Πίνακες – Ορίζουσες

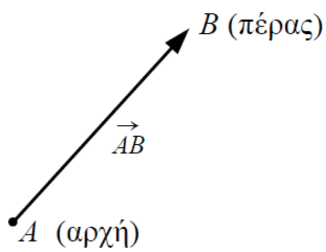
Μία φυσική ποσότητα μπορεί να αναπαρίσταται στη απλούστερη περίπτωση από ένα **βαθμωτό μέγεθος**, δηλαδή 1 πραγματικό αριθμό, για παράδειγμα: Θερμοκρασία, συγκέντρωση, μάζα.

Κάποιες όμως φυσικές ποσότητες απαιτούν περισσότερη πληροφορία και αναπαρίστανται από **διανυσματικά μεγέθη**: δηλαδή 1 πραγματικό αριθμό (μέτρο) και 1 κατεύθυνση, Παραδείγματα : ταχύτητα, επιτάχυνση, δύναμη.

Γεωμετρική σημασία διανύσματος: κατευθυνόμενο ευθύγραμμο τμήμα

Ορισμοί

Αρχή Α, πέρας Β, σύμβολο $\overrightarrow{AB}$



Μέτρο διανύσματος (απόσταση των άκρων) $|\overrightarrow{AB}|$

Δάνυσμα στο επίπεδο (α,β)

Διάνυσμα στο χώρο (α,β,γ)

Διάνυσμα σε χώρο n διαστάσεων (α_1, α_2, …,α_i , …, α_n)

Ο δείκτης i απαριθμεί το αντίστοιχο στοιχείο του διανύσματος (λίστας)

Πίνακας: ορθογώνια διάταξη αριθμών που αποτελείται από γραμμές και στήλες.

Παράδειγμα: Αριθμός διαδρομών από / προς αεροδρόμια

Αναχωρήσεις / Αφίξεις	Προς Αθήνα	Προς Ρώμη	Προς Λονδίνο	Προς Παρίσι
Από Αθήνα	0	3	4	1
Από Ρώμη	4	0	6	2
Από Λονδίνο	4	6	0	2
Από Παρίσι	5	7	7	0

$$A=\begin{bmatrix}0&3&4&1\\4&0&6&2\\4&6&0&2\\5&7&7&0\end{bmatrix}$$

Γενικά

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1j}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2j}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{ij}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mj}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$$

Ο πίνακας έχει ***m*** γραμμές και ***n*** στήλες

Στοιχεία πίνακα $a_{ij}\ (1\le i\le m, 1\le j\le n)$

Το ***i*** είναι ο δείκτης της γραμμής και το ***j*** ο δείκτης της στήλης

Μηδενικός είναι ο πίνακας που όλα τα στοιχεία του είναι μηδέν. $=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$

Αντίθετος του πίνακα Α είναι ο πίνακας Β=-Α που έχει όλα τα στοιχεία του αντίθετα δηλαδή $b_{ij}=-a_{ij}$

$$A=\begin{bmatrix}1&3\\2&4\\-1&0\end{bmatrix}, B=-A=\begin{bmatrix}-1&-3\\-2&-4\\1&0\end{bmatrix}$$

Τετραγωνικός λέγεται ο πίνακας όταν ***m=n***

$$A=\begin{bmatrix}1&3&-2\\3&-1&0\\-2&0&7\end{bmatrix}$$

Διαγώνιος τετραγωνικού πίνακα είναι τα στοιχεία a_{ij} για $i=j$. Πχ στον

$A=\begin{bmatrix}1&3&-2\\3&-1&0\\-2&0&7\end{bmatrix}$ τα στοιχεία 1, -1, 7

Διαγώνιος πίνακας είναι τετραγωνικός πίνακας που τα $a_{ij}=0$ για $i\ne j$, δηλαδή τα στοιχεία εκτός της διαγωνίου είναι μηδενικά. $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&7\end{bmatrix}$

Μοναδιαίος πίνακας διάστασης n, είναι ο διαγώνιος πίνακας με μονάδες στη διαγώνιο (και μηδενικά εκτός) $\mathbf{I_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ανάστροφος (**transpose**) ενός οποιουδήποτε πίνακα **A**, m×n είναι ο πίνακας n×m, που συμβολίζεται $\mathbf{A^T}$ όπου οι γραμμές του A είναι στήλες του $\mathbf{A^T}$, δηλαδή το στοιχείο a_{ij} του A αντιστοιχεί στο στοιχείο a_{ji} του $\mathbf{A^T}$.

Παράδειγμα

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

Συμμετρικός πίνακας ονομάζεται ο τετραγωνικός πίνακας που είναι ίσος με τον ανάστροφό του, $A=A^T$, δηλαδή $a_{ij} = a_{ji}$. Τα συμμετρικά στοιχεία ως προς τη διαγώνιο είναι ίσα.

Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Δύο πίνακες $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ είναι **ίσοι** όταν είναι ίδιας διάστασης, δηλαδή ίδιο αριθμός στηλών και γραμμών και τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα ένα προς ένα. Δηλαδή

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \forall\, i,j$$

Πίνακας με μια γραμμή ή στήλη είναι διάνυσμα και λέγεται **διάνυσμα γραμμή ή στήλη**, αντίστοιχα.

Ένα διάνυσμα γραμμή γίνεται διάνυσμα στήλη αν πάρουμε το ανάστροφο.

Πχ. $\vec{u} = A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

Πράξεις πινάκων

Άθροισμα πινάκων A, B, ίδιας διάστασης m×n και στοιχεία a_{ij} και b_{ij}, είναι ο πίνακας m×n, Γ με στοιχεία c_{ij}, όπου, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall\, i,j$ και συμβολίζεται Γ=A+B.

Γινόμενο πραγματικού αριθμού λ με πίνακα A με στοιχεία a_{ij} είναι ο πίνακας Γ=λA με στοιχεία c_{ij}, όπου, $c_{ij} = \lambda a_{ij}$, και συμβολίζεται Γ=λB.

Διαφορά πινάκων A, B, ίδιας διάστασης m×n ορίζεται ως $A - B = A + (-B) = A + (-1)B$.

Παραδείγματα:

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

$A + B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 9 & -1 \end{bmatrix}$

$3A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 12 & 15 & -9 \end{bmatrix}$

$3A - 4B = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 12 & 15 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & 0 & 4 \\ 20 & -16 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -6 & 13 \\ 32 & -1 & -17 \end{bmatrix}$

Γινόμενο πινάκων

πωλήσεις	Προϊόν Α	Προϊόν Β	Προϊόν Γ
Υποκατάστημα #1	35	22	19
Υποκατάστημα #2	15	18	4
Υποκατάστημα #3	11	9	7
Υποκατάστημα #4	5	4	9

	Τιμή σε €
Προϊόν Α	3
Προϊόν Β	2
Προϊόν Γ	4

Θέλω ένα πίνακα με τις εισπράξεις σε € κάθε υποκαταστήματος

	εισπράξεις
Υποκατάστημα #1	35·3 + 22·2 + 19·4 = 225
Υποκατάστημα #2	15·3 + 18·2 + 4·4 = 117
Υποκατάστημα #3	11·3 +9·2+7·4 = 79
Υποκατάστημα #4	5·3 + 4·2+ 9·4 = 59

Γινόμενο πινάκων Α, διάστασης $m \times l$ και Β διάστασης $l \times n$, είναι πίνακας Γ διάστασης $m \times n$ τα στοιχεία του οποίου δίδονται από

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{il} b_{lj}$$

Αριθμός στηλών Α ίδιος με αριθμό γραμμών Β, l

$$\underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}} \cdot \underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} 1\cdot 2 + (-1)\cdot 5 + 0\cdot(-1) & 1\cdot 4 + (-1)\cdot 0 + 0\cdot 1 \\ 2\cdot 2 + 1\cdot 5 + 3\cdot(-1) & 2\cdot 4 + 1\cdot 0 + 3\cdot 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}$$

Το γινόμενο είναι πίνακας με αριθμό στηλών του δευτέρου πίνακα και αριθμό γραμμών του πρώτου.

$$A = \underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}}, B = \underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}, \varGamma = \underset{3\times 4}{\begin{bmatrix} 1.6 & 4.8 & 5.6 & 1.2 \\ -2 & 6.63 & 5.89 & 0 \\ 0 & 1.2 & 13 & 1 \end{bmatrix}}$$

Τα γινόμενα που μπορούν να οριστούν είναι τα $A \cdot B$ (2×2), $B \cdot A$ (3×3), $A \cdot \varGamma$ (2×4)

Δεν ορίζονται τα $B \cdot \varGamma$, $\varGamma \cdot B$, $\varGamma \cdot A$

Ιδιότητες πράξεων πινάκων

$A + B = B + A$ (αντιμεταθετική πρόσθεσης)

$A + (B + \varGamma) = (A + B) + \varGamma$ (προσαιτεριστική πρόσθεσης)

$A + \mathbf{0} = A$

$A - A = A + (-A) = \mathbf{0}$

$(\kappa + \lambda)A = \kappa A + \lambda A$

$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

$(\kappa \cdot \lambda)A = \kappa(\lambda A)$

$1A = A$

$0A = \mathbf{0}$

$\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$

$A(B\Gamma) = (AB)\Gamma$ (προσαιτεριστική πολλαπλασιασμού)

$A(B + \Gamma) = AB + A\Gamma$ (επιμεριστική)

$(B + \Gamma)A = BA + \Gamma A$

$A \cdot \mathbf{I}_{\boldsymbol{n}} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{m}}A = A$

Δεν ισχύει αντιμεταθετική πολλαπλασιαμού $AB \neq BA$

Όπως είδαμε πριν με τους A, B, Γ

$A \cdot B$, $B \cdot A$, $A \cdot \Gamma$ ορίζεται άλλα $\Gamma \cdot A$ όχι

$A \cdot B$, $B \cdot A$ ορίζονται αλλά δίνουν διαφορετικό αποτέλεσμα

Επίσης :

$(kA)^T = kA^T$

$(A + B)^T = A^T + B^T$

Έστω γ_{ij} τα στοιχεία του Γ=Α+Β Τότε $\gamma_{ij}^T = \gamma_{ji} = a_{ji} + \beta_{ji} = a_{ij}^T + \beta_{ij}^T$ Και άρα $\Gamma^T = (A + B)^T = A^T + B^T$

Έστω διανύσματα $\vec{u} = (1, -2, 1)$, $\vec{v} = (4, 0, 1)$

Εσωτερικό γινόμενο $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 5$

διανύσματα σε μορφή πινάκων, πίνακας γραμμή ή πίνακας στήλη: $A = [1 \quad -2 \quad 1]$, $B = [4 \quad 0 \quad 1]$

Πολλαπλασιασμός είναι εσωτερικό γινόμενο, αλλά πρέπει να τα φέρουμε στη σωστή μορφή.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = AB^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 4 + 0 + 1 = 5$$

Αντίστροφος πίνακα

Για τετραγωνικό πίνακα A διάστασης n, αν υπάρχει πίνακας B τέτοιος ώστε να ισχύει

$$AB = BA = \mathbf{I_n}$$

Τότε ο A ονομάζεται αντιστρέψιμος

Ο B ονομάζεται **αντίστροφος** του A, συμβολίζεται ως A^{-1}

Ο A^{-1} είναι πίνακας nxn, και είναι μοναδικός. (Αν B επίσης αντίστροφος, $AB = \mathbf{I} \Longrightarrow A^{-1}AB = A^{-1}\mathbf{I} \Longrightarrow B = A^{-1}$)

Θα δούμε πως υπολογίζεται παρακάτω.

Πόσο μεγάλος είναι ένας πίνακας; Κάποιες φορές χρειαζόμαστε να αναπαραστήσουμε έναν ολόκληρο πίνακα με πολλές τιμές με έναν μόνο αριθμό. Υπάρχουν διάφορες επιλογές.

Ίχνος τετράγωνου πίνακα A, tr(A) λέγεται το άθροισμα των στοιχείων της διαγωνίου

$$\boldsymbol{tr(A) = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \cdots \alpha_{nn} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}}$$

Πχ το ίχνος του $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$, είναι tr(A)=1+3+0=4

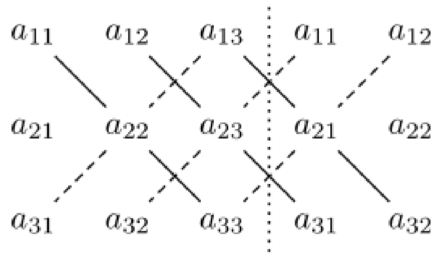
Ορίζουσα ενός πίνακα 2x2, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, είναι ο αριθμός $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Συμβολίζεται με $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, ή Det(A) ή |A|, και χαρακτηρίζεται ορίζουσα 2ης τάξης

Σε πίνακα 3x3 η ορίζουσα 3ης τάξης συμβολίζεται $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Υπολογίζεται με 2 τρόπους

Α Τρόπος. κανόνας του Sarrus



Παραθέτουμε τις 2 πρώτες στήλες δεξιά του πίνακα όπως στο σχήμα.

Η ορίζουσα είναι το άθροισμα των γινομένων των διαγώνιων με τις συνεχείς γραμμές, μείον το άθροισμα των γινομένων των διαγώνιων με τις διακεκομμένες γραμμές

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Β Τρόπος. Ανάπτυγμα σε υποορίζουσες 2x2, ως προς οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη

Ανάπτυγμα ως προς γραμμή i:

$$Det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k}|A_{ik}|$$

$|A_{ik}|$ είναι η 2x2 υποορίζουσα (ελάσσων ορίζουσα) εξαιρώντας τη γραμμή *i* και τη στήλη *j*.

Πχ $|A_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$\begin{array}{c|cc|} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$$

Πχ για να βρούμε την ορίζουσα $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ αναπτύσσουμε κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής i=1

$$1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$1(0+4) - 2(0-4) - 1(-2-3) = 4 + 8 + 5 = 17$$

Παράδειγμα 4x4:

$$det\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2(-1)^{1+1}det\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 2(-1)^{1+4}det\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2\times 4 - 2\times 2\times(8-2) = -16.$$

Ιδιότητες Οριζουσών

$\det(I_n) = 1$

$\det(A^T) = \det(A)$

$\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

$\det(AB) = \det(A)\det(B)$ για ίσης διάστασης τετράγωνους πίνακες

Αν όλα τα στοιχεία μιας στήλης ή γραμμής ενός πίνακα $n \times n$ πολλαπλασιαστούν με αριθμό c τότε η αντίστοιχη ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με c

$$\begin{vmatrix} a_{11} & c\,a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & c\,a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & c\,a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$\det(cA) = c^n \det(A)$, για $n \times n$ πίνακες

Αν όλα τα στοιχεία μιας στήλης ή μιας γραμμής ενός πίνακα $n \times n$ είναι 0 τότε η ορίζουσα του είναι 0

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Αν 2 στήλες ή 2 γραμμές ενός πίνακα $n \times n$ είναι ίδιες τότε η ορίζουσα του είναι 0

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{vmatrix} = 0$$

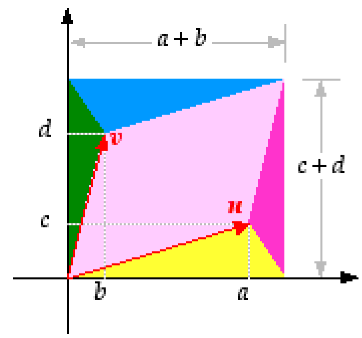
Αν ανταλλάξουμε 2 στήλες (ή γραμμές) ενός πίνακα $n \times n$ τότε η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με -1

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}$$

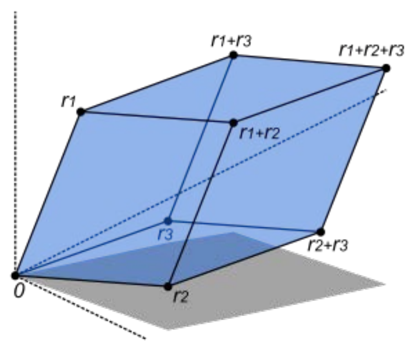
Γεωμετρική σημασία ορίζουσας

2x2:Ορίζουσα $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ είναι το εμβαδό του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν δυο διανύσματα με συντεταγμένες (a,c) και (b,d)

$(a + b)(c + d) - (a + b)c - b(c + d) = ad – bc$



3x3: Ορίζουσα $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ είναι ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που σχηματίζουν τρία διανύσματα με συντεταγμένες $(a, d, g), (b, e, f)$ και (c, f, i).



Βαθμός πίνακα (rank) ενός πίνακα A (όχι απαραίτητα τετραγωνικού) ονομάζεται η μέγιστη διάσταση του τετραγωνικού υποπίνακα που έχει μη μηδενική ορίζουσα.

Αν A≠0 αλλά όλες οι υποπορίζουσες είναι 0 τότε rank(A)=1

Αν υπάρχει υποορίζουσα τάξης k μη μηδενική αλλά δεν υπάρχει τάξης k+1 τότε ο βαθμός είναι k.

Αν η ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα n x n είναι μη μηδενική τότε ο βαθμός είναι n.

Ο τρόπος υπολογισμού είναι υπολογίζοντας ορίζουσες ξεκινώντας από την μεγαλύτερη τάξη προς τα κάτω μέχρι να βρεθεί μη μηδενική τιμή.

Η σημασία του είναι ο μέγιστος αριθμός γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων που ορίζονται από τις στήλες του.

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 7\big(-1 - (-4)\big) = 21 \neq 0$$

Αρα rank(A)=3

Εύρεση αντίστροφου πίνακα

Έστω τετράγωνος πίνακας nxn

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ορίζουμε ένα πίνακα B nxn

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Όπου το στοιχείο A_{ij} ονομάζεται **<u>αλγεβρικό συμπλήρωμα</u>** του στοιχείου a_{ij}, και δίδεται από τη σχέση

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\left|A_{ij}\right|$$

Όπου $\left|A_{ij}\right|$ η υποορίζουσα εξαιρώντας τη γραμμή i και τη στήλη j.

Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε τα αλγεβρικά συμπληρώματα, όλων των στοιχείων

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 1(-7) = -7$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -1 \cdot 7 = -7$$

$$A_{11} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1(5+4) = 9$$

Αντίστοιχα και για τα υπόλοιπα, οπότε ο πίνακας των αλγεβρικών συμπληρωμάτων είναι

$$B = \begin{bmatrix} -7 & -7 & 9 \\ -31 & 15 & 7 \\ -2 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

Ο αντίστροφος του τετράγωνου πίνακα A υπάρχει αν και μόνο αν η ορίζουσα $|A| \neq 0$, και δίδεται από τη σχέση

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}B^T = \frac{1}{|A|}\mathrm{adj}(A)$$

Όπου adj(A) είναι ο ανάστροφος του πίνακα των αλγεβρικών συμπληρωμάτων του A και ονομάζεται **<u>συνημμένος</u>** του A ή adjugate

Εφαρμογή

Να βρεθεί αν υπάρχει ο αντίστροφος του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Με τον κανόνα του Sarrus

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & +- & - & - \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}$$

$$Det(A) = 6 + 2 + 2 - 3 - 4 - 2 = 1 \neq 0$$

Άρα υπάρχει ο A^{-1}

Θα υπολογίσουμε τον πίνακα αλγεβρικών συμπληρωμάτων B για να βρούμε τον adj(A)

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

Υπολογίζουμε και τα υπόλοιπα στοιχεία οπότε ο B είναι

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο συνημμένος είναι ο ίδιος γιατί είναι συμμετρικός

$$adj(A) = B^T = B$$

Άρα ο αντίστροφος του A, είναι

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{adj}(A) = \frac{1}{1}B = B$$

Άσκηση για το σπίτι: Να βρεθεί, αν υπάρχει, ο αντίστροφος του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{7}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Λύση γραμμικών συστημάτων

Εξίσωση της μορφής

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

Ονομάζεται γραμμική, με n αγνώστους $x_1, x_2, \ldots, x_n$, συντελεστές $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, και σταθερό όρο b.

Ένα γραμμικό σύστημα με m εξισώσεις και n αγνώστους $x_1, x_2, \ldots, x_n$, μπορεί να γραφεί με μορφή πινάκων.

$$\left.\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$A \cdot X = B$$

Για m=n

$$A^{-1}A \cdot X = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

Κανόνας Cramer: Έστω σύστημα $A \cdot X = B$

Αν $|A| \neq 0$ το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \cdots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

Όπου $|A_i|$ η ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε τη στήλη i του πίνακα A με τον πίνακα στήλη B, των σταθερών όρων.

Αν $|A| = 0$ το σύστημα είναι αδύνατο ή αόριστο (άπειρο αριθμό λύσεων)

Για $B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, το σύστημα λέγεται **ομογενές**, και αν $|A| \neq 0$, έχει μόνο μία λύση τη μηδενική.

Παράδειγμα:

Να λυθεί το σύστημα

$$\left.\begin{array}{r} x - z = 1 \\ 2x + y - z = 1 \\ x + 2y + 5z = 2 \end{array}\right\}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 7, |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -7, |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{7}{4}, y = \frac{|A_2|}{|A|} = -\frac{7}{4}, z = \frac{|A_n|}{|A|} = \frac{3}{4}$$

Άσκηση για το σπίτι: Να λυθεί το σύστημα

x – y + z =2

3x+ y =1

2x+y+3z=0

Λύση

$$x = \frac{10}{13}\,, \quad y = -\frac{17}{13}\,, \quad z = -\frac{1}{13}$$