Μερος Β (Αρχη Μεγιστου)
(5 Ασκησεις)

Ασκηση 1

Εστω

$$\Delta u = 1 \quad , x \in B_R = \{|x|<R\}$$

Ισχυει η εκτιμηση

$$\sup_{\partial B_r} u \geq u(0) + \frac{r^2}{2n} \quad , 0<r\leq R$$

Να αποδειχθει κανοντας χρηση της Αρχης του Μεγιστου
(Υποδειξη: $W(x) = u(x) - \frac{|x|^2}{2n}$)

Ασκηση 2

Θεωρουμε το Π.Σ.Τ.

$$(\Pi.\Sigma.T.) \begin{cases} -u'' = e^u & , 0<x<L \\ u(0)=u(L)=0 \end{cases}$$

Δειξτε οτι αν L αρκετα μεγαλο $\nexists$ μη αρνητικη λυση

(Φυσικη Διαισθηση: η θερμοκρασια ($\frac{\partial u}{\partial t} = u_{xx} + e^u$ (*) εξισωση θερμοτητος)

- $u=0$ κρυο στο συνορο
- e^u πηγη θερμοτητος

Η υπαρξη μη αρνητικης λυσης για την (*) ανεξαρτητης του χρονου (σημειο ισορροπιας) σημαινει οτι οι δυο καταστασεις εξισορροπουν η μια την αλλη. Ανυπαρξια σημαινει οτι ~~πο~~ οταν το συνορο ειναι

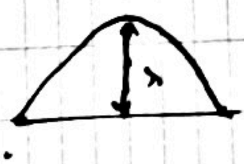
Θυμίζουμε και η πηγή θερμότητος υπερισχύει. ⟶ έκρηξη.

Ακολουθήστε τα παρακάτω βήματα:

1) $W = u + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ φιξαρισμένο,

① $\begin{cases} -W'' = e^{-\varepsilon} e^{W} & 0 < x < L \\ W(0) = W(L) = \varepsilon \end{cases}$

② $v_\lambda(x) := \lambda \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$, $\lambda > 0$, $0 < x < L$



Επιλέξτε L μεγάλο έτσι ώστε

③ $\frac{\pi^2}{L^2} s \le e^{-\varepsilon} e^{s}$, $s \geq 0$.

Δείξτε ότι

④ $\begin{cases} W'' + \frac{\pi^2}{L^2} W \le 0 & , 0 < x < L \\ W(0) = W(L) = \varepsilon \end{cases}$

2) Δείξτε ότι για $\lambda > 0$ μικρό

⑤ $v_\lambda(x) \le W(x)$, $0 < x < L$, $\lambda = \lambda(\varepsilon)$

3) Έστω

$$\lambda_0 = \sup\{\lambda \mid v_\lambda(x) \le W(x) , 0 \le x \le L\}$$

$\therefore \exists \; x_0$ τ.ω. $v_\lambda(x_0) = W(x_0)$

Θέτουμε $p(x) = v_{\lambda_0}(x) - w(x)$

Δείξτε ότι

$$\begin{cases} p'' + \frac{\pi^2}{L^2} p \geq 0 & , 0<x<L \\ p(x) \leq 0 & , 0<x<L \end{cases}$$

$\exists\ x_0$ τ.ω. $p(x_0) = 0$

$v_\lambda(0) = v_\lambda(L) = 0 < \varepsilon = w(0) = w(L)$

$\therefore$

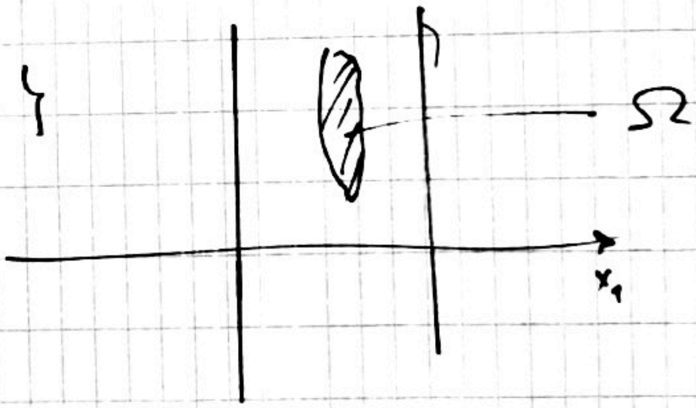
$p \equiv 0.$ $\cancel{\varnothing}$

#

Άσκηση 3 (Αρχή Μεγίστου για "στενά" χωρία)

Έστω $\bar{\Omega} \subset \{0 < x_1 < d\}$

$\bar{\Omega}$ συμπαγές, Ω ανοικτό



Έστω

$$\begin{cases} \Delta u + c(x) u \geq 0 & \text{στο } \Omega, \ u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}) \\ u \leq 0 & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

Δείξτε ότι

$\exists\ d_0 > 0$ που εξαρτάται από το $\|c^+\|_{L^\infty}$, τ.ω.

$d < d_0 \implies u < 0$ στο Ω ή $u \equiv 0$.

Βήμα 1

Αρκεί να δείξουμε ότι $u(x) \leq 0$ στο Ω (γιατί;)

Βήμα 2

Με εις άτοπον απαγωγή :

Έστω

(1) $\sup\limits_{x\in\Omega} u(x) > 0$.

Έστω $d << 1$ τ.ω.

(2) $c(x) \leq \frac{\pi^2}{d^2}$, $x\in\Omega$.

Θεωρούμε την $w(x) = \sin\left(\frac{\pi x_1}{d}\right)$

(3) $\Delta w + c(x) w \leq 0$, $\inf\limits_{\bar{\Omega}} w(x) > 0$

Βήμα 3

Δοθέντος $\lambda > 0$

(4) $w_\lambda(x) := \lambda w(x)$

$\exists$ $\lambda > 0$, $\lambda >> 1$

(5) $\lambda w(x) > u(x)$.

Βήμα 4

(6) $\lambda_0 := \inf\{\lambda : w_\lambda(x) > u(x), \forall x\in\Omega\}$

$\lambda_0 > 0$ (;)

(7) $\sigma(x) := u(x) - w_{\lambda_0}(x) \leq 0$ (;)

(8) $\Delta v + c(x) v \geq 0$ (;)

$\Rightarrow$

$v(x) < 0$ στο Ω (;).

Επίσης

$v(x) < 0$ στο $\partial\Omega$ (;).

Βήμα 5

$\exists$ $\varepsilon_0 > 0$ τ.ω.

(9) $v(x) < -\varepsilon_0, \quad x \in \overline{\Omega} \Longleftrightarrow$

(10) $u(x) + \varepsilon_0 < W_{\lambda_0}(x) \quad \forall x \in \overline{\Omega}$

$\cancel{\varnothing}$ Άτοπο! (;).

\#

Άσκηση 4

Άσκηση 8 σ. 367 Evans.

Άσκηση 5

Άσκηση 9 σ. 367 Evans.