Θεωρηματα Perron και Krein - Rutman
(Αποδειξη μεσω Δυναμικων Συστηματων)

Το Θεωρημα του Perron (1907)

Εστω $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i,j = 1, \dots, N$, $a_{ij} > 0$
(Θετικος Πινακας)

Τοτε ισχυουν τα ακολουθα

(i) Η φασματικη ακτινα ρ ειναι θετικη

$$\left(\rho(A) := \max \{ |\lambda| : \lambda \in \sigma(A) \} \right)$$

(ii) $\rho(A)$ ειναι απλη ιδιοτιμη

(Η διασταση των αντιστοιχων ιδιοχωρων ειναι ιση με μοναδ

(iii) Αν $\mu \neq \rho(A)$ ιδιοτιμη $\Rightarrow |\mu| < \rho(A)$

(iv) Το ιδιοδιανυσμα $v \longleftrightarrow \rho(A)$ μπορει να επιλ

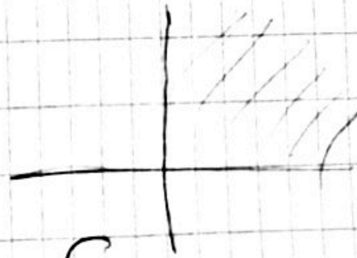
με θετικες συντεταγμενες, $v = (v_1, \dots, v_N)$, $v_i >$

(v) Το v ειναι μοναδικο θετικο ιδιοδιανυσμα μεχρι πολλαπλασιων.

#

Ορ (Κωνος)

Εστω C υποσυνολο X, Χωρος Banach (πραγματικος), με τις εξης ιδιοτητες:



(H_1) : $x \in C, -x \in C \Rightarrow x = 0$

(H_2) : $\alpha, \beta \in [0, \infty), x, y \in C \Rightarrow \alpha x + \beta y \in C$

Ορ

$P = \{ x \in \mathbb{R}^N \mid x_i \geq 0, i = 1, \dots, N \}$ = μη αρνητικα ιδιοδιανυσματα.

Παρατηρηση

Εστω $x \neq 0$, $x \in P$, και A θετικος πινακας, τοτε $Ax \in \operatorname{int} P$ (εσωτερικο).

Ορ

Εστω $C \subset X$, κλειστος κωνος, $\operatorname{int} C \neq \emptyset$

$T : X \to X$ γραμμικος τελεστης.

T λεγεται θετικος ως προς τον C αν ισχυει

(H_3) : $T(C \setminus \{0\}) \subset \operatorname{int} C$.

Παρατηρηση

Το Θεωρημα του Perron ισχυει στο πιο γενικο πλαισιο ενος πραγματικου X, $\dim X < \infty$, και για τελεστη T που ικανοποιει την (H_3), διοτι τα μονα στοιχεια που χρειαζονται στην αποδειξη ειναι η συμπαγεια της σφαιρας στο $\mathbb{R}^N$ και η θετικοτητα του A.

Το 1948 οι Krein και Rutman επεξετειναν την αποδειξη για T συμπαγη και $\dim X = \infty$:

Θεωρημα (Krein–Rutman, 1948)

Εστω $C \subset X$ = πραγματικος χωρος Banach, C κυρτος κωνος με $\operatorname{int} C \neq \emptyset$, $T: X \to X$ συμπαγης. Εστω οτι ικανοποιειται η (H_3). Τοτε ισχυουν τα ακολουθα:

(i) η φασματικη ακτινα $\rho(T)$ ειναι θετικη

(ii) $\rho(T)$ απλη ιδιοτιμη του T

(iii) Αν $\mu \neq \rho(T)$ ιδιοτιμη $\Longrightarrow |\mu| < \rho(T)$

(iv) Το ιδιοδιανυσμα $v \longleftrightarrow \rho(T)$ μπορει να επιλεγει εντος του $\operatorname{int} C$

(v) v ειναι το μοναδικο ιδιοδιανυσμα του T (μεχρι πολλαπλασιασμου) στο C.