Σημασία της Μορφής Απαγωγής

$$(3)\quad \int_U (Lu)u\,dx = -\int_U \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)u\,dx + \dots$$

$$= \int_U a^{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx + \dots$$

Υποθέτουμε τώρα

Ορισμός (Ελλειπτικότητα) ◁ Ενισχύεται σε γιν

$$(4)\quad \langle A(x)\xi,\xi\rangle \geq \theta|\xi|^2, \quad \theta \text{ σταθερά}$$

$A(x) = (a^{ij}(x))$, (*) $\Longleftrightarrow$ $A(x) = A^T(x)$ θετικά ορισμένη

$\overset{(3),(4)}{\Longrightarrow}$

$$(5)\quad \int_U a^{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx \geq \theta\int_U |\nabla u|^2\,dx.$$

Δηλαδή η τετραγωνική μορφή

$$(6)\quad T[u,u] = \int_U a^{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx$$

είναι θετικά ορισμένη στον $W_0^{1,2}(U)\times W_0^{1,2}(U)$.

Φυσικη Σημασια | Εξισωσεις Αντιδρασης - Διαχυσ

$$)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^{ij}(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + b^i(x) u_{x_i} + g(u) \\ u(x,0) = u_0(x) = \text{Αρχικη Συνθηκη} \\ u(x,t) = 0 \;, \quad x \in \partial U \end{cases}$$

$u = u(x,t)$ ⟋ Θερμοκρασια

ή

⟍ Συγκεντρωση

Ορος Διαχυσης

$$a^{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i \partial x_j}$$

Ορος Αντιδρασης

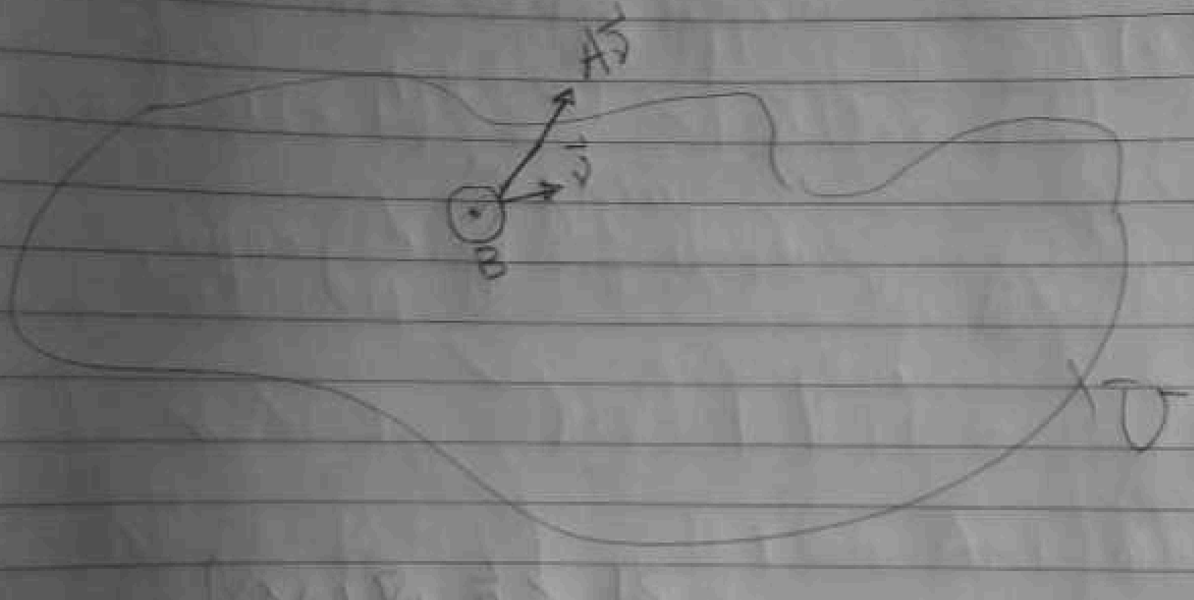
$$g(u)$$

Ορος Μεταφορας (Convection - Transport)

Ροη (Flux)

$A(x)\,\nabla u$

Ελλειπτικοτητα



B = μικρη μπαλα

ν = Προς τα έξω καθετ

$\text{Ελλειπτικοτητα}_{|B} \Longrightarrow \langle A\nu, \nu \rangle > 0$, δηλαδη η γωνια $A\nu$, ν ειναι οξεια

Εστω $u_t = +\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a^{ij}\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right)$,

δηλαδη θεωρουμε μονο την ροη της διαχυσης.

Η μεταβολη της μαζας εντος της B

$$\frac{d}{dt}\int_B u\,dx = \int_B u_t\,dx = \int_B \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)dx$$

$$= \int_{B} \mathrm{div}\left(a^{1j}\frac{\partial u}{\partial x_j}, \dots, a^{nj}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) dx$$

$$= \int_{\partial B} \left(a^{1j}\frac{\partial u}{\partial x_j}, \dots, a^{nj}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) \cdot \left(\nu^1, \dots, \nu^n\right)$$

$$= \int_{\partial B} \langle A \nabla u, \nu \rangle \, dx$$

$$= \int_{\partial B} \langle \nabla u, A\nu \rangle \, dx \qquad \left(A = A^T\right)$$

Αν η συγκεντρωση εκτος της B ειναι μεγαλυτερη τοτε η κλιση $\nabla u \big|_{\partial B}$ θα δειχνει προς τα μεσα και κατα συνεπεια η γωνια ∇u, $A\nu$ ειναι αμβλεια

$$\langle \nabla u, A\nu \rangle < 0 \, ,$$

∴ Ελλειπτικοτα $\Longleftrightarrow$ 2ος Νομος Θερμοδυναμικης.
(η θερμοκρασια ρεει απο υψηλοτερη προς χαμηλοτερ
η μαζα ρεει απο μεγαλυτερη συγκεντρωση πρ
μικροτερη συγκεντρωση).

$\square$

B. <u>Υπαρξη. Το Θεωρημα Lax-Milgram</u>

H = Χωρος Hilbert με πραγματικο εσωτερικο γιν. $(\cdot,\cdot)$

Εστω $f \in H^*$ (δυικος). Συμβολιζουμε

$f(x) = \langle f, x \rangle$, $\|\cdot\|$ την νορμα

Θεωρημα

Εστω $B : H \times H \to \mathbb{R}$, διγραμμικος

τ.ω.

(i) $|B[u,v]| \leq \alpha \|u\| \|v\|$

(ii) $B[u,u] \geq \beta \|u\|^2$.

Εστω $f \in H^*$.

Τοτε $\exists$ μοναδικο στοιχειο $u_f \in H$ τ.ω.

$$B[u_f, v] = \langle f, v \rangle \quad \forall\, v \in H.$$

#

ραξη

γιο

ην περίπτωση που η διγραμμική μορφή είναι συμμετρική,
ε το

$B[u,u]$ είναι εσωτερικό γινόμενο

απ Riesz $\Rightarrow \exists!\, u_f$.

$$\langle f, v\rangle = \langle Bu_f, v\rangle,$$

ηλαδή το Lax-Milgram είναι άμεσο πόρισμα του Θεωρήματος του Riesz.

Μέρος I

[illegible] $u \in H$,

) $H \ni v \to B[u,v] \in H^*$

$\Rightarrow \exists!\, w_u$ τ.ω.

1) $B[u,v] = (w_u, v)$

Ορίζουμε

(ω) $Au := w_u$, $A: H \to H$

(1) $\Leftrightarrow B[u,v] = \langle Au, v\rangle$ $(u,v \in H)$, $\forall v$

Μέρος ΙΙ

• Ο $A \in \mathcal{L}(H,H)$ (γραμμικός, φραγμένος)

Γραμμικότητα

$$
\begin{aligned}
(A(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2), v) &= B[\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v] \\
&= \lambda_1 B[u_1, v] + \lambda_2 B[u_2, v] \\
&= \lambda_1 (Au_1, v) + \lambda_2 (Au_2, v) \\
&= (\lambda_1 Au_1 + \lambda_2 Au_2, v)
\end{aligned}
$$

$$\forall v \implies$$

$$A(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 Au_1 + \lambda_2 Au_2.$$

Φραγμένος

(11) $$\|Au\|^2 = (Au, Au) \overset{(5)}{=} B[u,u] \leq \alpha \|u\| \|Au\|$$

$\therefore$

(12) $$\|Au\| \leq \alpha \|u\|.$$

Μέρος ΙΙΙ

(13) • $\begin{cases} A \text{ 1-1} \\ R(A) \text{ κλειστό στο } H \end{cases}$

(13) $\beta \|u\|^2 \leq B[u,u] = (Au,u) \leq \|Au\| \, \|u\|$

(14) $\|Au\| \geq \beta \|u\|$

$\Rightarrow$ A 1-1.

A^{-1} υπαρχει με $D(A^{-1}) = R(A)$

$\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{\beta}$, και $\overline{D(A^{-1})} = D(A^{-1})$.

Μερος IV

(15) $R(A) = H$

Με σε ατοπον απαγωγη:

Εστω οτι $R(A) \neq H$

$\Rightarrow [R(A)]^{\perp} \neq \emptyset$

Εστω $\hat{w} \in [R(A)]^{\perp} \sqcup$

$0 = (A\hat{w}, \hat{w}) \overset{(a)}{=} B[\hat{w},\hat{w}] \overset{(ii)\ \sigma.109}{\geq} \beta \|\hat{w}\|^2$

$\otimes$

V

ν Riesz

$$\langle f, v \rangle = (w_f, v), \forall v \in H$$

$3), (15) \Rightarrow \exists u_f$ τ.ω. $Au = w_f$

$$B[u_f, v] = (Au_f, v) = (w_f, v) = \langle f, v \rangle$$

Υπαρξη αποδειχθη.

Το μοναδικο το αφηνουμε σαν Ασκηση.

$\square$

Διαλεξη 17 – Ασθενης Διατυπωση Ελλειπτικων εξισωσεων $2^{ας}$ ταξης – Υπαρξη – Ομαλοτητα Άρχη Μεγιστου, Μεθοδος Ενεργειας Ιδιοτιμες και Ιδιοσυναρτησεις.

- Προβληματα

$$(1)\ \left\{\begin{array}{l} Lu = f,\ x \in U \subset \mathbb{R}^n, \text{ ανοικτο, φραγμενο} \\ u = 0,\ x \in \partial U \end{array}\right]\ \text{Προβληματα Dirichlet}$$

f δεδομενο, $u = u(x)$ αγνωστη, $u: \bar{U} \to \mathbb{R}$

Ελλειπτικος Τελεστης

$$(2)\ Lu = \left\langle \begin{array}{l} -\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a^{ij}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right) + b^i(x)u_{x_i} + c(x)u \\ \text{(μορφη αποκλισης)} \\[2em] -a^{ij}(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + b^i(x)u_{x_i} + c(x)u \end{array}\right.$$

$$(*)\ \begin{array}{l} a^{ij}(x) \in C^1(U),\ a^{ij} = a^{ji},\ i,j = 1,..,n \\ b^i(x) \in \text{—"—} \\ c(x) \in \text{—"—} \end{array}$$

Απλη Παρατηρηση

Λογω του οτι $a^{ij} \in C^1$ η μορφη (2) μπορει ευκολα να γραφει σε μορφη αποκλισης. Αυτο ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ για $a^{ij} \in L^{\infty}$ που ειναι αναγκαια, ειδικα στις ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ (δηλαδη $a^{ij} = a^{ij}(u)$) ειναι τα αντικειμενα.