Διαλεξη 15 (Συμπαγεια $W^{1,p} \subset\subset L^q$, $1 \leq q < p^*$
U φραγμενο — Rellich-Kondrachov

Ορ

X, Y Χωροι Banach

$X \subset\subset Y$ συμπαγης εμφυτευση
$\|\cdot\|_X$ $\|\cdot\|_Y$
αν
(i) $X \subset Y \iff \|u\|_Y \leq C \|u\|_X$ $(X \subset Y)$

(ii) $\forall \{u_n\} \subset X$, $\|u_n\|_X < K$, $\exists \{u_{n_k}\}$ τ.ω.

$$u_{n_k} \xrightarrow{Y} u.$$

Θεωρημα

$U \subset \mathbb{R}^n$, φραγμενο, $\partial U \in C^1$, $1 \leq p < n$.
Ισχυει

$$W^{1,p}(U) \subset\subset L^q(U), \quad 1 \leq q < p^*$$

Αποδειξη

1. Γνωριζουμε οτι $W^{1,p}(U) \subset L^q(U) \Rightarrow$ (i) ισχυ
Εστω $\{u_m\}$ φραγμενη στον $W^{1,p}(U) =: X$.
$\overset{(1)}{\Rightarrow}$ $\|u_m\|_{L^q(U)} \leq C \|u_m\|_{W^{1,p}(U)}$

Θα δειξουμε οτι $\exists$ υπακολουθια $\{u_{m_j}\} \subset \{u_m\}$,

(2). $u_{m_j} \xrightarrow{L^q(U)} u$

(Από Θεώρημα Επέκτασης)

2. Χωρίς βλάβη της γενικότητας $O=\mathbb{R}^n$ και $\exists V$, ανοικτό, φραγμ.

(3) $\quad spt\, u_m \subset V$,

και επίσης

(4) $\quad \|u_m\|_{W^{1,p}(V)} < C$

$$\int \eta_\varepsilon(x-z)u_m(z)\,dz = \frac{1}{\varepsilon^n}\int \eta\left(\frac{x-z}{\varepsilon}\right)u_m(z)$$

3. Θεωρούμε τις "mollified" εκδοχές των u_m:

(5) $\quad u_m^\varepsilon := \eta_\varepsilon * u_m \quad$ ($0<\varepsilon<\varepsilon_0$, $spt\, u_m^\varepsilon \subset V$)

4. Ισχυρισμός

(6) $\quad u_m^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^q(V)} u_m \quad$ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΑ

ως προς m.

Απόδειξη της (6)

α) $$u_m^\varepsilon(x) - u_m(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{B(x,\varepsilon)} \eta\left(\frac{x-z}{\varepsilon}\right)\left(u_m(z)-u_m(x)\right)dz$$

$$\left(\begin{array}{l} y=\frac{x-z}{\varepsilon} \\ dy=\frac{1}{\varepsilon^n}dz\end{array}\right) \quad = \int_{B(0,1)} \eta(y)\left(u_m(x-\varepsilon y)-u_m(x)\right)dy$$

$$= \int_{B(0,1)} \eta(y)\left(\int_0^1 \frac{d}{dt}\left(u_m(x-\varepsilon t y)\right)dt\right)dy$$

$$= -\varepsilon\int_{B(0,1)} \eta(y)\left(\int_0^1 \nabla u_m(x-\varepsilon t y)\cdot y\,dt\right)dy$$

Thus

$$(7)\quad \int_V |u_m^\varepsilon(x) - u_m(x)|\,dx$$

$$\leq \varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \left(\int_0^1 \left(\int_V |\nabla u_m(x-\varepsilon t y)|\,dx \right) dt \right) dy$$

$$\left(\begin{array}{l} z = x - \varepsilon t y \Rightarrow \underline{\underline{dz = dx}}, \quad \text{Χρείαν } \operatorname{spt} u_m \subset V \\ \displaystyle\int_V |\nabla u_m(z)|\,dz = \int_V |\nabla u_m(x-\varepsilon t y)|\,dx \end{array} \right)$$

$$\leq \varepsilon \int_V |\nabla u_m(z)|\,dz \leq \varepsilon \left(\int_V |\nabla u_m(z)|^p dz \right)^{1/p} |V|^{1-\frac{1}{p}}$$

$$= \varepsilon C \, \|u_m\|_{W^{1,p}(V)} \leq \varepsilon \overline{C}.$$

Hence $(7) \Rightarrow$

$$(8)\quad \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(V)} \leq \overline{C}\varepsilon, \quad \forall m.$$

Επίσης

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^{p^*}(V)} \leq C \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{W^{1,p}(V)} \leq 2C \|u_m\|_{W^{1,p}}$$

$\therefore$

(9) $\quad \| u_m^\varepsilon - u_m \|_{L^{p^*}(V)} \leq \tilde{C}$

C. Τέλος από ανισότητα παρεμβολής (Hölder)

(10) $\quad \| u_m^\varepsilon - u_m \|_{L^q(V)} \leq \| u_\varepsilon^m - u_m \|^\theta_{L^1(V)} \, \| u_\varepsilon^m - u_m \|^{1-\theta}_{L^{p^*}(V)}$

$\left(\frac{1}{q} = \theta + \frac{1-\theta}{p^*} \right)$

(8), (10) $\Rightarrow$

(11) $\quad \| u_m^\varepsilon - u_m \|_{L^q(V)} \leq C \varepsilon^\theta$

$\therefore$ $\quad u_m^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^q(V)} u_m$ ομοιόμορφα ως προς m.

Η (6) αποδείχθηκε. $\square$

5. Ισχυρισμός

Για $\varepsilon > 0$ σταθεροποιημένο, η $\{u_m^\varepsilon\}_{m=1}^\infty$, $u_m^\varepsilon : V \to \mathbb{R}$

(12) $\begin{cases} \text{είναι φραγμένη} \quad |u_m^\varepsilon(x)| < C, \quad x \in V \\ \text{και ισοσυνεχής: } \forall \text{ θετικό } \bar{\delta} \ \exists\, \Delta = \Delta(\bar{\delta}) \text{ τ.ω.} \\ \quad |u_m^\varepsilon(x) - u_m^\varepsilon(y)| \leq \bar{\delta} \quad \text{αν} \quad |x-y| \leq \Delta(\bar{\delta}) \end{cases}$

(δεν υποστηρίζουμε ότι $\lambda(\bar{\delta})$ δεν εξαρτάται από το ε!)

Απόδειξη της (12)

A. Ομοιόμορφα Φραγμένα

$$|u_m^\varepsilon(x)| \le \int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y)\,|u_m(y)|\,dy$$

$$\le \|\eta_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u_m\|_{L^1(V)} \le \frac{C}{\varepsilon^n} < \infty.$$

B. Ισοσυνέχεια

$$|\nabla u_m^\varepsilon(x)| \le \int_{B(x,\varepsilon)} |\nabla \eta_\varepsilon(x-y)|\,|u_m(y)|\,dy$$

$$\le \|\nabla \eta_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u_m\|_{L^1(V)} \le \frac{C}{\varepsilon^{n+1}}$$

$\Rightarrow$ (12)

Έστω μια ακολουθία

Από Ascoli ε_k

∃ υπακολουθία

$$u^{\varepsilon_1} \ \ldots \ \xrightarrow{L^q(V)} u^{\varepsilon_1}$$

$\varepsilon_1), \ldots, u^{\varepsilon_1}_{m_j(\varepsilon_1)}$

τ.ω. $m_1(\varepsilon_1), m_2(\varepsilon_1), \ldots$

$\} \subset \{ m_j(\varepsilon_1) \}$ τ.ω.

$$\xrightarrow{L^q(V)} u^{\varepsilon_2}$$

$\ldots$

$< m_2(\varepsilon_2)$.

$$\xrightarrow{L^q(V)} u^{\varepsilon_n}$$

$m_K(\varepsilon_K)$

τ.ω.

$T(\xi)$ ακέραιος

ΛT

95-

Cauchy :

$L^q(V)$

$\| u^{\varepsilon_n}_{m_n(\varepsilon_n)} - u^{\varepsilon_n}_{m_k(\varepsilon_k)} \|_{L^q}$

$+ \| u^{\varepsilon_n}_{m_k(\varepsilon_k)} - u_{m_k(\varepsilon_k)} \|_{L^q}$

$^{\varepsilon_n}_{m_k(\varepsilon_k)} \|_{L^q} + C\varepsilon_k^{\theta}$

$C\varepsilon_k^{\theta}$, $k \geq n \geq N$

$n \geq N$

τα Rellich - Kondrachov

γηρυς.

$\square$

$-q$

$\Rightarrow L^p($

a ...

$W^{1,p}(U$

$[1, p^*)$

$(U) \hookrightarrow C$

, U ...

Morrey

$) \hookrightarrow C^{\alpha}(U$

$W^{1,p}(U) \hookrightarrow C$

Εφαρμογη : Ανισοτητα Poincare με Μεσο Ορο

Θεωρημα:

$U \subset \mathbb{R}^n$, φραγμενο, (συνεκτικο) $\partial U \in C^1$, $1 \leq p \leq \infty$

Το $\exists\, C = C(n, p, U)$ τ.ω.

$$(19) \qquad \left\| u - \fint_U u \right\|_{L^p(U)} \leq C \, \| \nabla u \|_{L^p(U)}$$

Αποδειξη (Με εις Ατοπον)

Εστω οτι δεν ισχυει η (19). Τοτε δοθεντος $k = 1, 2, \ldots$ $\exists\, u_k$ τ.ω.

$$(20) \qquad \left\| u_k - \fint_U u_k \right\|_{L^p(U)} > k \, \| \nabla u_k \|_{L^p(U)}$$

Η ανισοτητα ειναι ομογενης. Κανονικοποιουμε :

$$(21) \qquad v_k := \frac{u_k - \fint u_k}{\left\| u_k - \fint_U u_k \right\|_{L^p(U)}}$$

οποτε

$$(22) \qquad \fint_U v_k = 0, \quad \| v_k \|_{L^p(U)} = 1, \quad \| \nabla v_k \|_{L^p(U)} < \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

$\|$

$W^{1,p}(\Omega)$

ojavasa $\{$

$\rightarrow v$

$\|v\|$

$= \lim_{k_j \to \infty} \int v_j$

$= -\lim_{k_j \to \infty} \int \frac{\partial}{\partial y}$