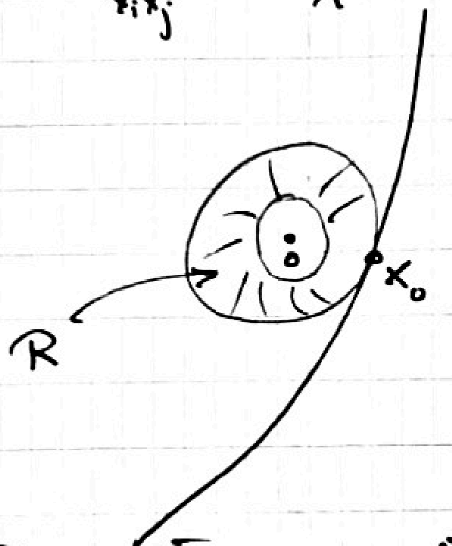
Ιδεα της Αποδειξης (Λημμα Hopf) 1925

$L = -a^{ij} u_{x_i x_j} + b^i u_{x_i}$

(i) $Lu \le 0$, $x \in U$

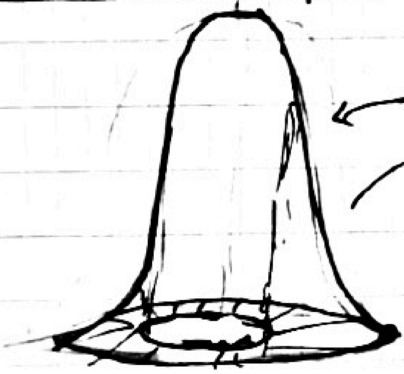
(ii) $u(x_0) > u(x)$, $x \in U$



Τετριμμενα: $\frac{\partial u(x_0)}{\partial \nu} \ge 0$

Συμπερασμα : $\frac{\partial u(x_0)}{\partial \nu} > 0$ (*)

Βοηθητικη Συναρτηση v



$\partial^- R$ $\partial^+ R$

$\frac{r}{2} \le \rho \le r$

$-Lv \ge 0$

v: κυρτη στο R , ακτινικη, $v = 0$ στο εξ. $\partial^+ R$ (1)

$\frac{\partial v}{\partial \rho} < 0$ στο $\partial^+ R$ ($\Rightarrow \frac{\partial v(x_0)}{\partial \nu} < 0$) (2)

(3)

$u(x) + \varepsilon v(x) - u(x_0)$: ≤ 0 στο $\partial^+ R$ (προφανες) ; ≤ 0 στο $\partial^- R$

$-Lv \ge 0$ στο R

$\Rightarrow -L(u + \varepsilon v) \ge 0$, στο R $\Rightarrow -L(u + \varepsilon v - u(x_0)) \ge 0$ ($c \equiv 0$)

(Ασθενης) Αρχη Μεγιστου $\Rightarrow u + \varepsilon v - u(x_0) \le 0$ στο R.

$$u + \varepsilon v - u(x_0)\Big|_{x = x_0} = 0$$

Τετριμμενα (3) $\Rightarrow$ $\frac{\partial}{\partial \nu}\left(u + \varepsilon v - u(x_0)\right)\Big|_{x = x_0} \ge 0$, διοτι $\nu \perp \partial R$ στο x_0

(2) $\Rightarrow$ $\frac{\partial u(x_0)}{\partial \nu} > 0$