$\Longleftrightarrow$

$$u = L_\gamma^{-1}(\gamma u + f)$$

$\Leftrightarrow$

$$u - Ku = h \quad , \quad Ku := \gamma L_\gamma^{-1} u$$
$$h := L_\gamma^{-1} f$$

3. • $K : L^2(U) \to L^2(U)$, φραγμένος, συμπαγ

Από (7)(ii), σ 116

$$\beta \|u\|^2_{H_0^1(U)} \leq B_\gamma[u,u] = (g,u)$$
$$\overset{CS}{\leq} \|g\|_{L^2(U)} \|u\|_{L^2(U)}$$
$$\leq \|g\|_{L^2(U)} \|u\|_{H_0^1(U)}$$

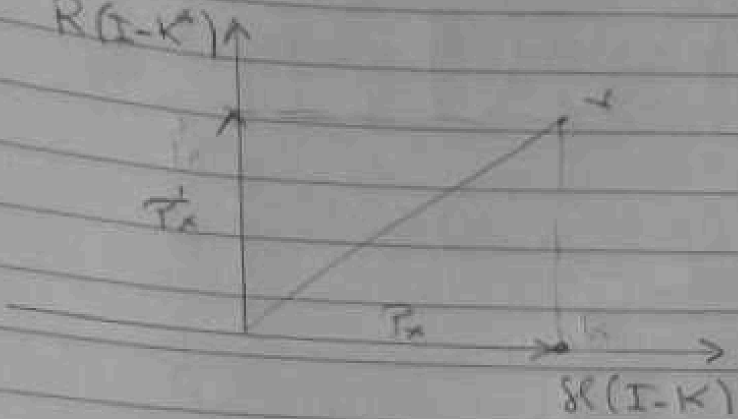
$\Rightarrow$

$$\|Kg\|_{H_0^1(U)} \leq C \|g\|_{L^2(U)}$$

$$H_0^1(U) \subset\subset L^2(U)$$

Διάλεξη 19 – Μέθοδος Fredholm (Fredholm Alternative)

H = Χώρος Hilbert, $K: H \to H$ συμπαγής



$\mathcal{N}$ = null space

$\mathcal{N}(I-K) = \{x \in H \mid (I-K)x = 0\}$

$$H = \mathcal{N}(I-K) \oplus R(I-K^*) \quad , \quad \mathcal{N}(I-K)^{\perp} = R(I-K)$$

ορθογώνιο συμπλήρωμα

Θεώρημα

$\dim \mathcal{N}(I-K) < \infty$ (1)

$R(I-K)$ κλειστό (2)

$R(I-K) = \mathcal{N}(I-K^*)^{\perp}$ (3)

$\mathcal{N}(I-K) = \{0\} \Leftrightarrow R(I-K) = H$ (4)

$\dim \mathcal{N}(I-K) = \dim \mathcal{N}(I-K^*)$ (5)

Απόδειξη

(1) Με εις άτοπον απαγωγή:

Έστω $\dim \mathcal{N}(I-K) = +\infty$

Gram-Schmidt $\Rightarrow \exists$ ορθοκανονικό σύνολο $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{N}(I-K)$

$$K u_n = u_n \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$\|u_n - u_m\|^2 = (u_n - u_m, u_n - u_m) = \|u_n\|^2 + \|u_m\|^2 - 2\,\cancel{(u_n, u_m)}^{\,0} = 2$$

$$\|K(u_n - u_m)\|^2 = \|u_n - u_m\|^2 = 2 \Rightarrow \{K u_m\}$$ δεν είναι σχετικά συμπαγές σύνολο (δεν περιέχει συγκλίνουσα υπακολουθία).

(3) • $\|u-Ku\| \geq \gamma \|u\|$, $u \in \mathcal{N}(I-K)^{\perp}$ (*)

Αυτή η εκτίμηση αρκεί για την απόδειξη της (2) διότι:

$P \hookrightarrow$ προβολή στο $\mathcal{N}(I-K)$ (κλειστό)

$P^{\perp} \hookrightarrow$ —"— $\mathcal{N}^{\perp}(I-K)$ (—"—) $\mathcal{N} \oplus \mathcal{N}^{\perp} = H$

$$v_n = (I-K)u_n = (I-K)\left[Pu_n + P^{\perp}u_n\right] = (I-K)P^{\perp}u_n$$

$\downarrow$

v (εξ υποθέσεως)

(*) $\Rightarrow \left\|\left[(I-K)P^{\perp}\right]^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\gamma}$

$\therefore \left[(I-K)P^{\perp}\right]^{-1} v_n = u_n$

$\downarrow$

$\left[(I-K)P^{\perp}\right]^{-1} v$

$\therefore u_n \longrightarrow \left[(I-K)P^{\perp}\right]^{-1} v =: u$

$\Rightarrow (I-K)P^{\perp}u = v$

Απόδειξη της (*)

Με την άτοπο απαγωγή:

$\boxed{\exists \{u_k\} \subset \mathcal{N}(I-K)^{\perp}}$, $\|u_k - Ku_k\| < \frac{1}{k}\|u_k\|$

$\left(\hat{u}_k := \frac{u_k}{\|u_k\|} \Rightarrow \|\hat{u}_k - K\hat{u}_k\| < \frac{1}{k}\right.$, άρα Χ.Β.Γ.

υποθέταμε $\|u_k\|=1$, και

(1) $\Rightarrow$ $\|u_k - Ku_k\| < \frac{1}{k} \longrightarrow 0$

(2) $\Rightarrow$ $u_k - Ku_k \longrightarrow 0$

$\|u_k\|=1 \Rightarrow \{u_k\}$ ασθενώς συμπαγής

Για υπακολουθία

$(3)_1$ $u_{k_n} \xrightarrow{w} u$

K συμπαγής $\Rightarrow$

$(3)_2$ $Ku_{k_n} \longrightarrow Ku$

(2), (3) $\Rightarrow$

$(4)_1$ $u - Ku = 0$

$(4)_2$ $u_{k_n} = Ku_{k_n} \longrightarrow Ku = u$ $(\Rightarrow \|u\|=1$!

(5) $u \in \mathcal{N}(I-K)$.

$\{u_k\} \subset \mathcal{N}(I-K)^{\perp} \Rightarrow$

(6) $(u_{k_n}, u) = 0$

$\big\downarrow (3)_1$

$(u,u) = 0$ ⊘

③ $\forall\ A \in \mathcal{L}(H,H)$ ισχύει $\overline{R(A)} = \mathcal{N}(A^*)^{\perp}$

$\Rightarrow$ ✓

(4) Έστω $\mathcal{N}(I-K) = 0$, και έστω με το άτοπον

(7) $H_1 = (I-K)(H) \subsetneq H$

(H_1 κλειστό από (3)). Επίσης $I-K$ 1-1)

$\Rightarrow$

(8) $(I-K)H_1 = (I-K)^2(H) \subsetneq (I-K)(H) \subsetneq H$

$$(I-K)^2(H) = H_2$$

(διότι αν $(I-K)^2(H) = (I-K)(H)$

$\Rightarrow (I-K)^{-1}(I-K)^2(H) = (I-K)^{-1}(I-K)(H)$

$\Rightarrow (I-K)(H) = H$ ⊗)

$H_k := (I-K)^k(H)$, $H_{k+1} \subsetneq H_k$

$H_{k+1} \oplus H_{k+1}^{\perp(H_k)} = H_k$ (Ορθογώνιο συμπλήρωμα του H_{k+1} εντός του H_k)

Επιλέγουμε $u_k \in H_{k+1}^{\perp(H_k)}$, $\|u_k\| = 1$

Έχουμε
(9) $Ku_k - Ku_\ell = -(u_k - Ku_k) + (u_\ell - Ku_\ell) + (u_k - u_\ell)$

Έστω $k > \ell$, $H_{k+1} \subsetneq H_k \subsetneq H_{\ell+1} \subsetneq H_\ell$

$(I-K)u_k \in H_{k+1} \subset H_{\ell+1}$

$(I-K)u_\ell \in H_{\ell+1}$

$u_k \in H_k \subset H_{\ell+1}$

$u_\ell \in H_{\ell+1}^{\perp}$, $\|u_\ell\|=1$

$\overset{(4)}{\Longrightarrow}$ $\|Ku_k - Ku_\ell\| \geq 1$, $\otimes$ συμπάγεια K

(5) Έστω $R(I-K)=H$

$\overset{(3)}{\Longrightarrow}$

$$\mathcal{N}(I-K^*)^{\perp} = H$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathcal{N}(I-K^*) = \{0\}$$

Από $(4)_{(i)}$ $\Rightarrow$ $(I-K^*)(H)=H$

δηλ $R(I-K^*) = H$

$$\Leftrightarrow \quad (R(I-K^*))^{\perp} = \{0\},$$

Εφαρμόζουμε (3) στο K^* $\Rightarrow$ $\mathcal{N}(I-K) =$

(5) Κατοικον.

Πόρισμα (Εναλλακτική Αρχή του Fredholm)

(α) $\forall f \in H$, η εξίσωση $u - Ku = f$ έχει μοναδική λ

ή

(β) Η ομογενής εξίσωση $u - Ku = 0$ έχει μη τετριμμένη λ

$$\left(\mathcal{N}(I-K) = \{0\} \Leftrightarrow R(I-K) = H \right)$$

(4)

Επίσης στην περίπτωση του (β) η εξίσωση έχει λύση αν και μόνο αν $f \in [\mathcal{N}(I-K^*)]^\perp$ (2)

#

Εφαρμογή στην επιλυσιμότητα της $Lu=f$

Θεώρημα II ύπαρξη της $Lu=f$

Ο τυπικός συζυγής L^* (formal adjoint)

Θεωρούμε την μορφή της $L = -\frac{\partial}{\partial x_i}(a^{ij}u_{x_j}) + b^i u_{x_i} +$

(σ 104, Διάλεξη 17)

u, v με συμπαγή φορέα.

$$\int_U Lu\, v = \int_U \left[-(a^{ij}u_{x_j})_{x_i} + b^i u_{x_i} + cu\right] v \, dx$$

$$= \int_U \left\{ a^{ij}u_{x_j} v_{x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}(b^i u) v - \left(\frac{\partial}{\partial x_i} b^i\right) uv + cuv \right.$$

$$= \int_U \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(a^{ij}v_{x_i})u\right] - \left(\frac{\partial}{\partial x_j}(a^{ij}v_{x_i})\right) u \right.$$

$$\left. - b^i v_{x_i} u + \left(c - \frac{\partial}{\partial x_i} b^i\right) v u \right\} dx$$

$$= \int_U \left[-(a^{ij}v_{x_i})_{x_j} - b^i v_{x_i} + \left(c - \frac{\partial}{\partial x_i} b^i\right) v \right]$$

$$=: \int (L^* v) u \, dx =: B^*[v,u].$$

Ορισμός Συζυγούς Προβλήματος

$v \in H_0^1(U)$ ασθενής λύση του συζυγούς

$$\begin{cases} L^* v = f, & \text{στο } U \\ v = 0, & \text{στο } \partial U \end{cases} \qquad f \in L^2$$

αν

$$B^*[v,u] = \langle f,u \rangle \quad \forall \; u \in H_0^1$$

Θεώρημα Ύπαρξης II

Έχουμε την εξής διχοτομία:

ή για το ΠΣΤ

$$(\alpha) \begin{cases} Lu = f, & \text{στο } U \\ u = 0, & \text{στο } \partial U \end{cases}$$

$\exists !$ λύση $\forall \; f \in L^2$

ή $\exists \; u \neq 0$

$$(\beta) \begin{cases} Lu = 0, & \text{στο } U \\ u = 0, & \text{στο } \partial U \end{cases}$$

και μη

Στην (β) περίπτωση

$$\dim \mathcal{N}(L) = \dim \mathcal{N}(L^*) < \infty$$

Τέλος το (α) έχει λύση [illegible] f.

$$\Leftrightarrow \quad (f, v) = 0 \quad \forall\, v \in \mathcal{N}(L^*)$$

δηλ. $f \perp^{L^2} \mathcal{N}(L^*)$.

<u>Απόδειξη</u>

1. Επιλέγουμε $\mu = \gamma$ στο Θεώρημα Υπαρξης I (σ.118

$$B_\gamma[u, v] := B[u, v] + \gamma (u, v)$$

$$\Updownarrow$$

$$L_\gamma u = Lu + \gamma u$$

$$\Rightarrow \quad \forall\, g \in L^2(U) \;\; \exists\, u \in H_0^1(U)$$

(1) $\quad B_\gamma[u, v] = (g, v) \quad \forall\, v \in H_0^1(U)$

(2) $\quad u = L_\gamma^{-1} g$

2. $u \in H_0^1(U)$ ασθενής λύση του (α) $\Leftrightarrow$

(3) $\quad B_\gamma[u, v] = (\gamma u + f, v) \quad \forall\, v \in H_0^1(U)$