν κατάλληλο ολοκληρωτικό παράγοντα μ(t), ο οποίος διευκολύνει την ολοκλήρωση όπως θα δούμε παρακάτω, αλλά μεταφέρει τη δυσκολία στην εύρεση της κατάλληλης συνάρτησης μ(t).

<u>Παράδειγμα 1</u>

Θα λύσουμε την ίδια ΔΕ με ολοκληρωτικό παράγοντα

$$\frac{dy}{dt} + 2y = 3$$

Πολλαπλασιάζουμε με την συνάρτηση μ(t),

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + 2\mu(t)y = 3\mu(t)$$

Υποθέτουμε ότι είναι εφικτό να επιλέξουμε την μ(t) έτσι ώστε το αριστερό μέρος της ΔΕ να αποτελεί μια αναγνωρίσιμη μορφή παραγώγου κάποιας συνάρτησης. Τότε μπορούμε να ολοκληρώσουμε την ΔΕ παρόλο που δεν γνωρίζουμε την συνάρτηση y.

Το αριστερό μέρος της ΔΕ μπορεί να γραφεί σαν [μ(t)y]΄ αν ισχύει

παράγωγος γινομένου:
$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \mu(t)\frac{dy}{dt} + \frac{d\mu(t)}{dt}y$$

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = 2\mu(t)$$

Το μ(t) που θέλουμε είναι

$$\frac{d\mu(t)/dt}{\mu(t)} = 2$$

$$\frac{d\ln|\mu(t)|}{dt} = 2$$

$$\ln|\mu(t)| = 2t + K$$

$$\mu(t) = ke^{2t}$$

Όπου k=e^K και θέτουμε k=1 οπότε ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι $\mu(t) = e^{2t}$ Επιστρέφοντας στην ΔΕ, αντικαθιστούμε τον ΟΠ και παίρνουμε

$$e^{2t}\frac{dy}{dt} + 2e^{2t}y = 3e^{2t}$$

Το αριστερό μέρος είναι η παράγωγος της συνάρτησης $e^{2t}y$, όποτε η ΔΕ γίνεται

$$\frac{d}{dt}(e^{2t}y) = 3e^{2t}$$

και ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$e^{2t}y = \frac{3}{2}e^{2t} + c$$

Λύνοντας ως προς y

$$y = \frac{3}{2} + ce^{-2t}$$

■

Θα γενικεύσουμε τη χρήση της μεθόδου των ΟΠ στην γενικότερη περίπτωση σε 3 διαδοχικά βήματα. Πρώτα θεωρούμε την περίπτωση:

$$\frac{dy}{dt} + ay = b$$

Ουσιαστικά είναι η ιδία περίπτωση, άπλα όπου 2 και 3 βάζουμε τα a και b αντίστοιχα. Ο ΟΠ είναι $\mu(t) = e^{at}$.■

Το επόμενο βήμα είναι να λύσουμε την ΔΕ

$$\frac{dy}{dt} + ay = g(t)$$

Στην περίπτωση αυτή ο ΟΠ είναι πάλι $\mu(t) = e^{at}$

$$e^{at}\frac{dy}{dt} + ae^{at}y = e^{at}g(t)$$

$$\frac{d}{dt}(e^{at}y) = e^{at}g(t)$$

$$e^{at}y = \int e^{at}g(t)dt + c$$

$$y = e^{-at}\int e^{at}g(t)dt + ce^{-at}$$

Παράδειγμα 2

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}y = 2 + t$$

Στην περίπτωση αυτή a=1/2 οπότε ο ΟΠ είναι $\mu(t)=e^{t/2}$

$$\frac{d}{dt}(e^{t/2}y) = 2e^{t/2} + te^{t/2}$$

Ολοκληρώνοντας κάνοντας χρήση της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες για τον όρο $te^{t/2}$:

Επειδή $\int e^{t/2}dt = 2e^{t/2}$ το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int te^{t/2}dt = \int t(2e^{t/2})'dt = 2te^{t/2} - \int 2e^{t/2}dt$$
$$= 2te^{t/2} - 4e^{t/2}$$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες
Έστω συναρτήσεις $u(x)$ και $v(x)$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

ή

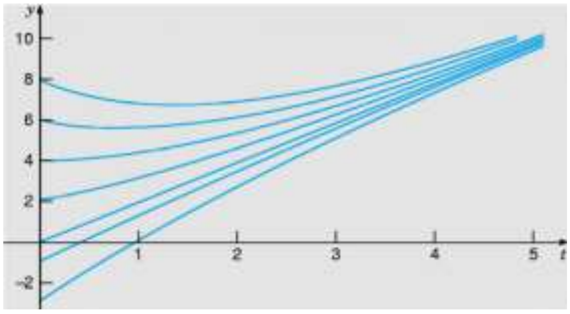
$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx$$

Τελικά η ΔΕ γίνεται:

$$e^{t/2}y = 4e^{t/2} + 2te^{t/2} - 4e^{t/2} + c$$

$y = 2t + ce^{-t/2}$

Ως συνήθως το c υπολογίζεται από την αρχική τιμή. Για παράδειγμα αντικαθιστώντας την αρχική τιμή $y(0) = 2$ ισχύει 2=0+c δηλαδή c=2 και η λύση είναι $y = 2t + 2e^{-t/2}$. Παρατηρούμε ότι σε αντίθεση με το προηγούμενο παράδειγμα κατά το οποίο οι λύσεις συνέκλιναν όπως είδαμε σε ένα σημείο ισορροπίας, εδώ όλες οι λύσεις συγκλίνουν στην συνάρτηση $y = 2t$ καθώς για μεγάλες τιμές του t ο όρος $ce^{-t/2}$ πάντα τείνει στο μηδέν. Η λύση $y = 2t$ αντιστοιχεί στην περίπτωση c=0 για αρχική τιμή $y(0) = 0$.■



Το τελευταίο βήμα είναι να λύσουμε την πιο γενική μορφή γραμμικής ΔΕ πρώτης τάξης:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά τα γνωστά με τον ολοκληρωτικό παράγοντα μ(t)

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + p(t)\mu(t)y = \mu(t)g(t)$$

Το αριστερό μέρος αποτελεί την παράγωγο της συνάρτησης μ(t)y αν το μ(t) ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = p(t)\mu(t)$$

Αν υποθέσουμε προς στιγμήν ότι το μ(t)>0 τότε έχουμε

$$\frac{1}{\mu(t)}\frac{d\mu(t)}{dt} = p(t)$$

και επομένως

$$\ln \mu(t) = \int p(t)dt + k$$

Μας ενδιαφέρει να βρούμε ένα οποιονδήποτε μ(t), οπότε θέτοντας k=0 παίρνουμε την απλούστερη μορφή για το μ(t)

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$$

Η αρχική ΔΕ γίνεται

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \mu(t)g(t)$$

οπότε

$$\mu(t)y = \int \mu(t)g(t)dt + c$$

Και η τελική λύση είναι:

$$y = \frac{\int \mu(t)g(t)dt + c}{\mu(t)}$$

Παράδειγμα 3

Θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$ty' + 2y = 4t^2$ με y(1)=2

Φέρνουμε τη ΔΕ στη μορφή $y' + p(t)y = g(t)$

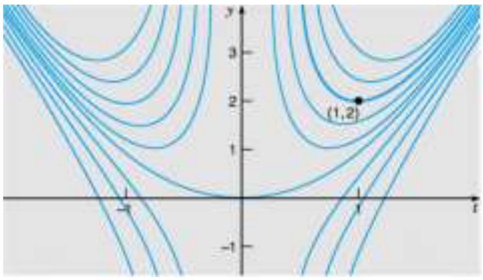
$$y' + (2/t)y = 4t$$

Όπου p(t)=2/t, g(t)=4t

ΟΠ: $\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t} dt} = e^{2\ln|t|} = t^2$

Αντικαθιστούμε στην ΔΕ:

$t^2 y' + 2ty = 4t^3$



$(t^2 y)' = 4t^3$

Ολοκληρώνουμε:

$t^2 y = t^4 + c$

$$y = t^2 + \frac{c}{t^2}$$

Αντικαθιστούμε την αρχική συνθήκη, y(1)=2, για να υπολογίσουμε το c

$$2 = 1 + \frac{c}{1} \Rightarrow c = 1$$

$y = t^2 + \frac{1}{t^2}$, με t>0

Η λύση υπάρχει για τιμές t>0 και για μεγάλα t τείνει στην $y = t^2$ ενώ για $t \to 0, y \to \infty$. Αυτό είναι αποτέλεσμα της παρουσίας του p(t)=2/t. Για αρχικές τιμές με t<0 υπάρχει άλλο σύνολο λύσεων συμμετρικά ως προς τον άξονα των y, το οποίο όμως δεν είναι τμήμα της λύσης του συγκεκριμένου προβλήματος αρχικών τιμών. Π.χ. για y(-1)=2 θα παίρναμε πάλι $y = t^2 + \frac{1}{t^2}$. Επίσης για y(1)=0, c=-1 και θα είχαμε την λύση $y = t^2 - \frac{1}{t^2}$, όπως επίσης και για y(-1)=0 θα είχαμε την ίδια λύση αλλά για t<0. Αυτές όλες οι διαφορετικές λύσεις αντιστοιχούν σε διαφορετικά προβλήματα αρχικών τιμών η κάθε μία. Επίσης υπάρχει και μία εκφυλισμένη λύση που επαληθεύει την ΔΕ για κάθε t, η $y = t^2$, η οποία αντιστοιχεί σε c=0. Πράγματι για $y = t^2, y' = 2t$ και η αρχική ΔΕ $ty' + 2y = 4t^2$ επαληθεύεται: $2t^2 + 2t^2 = 4t^2$.

Άσκηση 1

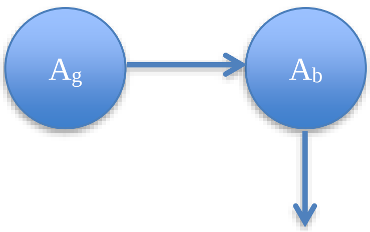
Βρείτε τη λύση της ΔΕ

$ty' + 2y = \sin t$

με y(π/2)=1

<u>Εφαρμογή: Χορήγηση φαρμάκου από το στόμα (per os).</u>

Θεωρούμε 2 διαμερίσματα, το γαστρεντερικό και την κυκλοφορία. A_g είναι η ποσότητα του φαρμάκου στο γαστρεντερικό και A_b ποσότητα του φαρμάκου στην κυκλοφορία. Ο ρυθμός μείωσης της ποσότητας του φαρμάκου, στο γαστρεντερικό δίνεται από την ΔΕ



$$\frac{dA_g}{dt} = -k_a A_g$$

Ενώ ο ρυθμός μεταβολής της ποσότητας του φαρμάκου, στην κυκλοφορία δίνεται από την ΔΕ

$$\frac{dA_b}{dt} = k_a A_g - k_e A_b$$

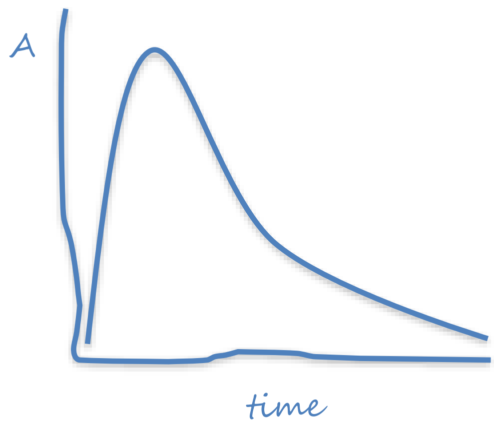
Ο όρος $k_a A_g$ είναι ο ρυθμός απορρόφησης του φαρμάκου και αφαιρείται από την πρώτη ΔΕ ενώ προστίθεται στην δεύτερη. Ο όρος $-k_e A_b$ είναι ο ρυθμός απομάκρυνσης του φαρμάκου που τον έχουμε και προηγούμενα σε άλλες εφαρμογές με ενδοφλέβια χορήγηση. Οι αρχικές συνθήκες είναι $A_g(0)$=Dose και $A_b(0)=0$. Παρόλο που οι δύο ΔΕ αποτελούν σύστημα λύνονται εύκολα καθώς μπορούμε να λύσουμε την πρώτη ανεξάρτητα και να αντικαταστήσουμε τη λύση της στην δεύτερη.

Η λύση της πρώτης ΔΕ που εκφράζει την ποσότητα του φαρμάκου στο γαστρεντερικό A_g είναι μία εκθετική συνάρτηση όπως έχουμε δει και σε άλλες εφαρμογές:

$$A_g = Dose \cdot e^{-k_a t}$$

Αντικαθιστώντας αυτή τη λύση στη ΔΕ που εκφράζει την ποσότητα του φαρμάκου στην κυκλοφορία λαμβάνουμε μια ΔΕ με χρονικά μεταβαλλόμενο συντελεστή της μορφής $\frac{dy}{dt} + ay = g(t)$, με $a = k_e$ και $g(t) = k_a Dose \cdot e^{-k_a t}$.

$$\frac{dA_b}{dt} = k_a Dose \cdot e^{-k_a t} - k_e A_b$$



Λύνουμε με ΟΠ $\mu(t) = e^{k_e t}$

$$e^{k_e t}\frac{dA_b}{dt} + k_e e^{k_e t} A_b = k_a Dose \cdot e^{(k_e - k_a)t}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{k_e t} A_b) = k_a Dose \cdot e^{(k_e - k_a)t}$$

(α) για $k_a \neq k_e$, ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$e^{k_e t} A_b = k_a Dose \cdot \int e^{(k_e - k_a)t} dt + c$$

$$A_b = e^{-k_e t}\frac{k_a Dose}{k_e - k_a} \cdot e^{(k_e - k_a)t} + c e^{-k_e t}$$

$$A_b = \frac{k_a Dose}{k_e - k_a} \cdot e^{-k_a t} + c e^{-k_e t}$$

Επειδή $A_b(0)=0$, $c = -\frac{k_a Dose}{k_e - k_a}$

$$A_b = \frac{k_a Dose}{k_e - k_a} \cdot (e^{-k_a t} - e^{-k_e t})$$

(β) Για την ειδική περίπτωση $k_a = k_e = k$

$$\frac{d}{dt}(e^{k_e t} A_b) = k_a Dose \cdot e^{(k_e - k_a)t} = k \cdot Dose$$

Ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$e^{k \cdot t} A_b = k \cdot Dose \cdot t + c$$

$$A_b = e^{-k \cdot t} k \cdot Dose \cdot t + c e^{-k \cdot t}$$

Επειδή $A_b(0)=0$, $c = 0$

$$A_b = Dose \cdot k \cdot t e^{-k \cdot t}$$

Εφαρμογή: ανατοκισμός κατάθεσης

Έστω ότι καταθέτουμε ένα αρχικό ποσό S_0 στην τράπεζα με ετήσιο επιτόκιο r
Θα δείξουμε ότι υποθέτοντας συνεχή ανατοκισμό, ισχύει η ΔΕ

$$\frac{dS}{dt} = rS$$

με λύση

$$S(t) = S_0 e^{rt}$$

Αν είχαμε ανατοκισμό κάθε χρόνο, μετά από 1 χρόνο θα είχαμε

$$S_1 = S_0 + rS_0 = S_0(1 + r)$$

Το δεύτερο χρόνο

$$S_2 = S_0(1+r) + rS_0(1+r) = S_0 + r\,S_0 + rS_0 + r^2\,S_0 = S_0(r^2 + 2r + 1)$$
$$= S_0(1+r)^2$$

Τον τρίτο χρόνο

$$S_3 = S_0(1+r)^2 + rS_0(1+r)^2 = S_0(r^2 + 2r + 1 + r^3 + 2r^2 + r)$$
$$= S_0(r^3 + 3r^2 + 3r + 1) = S_0(1+r)^3$$

Μετά από t χρόνια

$$S(t) = S_0(1+r)^t$$

Αν είχαμε ανατοκισμό 2 φορές το χρόνο

$$S(t) = S_0\left(1 + \frac{r}{2}\right)^{2t}$$

Αν είχαμε ανατοκισμό m φορές το χρόνο

$$S(t) = S_0\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}$$

$$\frac{S(t)}{S_0} = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}$$

Ισχύει η προσέγγιση

$$\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} = e^{rt}$$

οπότε

$$\frac{S(t)}{S_0} = e^{rt}$$

Για r=0.08 (8%)

Years	$S(t)/S(t_0)$ from Eq. (14) $m = 4$	$m = 365$	$S(t)/S(t_0)$ from Eq. (13)
1	1.0824	1.0833	1.0833
2	1.1717	1.1735	1.1735
5	1.4859	1.4918	1.4918
10	2.2080	2.2253	2.2255
20	4.8754	4.9522	4.9530
30	10.7652	11.0203	11.0232
40	23.7699	24.5239	24.5325

Τελικά

$$S(t) = S_0 e^{rt}$$

Αυτή είναι λύση της ΔΕ

$$\frac{dS}{dt} = rS$$

Αν καταθέτουμε ποσό k ανά έτος

$$\frac{dS}{dt} = rS + k$$

ΟΠ e^{-rt}

$$\frac{d(e^{-rt}S)}{dt} = ke^{-rt}$$

$$e^{-rt}S = -\frac{k}{r}e^{-rt} + c$$

$$S(t) = ce^{rt} - \frac{k}{r}$$

$c = S_0 + k/r$ επειδή $S(0) = S_0$

$$S(t) = \left(S_0 + \frac{k}{r}\right)e^{rt} - \frac{k}{r} = S_0 e^{rt} + \frac{k}{r}\, e^{rt} - \frac{k}{r}$$

$$S(t) = S_0 e^{rt} + \frac{k}{r}(e^{rt} - 1)$$

S_0 αρχικό κεφάλαιο, r επιτόκιο, k ετήσιες καταθέσεις

Αν είχα αρχικό κεφάλαιο 0, τότε θα είχα μόνο

$$S(t) = \frac{k}{r}(e^{rt} - 1)$$

Εναλλακτικά για δάνειο:

S_0 ποσό δανείου, r επιτόκιο, k (αρνητικό) ετήσιες δόσεις αποπληρωμής

Παράδειγμα:

Συνταξιοδοτικός λογαριασμός ανοίγει σε ηλικία 25 ετών με επιτόκιο r=0.05 (5%) και ετήσιες καταθέσεις 2000 €.

Στα 65 το ποσό θα ανέρχεται σε: ($t=40$, $S_0=0$)

$$S(40)=\frac{2000}{0.05}(e^{0.05\cdot 40}-1)=295562$$

Συνολικό ποσό κατάθεσης 2000x40=80000 €

Τόκοι 215562 €

$$S(t)=S_0e^{rt}+\frac{k}{r}(e^{rt}-1)$$

$S_1(t)=S_0e^{rt}$: προερχόμενο από αρχικό κεφάλαιο

$S_2(t)=\frac{k}{r}(e^{rt}-1)$: προερχόμενο από ετήσιες καταθέσεις

$\mathrm{S(t)}=S_1(t)+S_2(t)$

Αυτό λέγεται **Αρχή της υπέρθεσης** και ισχύει σε γραμμικά μοντέλα

Αν είχαμε μη γραμμικό μοντέλο δεν θα ίσχυε:

Π.χ. κλιμακωτό επιτόκιο r(S)

(4% έως 10000€, 5% από 10000 ως 50000€ κλπ)

$$\frac{dS}{dt}=r(\mathrm{S})S$$

Αν ήταν απλώς κυμαινόμενο το επιτόκιο εξακολουθεί να είναι γραμμικό

$$\frac{dS}{dt}=r(t)S$$

Αρχή της υπέρθεσης

Σε γραμμικά μοντέλα η συνολική απόκριση ενός συνόλου από εισόδους στο σύστημα είναι το άθροισμα των αποκρίσεων της κάθε εισόδου χωριστά

Δηλαδή δεν υπάρχει «συνέργεια»

Ένας λογαριασμός με σταθερό επιτόκιο, πχ 2%, των 1000 € έχει ίδια απόδοση με το άθροισμα 10 λογαριασμών των 100 € ή 1000 λογαριασμών του 1€.

Όμως με κλιμακωτό επιτόκιο δεν ισχύει αυτό γιατί τα € στον μεγάλο λογαριασμό «συνεργάζονται» ώστε να μας ανεβάσουν σε κλιμάκιο με μεγαλύτερη απόδοση

Είσοδοι στην γραμμική ΔΕ $y'+p(t)y=g(t)$ με $y(0)=y_0$

είναι το y_0 και το g(t), δηλαδή π.χ.

$y' + p(t)y = 0$ με $y(0)=y_0$, λύση $y_1(t)$

$y' + p(t)y = g_a(t)$ με $y(0)=0$, λύση $y_2(t)$

$y' + p(t)y = g_b(t)$ με $y(0)=0$, λύση $y_3(t)$

$y' + p(t)y = g_a(t) + g_b(t)$ με $y(0)=y_0$, λύση $y_4(t)= y_1(t)+ y_2(t)+ y_3(t)$

Αρχή υπέρθεσης στην γραμμική Φαρμακοκινητική

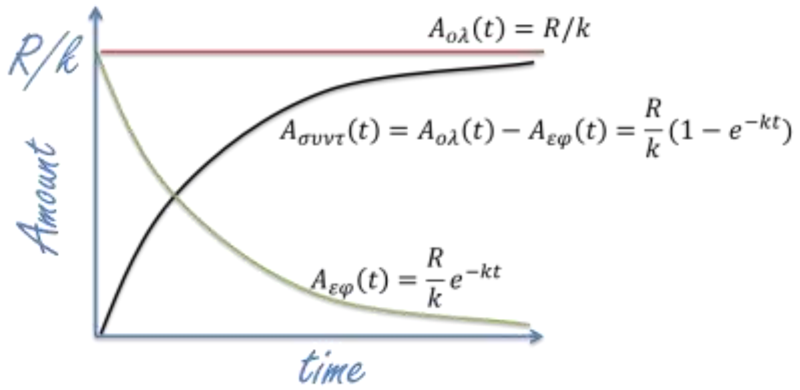
Έγχυση φαρμάκου με σταθερό ρυθμό

$$\frac{dA}{dt} = R - kA$$

αρχικά $A(0)=0$

Σημείο ισορροπίας στο $A = R/k$

Χορηγήσουμε δόση εφόδου Dose=R/k και ταυτόχρονα ξεκινάμε έγχυση συντήρησης ρυθμού τέτοια ώστε να παραμείνουν τα επίπεδα στο R/k

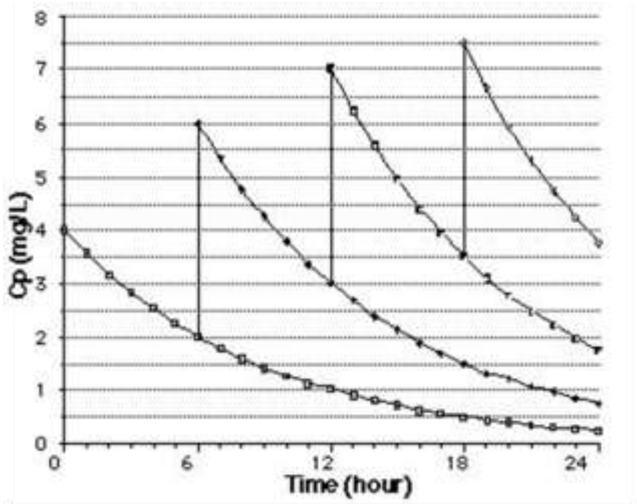


Επαναλαμβανόμενη χορήγηση

Απλή ενδοφλέβια χορήγηση

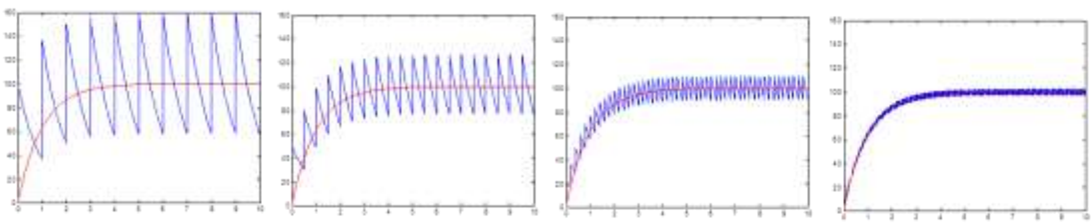
$$\frac{dA}{dt} = -kA$$

$$A(t) = Dose \cdot e^{-kt}$$



Επαναλαμβανόμενη ενδοφλέβια χορήγηση είναι υπέρθεση πολλών χρονικά μετατοπισμένων απλών χορηγήσεων

Αν μικρύνει το μεσοδιάστημα τ και ταυτόχρονα μικρύνει και η δόση έτσι ώστε ο ρυθμός λήψης του φαρμάκου να παραμένει ο ίδιος (δηλαδή πιο συχνά αλλά από πιο λίγο)



Βλέπουμε ότι η πολλαπλή χορήγηση στο όριο προσεγγίζει την συνεχή έγχυση ίδιου ρυθμού.
Η αρχή της υπέρθεσης στη φαρμακοκινητική είναι απόρροια της γραμμικότητας των ΔΕ και δεν ισχύει στη περίπτωση που έχουμε αυτό που λέμε «μη γραμμική φαρμακοκινητική». Δηλαδή για παράδειγμα στην περίπτωση που έχουμε μεταβολισμό του φαρμάκου με ένζυμα που υπόκεινται σε κορεσμό.

Γραμμική φαρμακοκινητική
Στη φαρμακολογία το αποτέλεσμα του φαρμάκου, εν γένει, εξαρτάται από την συγκέντρωση του. Μεγάλη συγκέντρωση -> έντονο αποτέλεσμα. Όμως, όπως έχουμε δει η συγκέντρωση μεταβάλλεται με το χρόνο. Μία τιμή της συγκέντρωσης που είναι

αντιπροσωπευτική είναι η μέση συγκέντρωση. Ξέρουμε από το θεώρημα μέσης τιμής ότι για μια συνάρτηση f(x), η μέση τιμή της στο διάστημα [α,β] είναι το ολοκλήρωμα

$$\frac{1}{\beta - \alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

Στη φαρμακοκινητική ορίζεται το μέγεθος

$$AUC = \int_{0}^{T} C(t)dt$$

Το οποίο είναι το εμβαδό της επιφάνειας καμπύλης συγκέντρωσης – χρόνου σε ένα διάστημα (0,T), συχνά 24 ώρες, ή ακόμα και ως το άπειρο που λέγεται στα Αγγλικά: Area Under the Curve (AUC). Ονομάζεται έκθεση του φαρμάκου (drug exposure) και συσχετίζεται πάρα πολύ καλά με το αποτέλεσμα του φαρμάκου, για τα περισσότερα φάρμακα, καθώς είναι ανάλογο της μέσης συγκέντρωσης στο διάστημα αυτό. Ορίζεται ότι ένα φάρμακο «έχει γραμμική φαρμακοκινητική» αν το AUC είναι ανάλογο της δόσης το οποίο ισχύει αν η κινητική περιγράφεται από γραμμικές ΔΕ. Στην αντίθετη περίπτωση, όταν δηλαδή η κινητική περιγράφεται από μη γραμμικές ΔΕ, λέμε ότι έχουμε «μη γραμμική φαρμακοκινητική».

3. ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΕ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Μέθοδος χωριζομένων μεταβλητών

Με την μέθοδο των χωριζομένων μεταβλητών μπορούμε να λύσουμε μια συγκεκριμένη κατηγορία εν γένει μη γραμμικών ΔΕ.

Έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει την μέθοδο των χωριζόμενων μεταβλητών για να λύσουμε γραμμικές ΔΕ με σταθερούς συντελεστές της μορφής

$$\frac{dy}{dt} = ay + b$$

Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο αυτή σε μια αρκετά πιο γενική κατηγορία μη γραμμικών ΔΕ

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Η ΔΕ είναι εν γένει μη γραμμική. Πάντα μπορούμε να τη γράψουμε στην ακόλουθη μορφή, χωρίζοντας σε 2 μέρη τον όρο f(x,y)

$$M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$$

Πχ αν M(x,y)= -f(x,y) και N(x,y)=1

Στην ειδική περίπτωση που ο κάθε όρος M και N εξαρτάται μόνο από την μία μεταβλητή, η ΔΕ ονομάζεται διαχωρίσιμη, δηλαδή:

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0$$

Η οποία μπορεί να λυθεί με απευθείας ολοκλήρωση

$$\int M(x)dx + \int (N(y)\frac{dy}{dx})dx = c$$

Εναλλακτικά η ΔΕ μπορεί να γραφεί

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

Όπου και πάλι με απευθείας ολοκλήρωση παίρνουμε

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = c$$

Τη σταθερά c την προσδιορίζουμε αφού θέσουμε αρχικές τιμές x_0 και y_0 αλλά μπορούμε να γράψουμε και κατευθείαν

$$\int_{x_0}^{x} M(s)ds + \int_{y_0}^{y} N(s)ds = 0$$

Παράδειγμα 1

Θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}$$

με $y(0)=-1$

Είναι χωριζομένων μεταβλητών καθώς μπορεί να γραφεί

$$2(y-1)\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 4x + 2$$

Ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + c$$

Τη σταθερά c την προσδιορίζουμε από την αρχική συνθήκη y(0)=-1
Για $x_0=0$, $y_0=-1$, αντικαθιστώντας παίρνουμε

$$1 + 2 = 0 + c \Longrightarrow c = 3$$

Οπότε η λύση γίνεται:

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 3$$

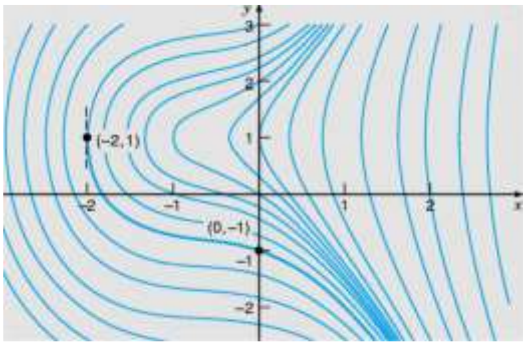
Θέλουμε να λύσουμε ως προς y και σχηματίζουμε στο αριστερό μέρος ένα τέλειο τετράγωνο προσθέτοντας και στα δύο μέλη +1:

$$y^2 - 2y + 1 = (y-1)^2 = x^3 + 2x^2 + 2x + 4$$

Οπότε λύνουμε ως προς y:

$$y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$$

Όμως κρατάμε μονό τη λύση με το «πλην» γιατί μόνο αυτή επαληθεύει την αρχική συνθήκη.
Για «πλην» $y(0) = 1 - \sqrt{4} = -1$
Για «συν» $y(0) = 1 + \sqrt{4} = 3$



Αν ένα πρόβλημα αρχικών τιμών είναι καλά ορισμένο δεν είναι δυνατόν να έχουμε 2 λύσεις. Αν αυτή η ΔΕ περιγράφει ένα φυσικό πρόβλημα οφείλει να έχει μια μοναδική χρονική εξέλιξη (τροχιά). Οπότε η τελική λύση είναι η

$$y = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$$

Το διάστημα που ορίζεται η λύση αντιστοιχεί στο διάστημα που το υπόριζο είναι θετικό, δηλαδή x>-2.

Για το όριο x=-2, είναι y=1, όπου η ΔΕ εκφυλίζεται, καθώς έχουμε dy/dx=∞.

<u>Παράδειγμα 2: κινητική Michaelis - Menten</u>

Στη ΦΚ η κινητική ΜΜ για την απομάκρυνση της ποσότητας Α του φαρμάκου από ένζυμα που υπόκεινται κορεσμό, και μπορούν να δώσουν ένα μέγιστο ρυθμό απομάκρυνσης, V_{max}, περιγράφεται από την παρακάτω ΔΕ.

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{V_{max}A}{K_m + A}$$

A(0)=dose

Την γράφουμε στη μορφή «$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0$»

$$-\frac{K_m + A}{V_{max}A}\frac{dA}{dt} = 1$$

Με $N(y) = -\frac{K_m+A}{V_{max}A}$ και $M(x) = -1$

$$\left(-\frac{K_m}{V_{max}A} - \frac{1}{V_{max}}\right)\frac{dA}{dt} = 1$$

Ολοκληρώνουμε

$$\int \left(-\frac{K_m}{V_{max}A} - \frac{1}{V_{max}}\right)\frac{dA}{dt}dt = \int dt$$

$$-\frac{K_m}{V_{max}}\ln A - \frac{A}{V_{max}} = t + c$$

$$c = -\frac{K_m}{V_{max}}\ln dose - \frac{dose}{V_{max}}$$

Παρατηρούμε ότι η λύση με την μέθοδο αυτή μπορεί να είναι πεπλεγμένη συνάρτηση δηλαδή να μην μπορούμε να λύσουμε ως προς A ώστε να λάβουμε μια λύση της μορφής A(t).

Άσκηση 2

Βρείτε τη λύση της ΔΕ

$$y' = 2y^2 + xy^2$$

με y(0)=1

Ομογενείς ΔΕ

Αν το δεξί μέρος μίας ΔΕ dy/dx=f(x,y) μπορεί να γραφεί ως συνάρτηση του λόγου y/x, τότε η εξίσωση ονομάζεται ομογενής, δηλαδή είναι της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Προσοχή!
Η γραμμική ΔΕ
$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)y = g(t)$
ονομάζεται επίσης ομογενής, όταν g(t)=0
Αυτό ο ορισμός δεν σχετίζεται με τον άλλο!!!

Η εξίσωση αυτή μπορεί να αναχθεί σε χωριζόμενων μεταβλητών εισάγοντας τον μετασχηματισμό y=ux, τότε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(ux)}{dx} = \frac{du}{dx}x + u = f(u)$$

$$\frac{1}{x} = \left(\frac{1}{f(u) - u}\right)\frac{du}{dx}$$

Η παραπάνω είναι διαχωρίσιμη της μορφής

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0$$

Με $M(x)=\frac{1}{x}$ και $N(y)=-\frac{1}{f(u)-u}$

Παράδειγμα 1

Η ΔΕ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2+2xy}{x^2}$$

γράφεται ως

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{y}{x}\right)^2+2\frac{y}{x}$$

άρα είναι ομογενής και θέτουμε y=ux

$$x\frac{du}{dx}+u=u^2+2u$$

$$x\frac{du}{dx}=u^2+u$$

$$x\frac{du}{dx}=u(u+1)$$

Η ΔΕ έχει ως λύσεις τις σταθερές συναρτήσεις u=0 και u=-1, που τη επαληθεύουν και οδηγούν στις λύσεις ως προς y=0 και y=-x, αντίστοιχα.

Για u≠0, -1 η ΔΕ μπορεί να γραφεί

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{u(u+1)}\frac{du}{dx}$$

Αναπτύσσουμε σε μερικά κλάσματα τον όρο $\frac{1}{u(u+1)}$

Και η ΔΕ γίνεται

$$\frac{1}{x}=\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\right)\frac{du}{dx}$$

Μερικά κλάσματα:

$$\frac{1}{u(u+1)}=\frac{A}{u}+\frac{B}{u+1}$$

$$\frac{A(u+1)+Bu}{u(u+1)}=\frac{Au+A+Bu}{u(u+1)}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{u(u+1)}=\frac{(A+B)u+A}{u(u+1)}$$

$$\begin{cases}A+B=0\\ A=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=-1\\ A=1\end{cases}$$

Ολοκληρώνοντας λαμβάνουμε

$$\ln|x| + c = \ln|u| - \ln|u+1|$$

Όπου c μία σταθερά ολοκλήρωσης.

Κάνοντας τις πράξεις και απολογαριθμίζοντας λαμβάνουμε

$$\ln|x| + c = \ln\left|\frac{u}{u+1}\right|$$

$$\pm e^c x = \frac{u}{u+1}$$

Θέτοντας $k = \pm e^c$, και τελικά αντικαθιστώντας το u=y/x έχουμε

$$kx = \frac{y/x}{y/x+1} = \frac{y}{y+x}$$

Λύνοντας ως προς y, παίρνουμε

$$y = \frac{kx^2}{1-kx}$$

Το k υπολογίζεται από την αρχική τιμή. Η λύση y=0 περιλαμβάνεται στην παραπάνω λύση για k=0, ένω η λύση y=-x προκύπτει λαμβάνοντας το όριο για $k \to \pm\infty$

Παράδειγμα 2 (ΟΧΙ)

Η ΔΕ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-4x}{x-y}$$

γράφεται ως

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y/x-4}{1-y/x}$$

άρα είναι ομογενής και θέτουμε u=y/x

$$f(u) = \frac{u-4}{1-u}$$

$$\frac{1}{x}=\left(\frac{1}{\frac{u-4}{1-u}-u}\right)\frac{du}{dx}=\left(\frac{1}{\frac{u^2-4}{1-u}}\right)\frac{du}{dx}=\left(\frac{1-u}{u^2-4}\right)\frac{du}{dx}$$

Λύνουμε την ΔΕ:

$$\frac{1}{x}=\left(\frac{1-u}{u^2-4}\right)\frac{du}{dx}$$

Μερικά κλάσματα:

$$\frac{1-u}{(u+2)(u-2)}=\frac{A}{u+2}+\frac{B}{u-2}$$

$$\frac{A(u-2)+B(u+2)}{(u+2)(u-2)}=\frac{Au-2A+Bu+2B}{(u+2)(u-2)}$$

$$\Rightarrow\frac{1-u}{(u+2)(u-2)}=\frac{-2A+2B+(A+B)u}{(u+2)(u-2)}$$

$$\begin{cases}A+B=-1\\-2A+2B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2A+2B=-2\\-2A+2B=1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}4B=-1\Rightarrow B=-\frac{1}{4}\\-2A-\frac{1}{2}=1\Rightarrow A=-\frac{3}{4}\end{cases}$$

Ολοκληρώνουμε

$$\int\frac{1}{x}dx=\int\frac{1-u}{(u+2)(u-2)}\frac{du}{dx}dx$$

Εφαρμόζουμε μερικά κλάσματα

$$\int\frac{1}{x}dx=-\frac{3}{4}\int\frac{1}{u+2}\,du-\frac{1}{4}\int\frac{1}{u-2}du$$

Τελικά λαμβάνουμε

$$\ln|x|=-\frac{3}{4}\ln|u+2|-\frac{1}{4}\ln|u-2|+c$$

Που γίνεται για την λύση της u:

$$\ln(x^4|u+2|^3|u-2|)=4c$$

Για να λύσουμε ως προς y πρέπει να αντικαταστήσουμε τον μετασχηματισμό u=y/x

Άσκηση 3

Βρείτε τη λύση της ΔΕ

$$y'=\frac{x^2+3xy+y^2}{x^2}$$

με y(1)=0

Εξισώσεις Bernoulli

Μη γραμμικές ΔΕ της μορφής

$$y' + p(t)y = q(t)y^n$$

όπου n ακέραιος, ονομάζονται Bernoulli

Για n=0 ισχύει $y' + p(t)y = q(t)$,

για n=1 ισχύει $y' + (p(t) - q(t))y = 0$,

που είναι γραμμικές ΔΕ και λύνονται όπως περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

Για $n \neq 0,1$ είναι μη γραμμικές ΔΕ αλλά, ανάγονται σε γραμμικές με τον μετασχηματισμό $u=y^{1-n}$

Διαιρώντας την ΔΕ με y^n έχουμε

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{p(t)}{y^{n-1}} = q(t)$$

Εισάγουμε τον μετασχηματισμό

$$u = \frac{1}{y^{n-1}} = y^{1-n}$$

παραγωγίζοντας έχουμε

$$u' = (1-n)y^{-n}y' = \frac{1-n}{y^n}y'$$

οπότε

$$\frac{y'}{y^n} = \frac{u'}{1-n}$$

Η ΔΕ γράφεται

$$\frac{u'}{1-n} + p(t)u = q(t)$$

ή

$$u' + (1-n)p(t)u = (1-n)q(t)$$

που είναι μία γραμμική ΔΕ με μεταβλητούς συντελεστές της μορφής που είχαμε δει.

$$\frac{du}{dt} + h(t)u = g(t)$$

με h(t)=(1-n)p(t) και g(t)=(1-n)q(t)

Είχαμε δει ότι η ΔΕ αυτή λύνεται με την χρήση του ολοκληρωτικού παράγοντα

$$\mu(t) = e^{\int h(t)dt}$$

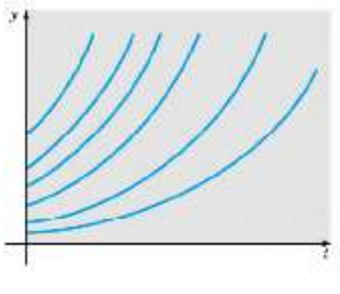
δηλαδή

$$\mu(t) = e^{(1-n)\int p(t)dt}$$

<u>Παράδειγμα: Λογιστική εξίσωση</u>

Ο ρυθμός αύξησης ενός πληθυσμού εξαρτάται από τον υπάρχοντα πληθυσμό

$$\frac{dy}{dt} = ky$$



$$y(0) = y_0$$

$$y = y_0 e^{kt}$$

Όμως ο συντελεστής k μπορεί να μην είναι σταθερός, και είναι πιο ρεαλιστικό να θεωρήσουμε ότι μειώνεται όσο αυξάνει ο πληθυσμός αντικατοπτρίζοντας τους περιορισμένους πόρους του οικοσυστήματος στο οποίο ζει ο πληθυσμός. Δηλαδή θεωρούμε ότι $k=r-ay$.

$$\frac{dy}{dt} = (r - ay)y$$

Θέτοντας $a=r/K$ η ΔΕ γίνεται

$$\frac{dy}{dt} = r(1 - \frac{y}{K})y$$

Σημεία ισορροπίας y=0 και y=K, όπου K ονομάζεται η χωρητικότητα του συστήματος. Η ΔΕ

$$\frac{dy}{dt} = ry - \frac{r}{K}y^2$$

είναι μια εξίσωση Bernoulli $y' + p(t)y = q(t)y^n$ με p(t)=-r, q(t)=-r/K και n=2, η οποία όπως είπαμε λύνεται με τον μετασχηματισμό u=1/y δηλαδή

$$u' = -\frac{1}{y^2}y' \Rightarrow y' = -y^2u'$$

$$-y^2u' - ry = -\frac{r}{K}y^2$$

Διαιρούμε με $-y^2$

$$u' + \frac{r}{y} = \frac{r}{K}$$

$$u' + ru = \frac{r}{K}$$

Αυτή όπως έχουμε πει λύνεται με τον ΟΠ $\mu(t) = e^{(1-n)\int p(t)dt} = e^{rt}$.

$$(ue^{rt})' = \frac{r}{K}e^{rt}$$

$$ue^{rt} = \frac{1}{K}e^{rt} + c$$

$$u = \frac{1}{K} + ce^{-rt}$$

$$y = \frac{1}{u} = \frac{1}{\frac{1}{K} + ce^{-rt}} = \frac{K}{1 + cKe^{-rt}}$$

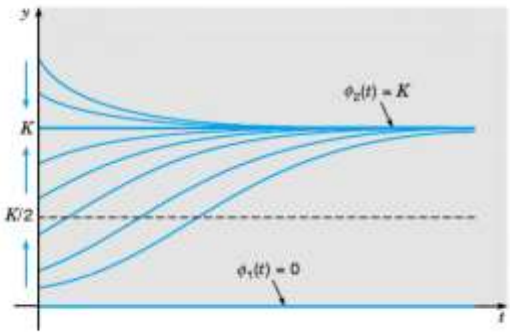
Το c προσδιορίζεται από την αρχική τιμή του y.

Για y(0)=y_0≠0 είναι $c = \frac{K - y_0}{K y_0}$

Για y(0)=0 είναι y(t)=0 για κάθε t.

Παρατηρούμε ότι για μεγάλους χρόνους

$$\lim_{t\to\infty} \frac{K}{1 + cKe^{-rt}} = \frac{K}{1 + cK \cdot 0} = K$$



δηλαδή το σημείο ισορροπίας y=K είναι ευσταθές καθώς ανεξάρτητα από την αρχική τιμή του y η ασυμπτωτική λύση είναι το K. Εκτός αν η αρχική τιμή είναι το y=0 η οποία είναι επίσης σημείο ισορροπίας, αλλά ασταθές, καθώς ακόμα και αρχικές τιμές πολύ κοντά στο 0 καταλήγουν στο K και όχι στο 0.

Σημειωτέον ότι την ΔΕ θα μπορούσαμε να την είχαμε λύσει με μέθοδο χωριζόμενων μεταβλητών κατευθείαν

$$\frac{1}{(1 - \frac{y}{K})y}\frac{dy}{dt} = r$$

κάνοντας χρήση των μερικών κλασμάτων.

Άσκηση 4

Βρείτε τη λύση της ΔΕ

$t^2y' + 2ty - y^3 = 0$

Όπου t>0

Πλήρεις ΔΕ και ολοκληρωτικοί παράγοντες

Πλήρεις ΔΕ είναι άλλη μια ειδική κατηγορία μη γραμμικών ΔΕ που δεν είναι διαχωρίσιμες.
Ἐστω η ΔΕ

$$2x + y^2 + 2xyy' = 0$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\psi(x, y) = x^2 + xy^2$ έχει την ιδιότητα

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 2x + y^2, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} = 2xy$$

Ολική παράγωγος για συνάρτηση f(x(t), y(t),…):

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \cdots$$

Έτσι η ΔΕ μπορεί να γραφεί

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

Υποθέτοντας, ότι το y είναι συνάρτηση του x και εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας, η ολική παράγωγος του ψ είναι $\frac{d\psi}{dx} = \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{dx}$, έχουμε

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 + x\,y^2) = 0$$

Οπότε ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$\psi(x, y) = x^2 + x\,y^2 = c$$

όπου c μία σταθερά. Τέλος πρέπει να λύσουμε ως προς y.

Η εύρεση της λύσης βασίστηκε στην αναγνώριση της συνάρτησης ψ.

Γενικεύοντας τα παραπάνω, έστω η ΔΕ

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0$$

Έστω ότι μπορούμε να αναγνωρίσουμε μια συνάρτηση ψ τέτοια ώστε

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = M(x,y), \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} = N(x,y)$$

για την οποία η πεπλεγμένη μορφή $\psi(x,y) = c$ ορίζει την διαφορίσιμη ως προς x συνάρτηση $y = \varphi(x)$. Τότε

$$M(x,y) + N(x,y)y' = \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\psi[x,\varphi(x)]$$

και η ΔΕ γράφεται

$$\frac{d}{dx}\psi[x,\varphi(x)] = 0$$

Σε αυτή την περίπτωση η ΔΕ ονομάζεται πλήρης. Οι λύσεις της δίνονται σε πεπλεγμένη μορφή ως

$$\psi(x,y) = c$$

όπου c μία σταθερά.

Θεώρημα:

Έστω συναρτήσεις M, N, M_y και N_x (οι δείκτες συμβολίζουν μερικές παραγώγους) οι οποίες είναι συνεχείς στην ορθογώνια περιοχή R:α<x< β, γ<y< δ. Τότε η ΔΕ

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0 \qquad \text{(εξ. 1)}$$

Είναι πλήρης στη R αν και μόνο αν

$$M_y(x,y) = N_x(x,y) \qquad \text{(εξ. 2)}$$

σε κάθε σημείο της R.
Δηλαδή, υπάρχει μία συνάρτηση ψ που ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\psi_x = M(x,y),\ \psi_y = N(x,y) \qquad \text{(εξ. 3)}$$

αν και μόνο αν $M_y(x,y) = N_x(x,y)$.

Απόδειξη
Πρώτα θα δείξουμε ότι αν υπάρχει ψ τέτοια ώστε να ικανοποιούνται οι εξ. 3 τότε ικανοποιείται και η εξ. 2. Από τις εξ. 3 υπολογίζουμε τις M_y και N_x

$$M_y(x,y) = \psi_{xy}(x,y), \qquad N_x(x,y) = \psi_{yx}(x,y)$$

Αφού M_y και N_x είναι συνεχείς, και οι ψ_{xy} και ψ_{yx} είναι επίσης συνεχείς και επομένως η εξ. 2 ισχύει.
Στη συνέχεια δείχνουμε ότι αν τα M και N ικανοποιούν την εξ. 2 τότε η ΔΕ 1 είναι πλήρης. Η απόδειξη εμπλέκει την κατασκευή της συνάρτησης ψ που ικανοποιεί τις εξ. 3.
Έστω ψ τέτοια ώστε $\psi_x = M(x,y)$, τότε ολοκληρώνοντας ως προς x και κρατώντας σταθερό το y λαμβάνουμε

$$\psi(x,y) = \int M(x,y)dx + h(y) \qquad \text{(εξ. 4)}$$

Η συνάρτηση h είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση του y που έχει το ρόλο της σταθεράς ολοκλήρωσης. Τώρα πρέπει να δείξουμε ότι αν ισχύει η εξ. , $M_y = N_x$, είναι πάντα δυνατό να διαλέξουμε h(y) τέτοια ώστε $\psi_y = N$. Παραγωγίζοντας το παραπάνω ολοκλήρωμα ως προς y:

$$\psi_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + h'(y) = \int M_y(x,y)dx + h'(y)$$

Θέτοντας $\psi_y = N$ και λύνοντας ως προς $h'(y)$ λαμβάνουμε

$$h'(y) = N(x,y) - \int M_y(x,y)dx \qquad \text{(εξ. 5)}$$

Για να υπολογίσουμε το $h(y)$ είναι απαραίτητο το δεξί μέρος της εξ. 5 να είναι συνάρτηση μόνο του y. Πράγματι παραγωγίζοντας το δεξί μέρος της εξ 5 ως προς x παίρνουμε

$$N_x(x,y) - M_y(x,y)$$

Το οποίο είναι 0 λόγω της εξ. 2. Άρα το δεξί μέρος της εξ. 5 δεν εξαρτάται από το x και με ολοκλήρωση ως προς y λαμβάνουμε το $h(y)$. Αντικαθιστώντας το $h(y)$ στην εξ. 4 παίρνουμε τη λύση των εξ. 3:

$$\psi(x,y) = \int M(x,y)dx + \int \left[N(x,y) - \int M_y(x,y)dx\right] dy$$

■

Η απόδειξη περιέχει τη μέθοδο υπολογισμού του ψ. Για να βρούμε την τελική λύση πρέπει να λύσουμε ως προς y, το οποίο δεν είναι πάντα εφικτό.

Παράδειγμα 1

Να λυθεί η ΔΕ

$$(y\cos x + 2x\, e^y) + (\sin x + x^2 e^y - 1)y' = 0$$

Παρατηρούμε ότι

$$M_y(x,y) = \cos x + 2x\, e^y = N_x(x,y)$$

Οπότε η ΔΕ είναι πλήρης, και επομένως υπάρχει ένα $\psi(x,y)$ τέτοιο ώστε

$$\psi_x(x,y) = M = y\cos x + 2x\, e^y$$
$$\psi_y(x,y) = N = \sin x + x^2 e^y - 1$$

Ολοκληρώνοντας την πρώτη ως προς x, παίρνουμε

$$\psi(x,y) = y\sin x + x^2\, e^y + h(y)$$

Την παραγωγίζουμε ως προς y και θέτουμε $\psi_y = N$

$$\psi_y(x,y) = \sin x + x^2\, e^y + h'(y) = \sin x + x^2\, e^y - 1$$

Οπότε $h'(y) = -1$ και $h(y) = -y$.
Η σταθερά ολοκλήρωσης μπορεί να παραληφθεί καθώς χρειαζόμαστε μια οποιαδήποτε λύση και όχι την γενικότερη δυνατή.
Αντικαθιστώντας την $h(y)$ παίρνουμε

$$\psi(x,y) = y\sin x + x^2\, e^y - y$$

Οπότε η λύση της ΔΕ δίδεται από την πεπλεγμένη μορφή

$$y\sin x + x^2\, e^y - y = c$$

Ολοκληρωτικοί παράγοντες.
Είναι δυνατόν να μετατρέψουμε μια μη πλήρη ΔΕ σε πλήρη, πολλαπλασιάζοντας την με έναν κατάλληλο ολοκληρωτικό παράγοντα, όπως είχαμε δει και στις γραμμικές ΔΕ.
Πολλαπλασιάζουμε την ΔΕ

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0$$

με μία συνάρτηση $\mu(x,y)$ τέτοια ώστε η ΔΕ που προκύπτει

$$\mu(x,y)M(x,y) + \mu(x,y)N(x,y)y' = 0$$

να είναι πλήρης. Σύμφωνα με το θεώρημα που είδαμε, η ΔΕ είναι πλήρης αν και μόνο αν

$(\mu\, M)_y = (\mu\, N)_x.$

Αφού τα M και N είναι γνωστές συναρτήσεις, η παραπάνω σχέση δηλώνει ότι ο ολοκληρωτικός παράγοντας μ πρέπει να ικανοποιεί την σχέση

$$M\mu_y + M_y\,\mu = \mu_x N + \mu\, N_x$$

$$M\mu_y - N\,\mu_x + \left(M_y - N_x\right)\mu = 0$$

η οποία είναι μια ΔΕ με μερικές παραγώγους, λύση της οποίας μας δίνει τον ολοκληρωτικό παράγοντα μ. Επίσης η λύση μπορεί να μην είναι μοναδική αλλά εμείς αρκούμαστε σε μία οποιαδήποτε από αυτές κατά προτίμηση την απλούστερη. Δυστυχώς η εύρεση του μ είναι εν γένει δύσκολη και καθίσταται χρήσιμη μόνο σε κάποιες ειδικές περιπτώσεις. Μία τέτοια ειδική περίπτωση είναι αυτή που το μ εξαρτάται μόνο από μία από τις μεταβλητές x ή y. Ας δούμε την περίπτωση που εξαρτάται μόνο από το x.

$$(\mu\, M)_y = \mu\, M_y,\;\; (\mu\, N)_x = \mu\, N_x + N\frac{d\mu}{dx}$$

Άρα αφού $(\mu\, M)_y = (\mu\, N)_x$ πρέπει

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N}\mu$$

Αν το $(M_y - N_x)/N$ εξαρτάται μόνο από το x, τότε η παραπάνω είναι μία γραμμική και διαχωρίσιμη ΔΕ της οποίας η λύση μπορεί να βρεθεί εύκολα και να μας δώσει τον ολοκληρωτικό παράγοντα μ(x). Αντίστοιχα μπορούμε να δουλέψουμε για να βρούμε το μ και για άλλες ειδικές περιπτώσεις, όπως για μ(y) ή για μ(xy).

Παράδειγμα 2

Δίδεται η ΔΕ

$$(3x\,y + y^2) + (x^2 + x\,y)y' = 0$$

Παρατηρούμε ότι δεν είναι πλήρης

$$M_y(x,y) = 3x + 2y, \quad N_x(x,y) = 2x + y$$

Δηλαδή $M_y \neq N_x$
Ας δούμε αν υπάρχει μ(x)

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{3x + 2y - (2x + y)}{x^2 + xy} = \frac{x + y}{x(x + y)} = \frac{1}{x}$$

Η οποία εξαρτάται μόνο από το x, επομένως υπάρχει μ(x) που ικανοποιεί την ΔΕ

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{\mu}{x}$$

Η λύση της οποίας είναι $\mu(x) = x$.
Πολλαπλασιάζοντας την αρχική ΔΕ με το x παίρνουμε

$$(3x^2\,y + xy^2) + (x^3 + x^2\,y)y' = 0$$

Η ΔΕ αυτή είναι πλήρης καθώς $M_y = N_x$

$$M_y(x,y) = 3x^2 + 2xy, \quad N_x(x,y) = 3x^2 + 2xy$$

Επομένως υπάρχει μία συνάρτηση ψ που ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\psi_x = M(x,y) = 3x^2\,y + xy^2, \qquad \psi_y = N(x,y) = x^3 + x^2\,y$$

$$\psi(x,y) = \int (3x^2\, y + xy^2)dx + h(y) = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + h(y)$$

$$\psi_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^3y + \frac{x^2y^2}{2}\right) + h'(y) = x^3 + x^2y + h'(y)$$

Επειδή $\psi_y = N$ και λύνοντας ως προς $h'(y)$ λαμβάνουμε

$$h'(y) = x^3 + x^2\, y - x^3 - x^2y = 0$$

$$h(y) = 0$$

$$\psi(x,y) = x^3y + \frac{x^2y^2}{2}$$

Οπότε η λύση της ΔΕ δίδεται από την πεπλεγμένη μορφή

$$x^3y + \frac{x^2y^2}{2} = c$$

η οποία είναι δευτεροβάθμια και μπορεί να λυθεί ως προς y.

4. ΎΠΑΡΞΗ ΚΑΙ ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΛΥΣΕΩΝ ΔΕ

Το ερώτημα είναι αν μια ΔΕ έχει λύση, ώστε να την βρούμε, και αν έχει και την εντοπίσουμε, είναι η μοναδική λύση ή μήπως υπάρχουν και άλλες;

Για την γραμμική ΔΕ πρώτης τάξης

Θεώρημα 1:

Έστω συναρτήσεις $p(t)$ και $g(t)$ συνεχείς σε ένα ανοικτό διάστημα $I{:}\alpha<t<\beta$ το οποίο περιέχει το σημείο $t=t_0$, τότε υπάρχει μια μοναδική συνάρτηση $y=\varphi(t)$ η οποία ικανοποιεί την εξίσωση

$y' + p(t)y = g(t)$

για κάθε t, στο I, και επίσης ικανοποιεί την αρχική συνθήκη

$y(t_0)=y_0$

οπού y_0 είναι μια αυθαίρετη αρχική τιμή

Απόδειξη:
Έχουμε δει ότι αν υπάρχει λύση
η ΔΕ αυτή έχει την μορφή

$$y = \frac{\int \mu(t)g(t)dt + c}{\mu(t)}$$

όπου $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$

Αφού η p είναι συνεχής στο διάστημα $\alpha<t<\beta$, η συνάρτηση μ θα ορίζεται και αυτή στο ίδιο διάστημα και μάλιστα θα είναι μη μηδενική, παραγωγίσιμη συνάρτηση. Πολλαπλασιάζοντας την ΔΕ με $\mu(t)$ παίρνουμε

$$[\mu(t)y]' = \mu(t)g(t)$$

Αφού οι μ και g είναι συνεχείς, η συνάρτηση $\mu \cdot g$ είναι ολοκληρώσιμη. Το ολοκλήρωμα της $\mu \cdot g$ είναι παραγωγίσημο, οπότε η y υπάρχει και είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση σε όλο το διάστημα $\alpha<t<\beta$. Αντικαθιστώντας το y στην ΔΕ μπορεί να επαληθεύσει κάνεις ότι η λύση αυτή ικανοποιεί την ΔΕ στο διάστημα $\alpha<t<\beta$. Επίσης η αρχική συνθήκη προσδιορίζει μια μοναδική τιμή για την σταθερά c. Επομένως η λύση είναι μοναδική. ■

Ο ολοκληρωτικός παράγοντας μ(t) προσδιορίζεται μέσω μιας ολοκληρωτικής σταθεράς που εξαρτάται από το κάτω όριο του ολοκληρώματος (είχαμε θέσει την σταθερά αυθαίρετα $k=0$)

$$\mu(t) = e^{\int_{t_0}^{t} p(s)ds}$$

και η λύση γίνεται

$$y = \frac{\int_{t_0}^{t} \mu(s)g(s)ds + c}{\mu(t)}$$

τότε για να ικανοποιείται η αρχική συνθήκη πρέπει να ισχύει $c=y_0$

$$y = \frac{\int_{t_0}^{t} \mu(s)g(s)ds + y_0}{\mu(t)}$$

<u>*Παράδειγμα* 1</u>

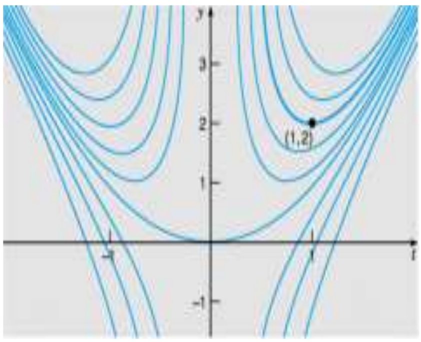
Σε προηγούμενο παράδειγμα είχαμε λύσει τη ΔΕ

$ty' + 2y = 4t^2$

με y(1)=2

που είναι γραμμική ΔΕ

$y' + (2/t)y = 4t$



με $p(t)=2/t$, $g(t)=4t$

Η g(t) είναι συνεχής για όλα τα t, όμως η p(t) είναι συνεχής στα διαστήματα t<0 και t>0. Το διάστημα t>0 περιλαμβάνει την αρχική τιμή t=1, Οπότε το θεώρημα 1 εξασφαλίζει μία μοναδική λύση στο διάστημα 0<t<∞.

Είχαμε βρει την λύση

$y = t^2 + \frac{1}{t^2}$ με t>0

Αν η αρχική τιμή ήταν η y(-1)=2. Τότε το θεώρημα 1 θα εξασφάλιζε την ίδια λύση αλλά για ώρα στο διάστημα $-\infty<t<0$. ■

Για την μη γραμμική ΔΕ πρώτης τάξης

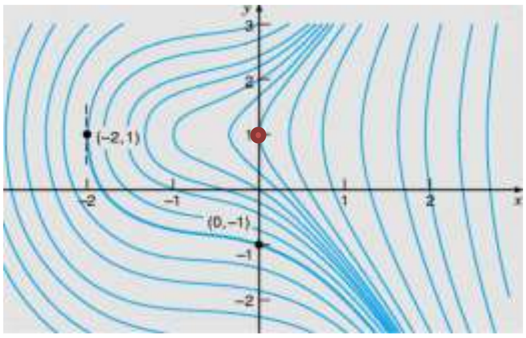
Θεώρημα 2

Έστω συναρτήσεις $f(t,y)$ και $\partial f(t,y)/\partial y$ συνεχείς σε μια ορθογώνια περιοχή $\alpha<t<\beta$, $\gamma<y<\delta$ η οποία περιέχει το σημείο (t_0,y_0), τότε σε ένα διάστημα $t_0-h < t < t_0+h$ που περιέχεται στο $\alpha < t < \beta$ υπάρχει μια μοναδική συνάρτηση $y=\varphi(t)$ η οποία ικανοποιεί την εξίσωση $y'=f(t,y)$ και την αρχική συνθήκη $y(t_0)=y_0$.■

Αν η συνάρτηση $f(t,y)=-p(t)y+g(t)$ τότε $\partial f(t,y)/\partial y=-p(t)$ και το θεώρημα μεταπίπτει στην ειδική περίπτωση των γραμμικών ΔΕ πρώτης τάξης. Όπου η συνέχεια των συναρτήσεων f και $\partial f/\partial y$ αντικαθείσταται απο την συνέχεια των p και g όπως είδαμε πριν. Η απόδειξη του αντίστοιχου θεωρήματος για την γραμμική περίπτωση βασίστηκε στην ύπαρξη μιας αναλυτικής έκφρασης η οποία στην γενική μη γραμμική περίπτωση δεν είναι διαθέσιμη οπότε η απόδειξη είναι πιο δύσκολη.

Η συνέχεια των f και $\partial f/\partial y$ ειναι ικανή αλλα όχι ανακαια συνθηκη για την υπαρξη μιας μοναδικής λύσης. Δηλαδή μπορεί να υπάρχει μοναδική λύση και με πιο ασθενείς προϋποθέσεις. Η ύπαρξη της λύσης εξασφαλίζεται από τη συνέχεια της f μόνο, αλλά όχι η μοναδικότητα.

<u>*Παράδειγμα* 2</u>



Εφαρμόζουμε το θεώρημα 2 για την ΔΕ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)}$$

με y(0)=1

Ισχύει

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}\right) = -\frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)^2}$$

που δεν είναι συνεχής για y=1, άρα δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος, και δεν εξασφαλίζεται η μοναδικότητα της λύσης.

Πράγματι λύνοντας με μέθοδο χωριζομένων μεταβλητών παίρνουμε

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + c$$

Για y(0)=1, c=-1

Προσθέτοντας και στα 2 μέλη +1 το αριστερό μέρος γίνεται τέλειο τετράγωνο

$$(y-1)^2 = x^3 + 2x^2 + 2x$$

Η τελική λύση είναι διπλή

$$y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x}$$

Και οι 2 λύσεις επαληθεύουν την αρχική συνθήκη

Επανάληψη

Κατηγορίες ΔΕ πρώτης τάξης:

Κατηγορία	**Μορφή**	**Τρόπος λύσης**
Γραμμικές	$y' + p(t)y = g(t)$	Ολοκληρωτικός παράγοντας: $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$ που δίνει (μy)'=μg
Χωριζόμενων μεταβλητών	$M(x) + N(y)y' = 0$	Απευθείας ολοκλήρωση
Ομογενείς	$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$	μετασχηματισμός y=ux και ανάγεται σε Χωριζόμενων μεταβλητών
Bernoulli	$y' + p(t)y = q(t)y^n$	μετασχηματισμός u=y^{1-n} και ανάγεται σε γραμμική
Πλήρεις	$M(x,y) + N(x,y)y' = 0$ με $M_y = N_x$	Υπάρχει ψ: $\psi_x = M(x,y), \psi_y = N(x,y)$ Λύση: $\psi(x,y) = c$
Ανάγονται σε πλήρεις με ΟΠ μ(x)	$M(x,y) + N(x,y)y' = 0$ με $M_y \neq N_x$	υπαρχει μ(x) $αν$ $\frac{M_y - N_x}{N}$ εξαρτάται μόνο από x

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Βρείτε τη λύση της ΔΕ

$ty' + 2y = \mathrm{sin}t$

με y(π/2)=1

Λύση:

$y' + (2/t)y = \dfrac{\mathrm{sin}t}{t}$

p(t)=2/t, g(t)= $\frac{\mathrm{sin}t}{t}$

ΟΠ: $\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t}dt} = e^{2\ln|t|} = t^2$

Αντικαθιστούμε στην ΔΕ:

$t^2y' + 2ty = t\mathrm{sin}t$

$(t^2y)' = t\mathrm{sin}t$

Ολοκληρώνουμε (το tsint κατά παράγοντες):

$$\int t\sin t\,dt = -\int t(\cos t)'dt = -t\cos t + \int \cos t\,dt = -t\cos t + \sin t + c$$

$t^2y = -t\cos t + \sin t + c$

Για y(π/2)=1, $c = \frac{\pi^2}{4} - 1$

$y = t^{-2}(\dfrac{\pi^2}{4} - 1 - t\cos t + \sin t)$

Άσκηση 2

Βρείτε τη λύση της ΔΕ

$y' = 2y^2 + xy^2$

με y(0)=1

Λύση:

$y' = y^2(2 + x)$

$\frac{y'}{y^2} = (2 + x)$

$-\frac{1}{y} = 2x + \frac{x^2}{2} + c$

Για y(0)=1, c=-1

$y = -\frac{1}{2x + \frac{x^2}{2} - 1}$

Άσκηση 3

Βρείτε τη λύση της ΔΕ

$$y' = \frac{x^2 + 3xy + y^2}{x^2}$$

με y(1)=0

Λύση:

Διαιρώ αριθμητή και παρανομαστή στο δεξί μέρος με x^2

$$\frac{1 + \frac{3y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1}$$

Είναι ομογενής και αντικαθιστώ τον μετασχηματισμό y=ux

$$y' = (ux)' = u'x + u$$

$$u'x + u = 1 + 3u + u^2$$

Λύνουμε τη ΔΕ ως προς u(x)

$$u' = \frac{1 + 2u + u^2}{x}$$

Μέθοδος χωριζομένων μεταβλητών

$$\frac{u'}{1 + 2u + u^2} = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{u'}{1 + 2u + u^2} dx = \int \frac{1}{x} dx$$

Λύνουμε το ολοκήρωμα

$$\int \frac{1}{1 + 2u + u^2} du = \int \frac{1}{(1 + u)^2} du = -\frac{1}{1 + u}$$

Η λύση της ΔΕ για x>0 είναι

$$-\frac{1}{1 + u} = \ln x + c$$

$$u = -\frac{\ln x + c + 1}{\ln x + c}$$

Επειδή u=y/x

$$y = -\frac{x(\ln x + c + 1)}{\ln x + c}$$

Για y(1)=0

$$0 = -\frac{1(0 + c + 1)}{0 + c} = -\frac{c + 1}{c} \Rightarrow c = -1$$

Τελική λύση

$$y = -\frac{x \ln x}{\ln x - 1}$$

Άσκηση 4

Βρείτε τη λύση της ΔΕ

$t^2y' + 2ty - y^3 = 0$

Όπου t>0

Λύση:

Διαιρούμε με t^2

$y' + 2t^{-1}y = t^{-2}y^3$

Είναι Bernoulli $y' + p(t)y = q(t)y^n$

με n=3, $p(t)=2t^{-1}$ και $q(t)=t^{-2}$

Λύνεται με το μετασχηματισμό $v=y^{1-n}=y^{-2}$

$\frac{dv}{dt} = -2y^{-3}\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}y^3\frac{dv}{dt}$

$-\frac{1}{2}y^3\frac{dv}{dt} + 2t^{-1}y = t^{-2}y^3$

$\frac{dv}{dt} - 4t^{-1}y^{-2} = -2t^{-2}$

$v=y^{1-n}=y^{-2}$

$\frac{dv}{dt} - 4t^{-1}v = -2t^{-2}$

Γραμμική ΔΕ, ΟΠ $\mu(t) = e^{\int(-4t^{-1})dt} = e^{-4\ln t} = t^{-4}$

$\frac{d(t^{-4}v)}{dt} = -2t^{-6}$

$t^{-4}v = \frac{2}{5}t^{-5} + c$

$v = \frac{2}{5}t^{-1} + ct^4 = \frac{2 + 5ct^5}{5t}$

$y = \pm\sqrt{\frac{5t}{2 + 5ct^5}}$