

Διάλεξη 15 (Συμμετρικά $W^{1,p}$ \hookrightarrow L^q , $1 \leq q < p^*$
 U φραγμένο - Rellich-Kondrachov

Op

X, Y Χώροι Banach

$X \hookrightarrow Y$ συμμετρικός εφελκυσμός
 $\|\cdot\|_X \quad \|\cdot\|_Y$
 αν

(i) $X \hookrightarrow Y \iff \|u\|_Y \leq C \|u\|_X \quad (X \subset Y)$

(ii) $\forall \{u_n\} \subset X, \|u_n\|_X < K, \exists \{u_{n_k}\}$ π.ω.

$u_{n_k} \xrightarrow{Y} u$

Θεώρημα

$U \subset \mathbb{R}^n$, φραγμένο, $\forall v \in C^1, 1 < p < n$.
 Τοχύει

$W^{1,p}(U) \hookrightarrow L^q(U), \quad 1 \leq q < p^*$

Απόδειξη

1. Τυπικά αποδεικνύεται ότι $W^{1,p}(U) \hookrightarrow L^q(U) \iff$ (i) τοχύει
 εφόσον $\{u_n\}$ φραγμένο στο $W^{1,p}(U) =: X$.

(i) $\implies \|u_n\|_{L^q(U)} \leq C \|u_n\|_{W^{1,p}(U)}$

θα δείξουμε ότι \exists υποσειρά $\{u_{n_j}\} \subset \{u_n\}$,

(2) $u_{n_j} \xrightarrow{L^q(U)} u$

2. Xupis pjan tu yankotitas $D = \mathbb{R}^n$ can $\exists V$, anikto, qpykto

(3) $\text{supp } u_m \subset V$

Kan Estias

(4) $\|u_m\|_{W^{1,p}(V)} < C$

$\int \eta_\varepsilon(x-z) |u_w(z)| dz = \frac{1}{\varepsilon^n} \int \eta(\frac{x-z}{\varepsilon}) |u_w(z)| dz$

3. Demofila tis "qualified" paxos tu u_m :

(5) $u_m^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u_m$ ($0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $\text{supp } u_w \subset V$)

4. Isopyklos

(6) $u_m^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{\|\cdot\|_q(V)} u_m$

ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗΑ

ws pros m.

Απόδειξη της (6)

x) $u_m^\varepsilon(x) - u_w(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B(x,\varepsilon)} \eta(\frac{x-z}{\varepsilon}) (u_w(z) - u_w(x)) dz$

$\begin{cases} z = x + \varepsilon y \\ dz = \varepsilon^n dy \end{cases}$

$= \int_{B(0,1)} \eta(y) (u_w(x - \varepsilon y) - u_w(x)) dy$

$= \int_{B(0,1)} \eta(y) \left(\int_0^1 \frac{d}{dt} u_w(x - \varepsilon t y) dt \right) dy$

$= -\varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \left(\int_0^1 \nabla u_w(x - \varepsilon t y) \cdot y dt \right) dy$

Thus

$$(7) \int_V |u_m^z(x) - u_m(x)| dx$$

$$\leq \varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \left(\int_0^1 \left(\int_V |\nabla u_m(x-\varepsilon ty)| dx \right) dt \right) dy$$

$$z = x - \varepsilon ty \Rightarrow \underline{dz = dx}, \text{ spt } u_m \subset V$$

$$\int_V |\nabla u_m(z)| dz = \int_V |\nabla u_m(x - \varepsilon ty)| dx$$

$$\leq \varepsilon \int_V |\nabla u_m(z)| dz \leq \varepsilon \left(\int_V |\nabla u_m(z)|^p dz \right)^{1/p} |V|^{1-1/p}$$

$$= \varepsilon C \|u_m\|_{W^{1,p}(V)} \leq \varepsilon \bar{C}$$

Hence (7) \Rightarrow

$$(8) \|u_m^z - u_m\|_{L^1(V)} \leq \bar{C} \varepsilon, \forall m$$

Errors and

$$\|u_m^z - u_m\|_{L^p(V)} \leq C \|u_m^z - u_m\|_{W^{1,p}(V)} \leq 2C \|u_m\|_{W^{1,p}(V)}$$

$$(9) \quad \|u_m^E - u_m\|_{L^{p^*}(V)} \leq C^2$$

C. Τελες από ακριβήτα' τελες βεγυ (Hölder)

$$(10) \quad \|u_m^E - u_m\|_{L^q(V)} \leq \|u_m^u - u_m\|_{L^1(V)}^\theta \|u_m^u - u_m\|_{L^{p^*}(V)}^{1-\theta}$$

$$\left(\frac{1}{q} = \theta + \frac{1-\theta}{p^*} \right)$$

(8), (10) \Rightarrow

$$(11) \quad \|u_m^E - u_m\|_{L^q(V)} \leq C \varepsilon^\theta$$

$\therefore u_m \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{L^q(V)} u_m$ ομοιόμορφα ως προς M .

H (6) ιατεδου $\chi_{m, \chi_{m,1}}$

□

5. Τοx-pιστος

Για $\varepsilon > 0$ φισαρισθενο, $n \int u_m^E \int_{m-1}^1, u_m^E = V \rightarrow \mathbb{R}$

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{αντα φρεγμα} \\ \|u_m^E\| < C, \quad x \in V \\ \text{αντα} \quad \text{ισωνενα} = \Delta(\bar{\delta}) \quad \exists \Delta = \Delta(\bar{\delta}) \quad \text{τ.ω.} \\ \|u_m^E(x) - u_m^E(y)\| \leq \bar{\delta} \quad \text{αν } |x-y| \leq \Delta(\bar{\delta}) \end{array} \right.$$

(δεν υποστηριχθε οτι $\chi(\bar{\delta})$ δει φισαριση στο ε |)

Απόδειξη της (12)

A. Ομοιομορφία

$$|u_m^\varepsilon(x)| \leq \int_{B(x,\varepsilon)} \gamma_\varepsilon(x-y) |u_m(y)| dy$$

$$\leq \|\gamma_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u_m\|_{L^1(V)} \leq \frac{C}{\varepsilon^n} < \infty.$$

B. Ισομετρία

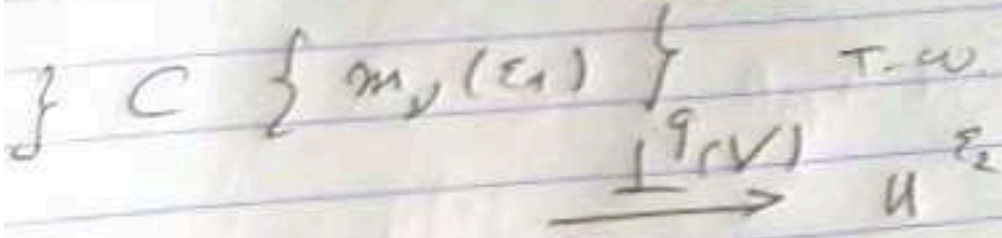
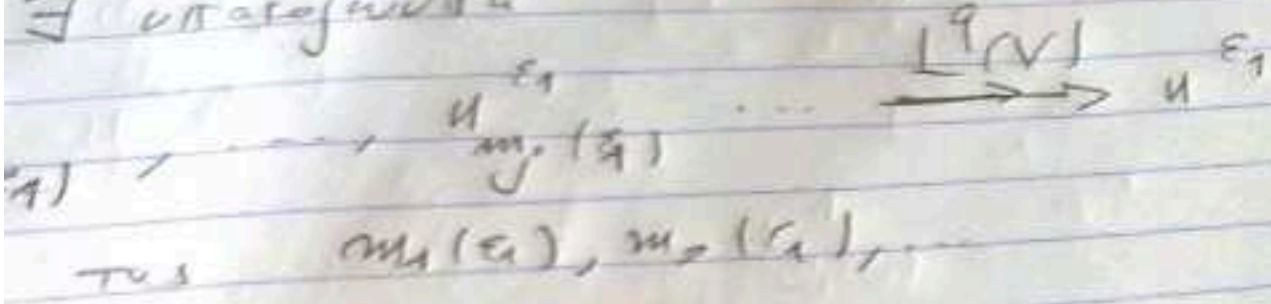
$$|\nabla u_m^\varepsilon(x)| \leq \int_{B(x,\varepsilon)} |\nabla \gamma_\varepsilon(x-y)| |u_m(y)| dy$$

$$\leq \|\nabla \gamma_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u_m\|_{L^1(V)} \leq \frac{C}{\varepsilon^{n+1}}$$

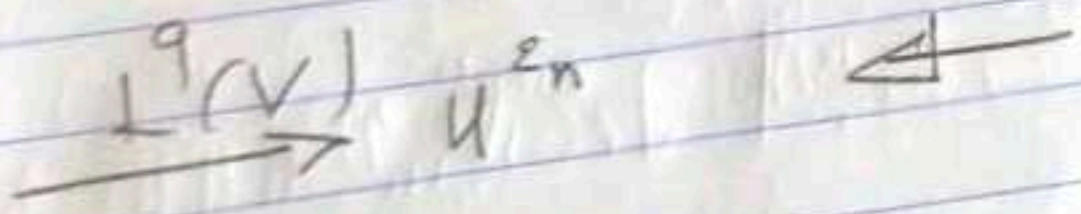
\Rightarrow (12)

Ερωτήματα
Από Ασκήσεις

Επιπλοκή



$m_2(\epsilon_2)$



$m_k(\epsilon_k)$

$T(\xi)$ & ακεραίος, T.W.

95-

Cauchy :

$L^q(V)$

$$\left\| u_{m_n(E_n)} - u_{m_k(E_k)} \right\|_q$$

$$+ \left\| u_{m_n(E_n)} - u_{m_k(E_k)} \right\|_q$$

$$u_{m_k(E_k)} \left\|_q + C E_k^\theta$$

$$C E_k^\theta, \quad k \gg n \gg \sqrt{n}$$

$$n \gg \sqrt{n}$$

Tau Pellich - Kondradov

Inputs

(V)

□

-9

$\Rightarrow L^P(C)$

payoffs
 $W^{1,p}(U)$

$(1, p^*)$

$(U) \subset G$

U operation
Money
 $(U) \subset C(U)$

$V^{1,p}(U) \subset C$

Εφαρμογή: Απόσπασμα Ρομάρε με Μκσθ Όρο

Θεώρημα:

$U \subset \mathbb{R}^n$, φραγμένο, $\partial U \in C^1$ ^(συνεχτικό), $1 \leq p \leq \infty$

Το $\exists C = C(n, p, U)$ τ.ω.

$$(19) \quad \|u - \int u\|_{L^p(U)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(U)}$$

Απόδειξη (Με εἰς Χτόπεν)

Εἰσὼ ὅτι δὲν ἰσχύει η (19). Τότε ἔστω

$k = 1, 2, \dots \exists u_k$ τ.ω.

$$(20) \quad \|u_k - \int u_k\|_{L^p(U)} > k \|\nabla u_k\|_{L^p(U)}$$

Ἡ ἀπόσπασμα εἶναι ομογενοῦς. Κανονικοποιῶμε:

$$(21) \quad v_k := \frac{u_k - \int u_k}{\|u_k - \int u_k\|_{L^p(U)}}$$

ὅπου

$$(22) \quad \int v_k = 0, \quad \|v_k\|_{L^p(U)} = 1, \quad \|\nabla v_k\|_{L^p(U)} < \frac{1}{k}, \quad k=1, 2, \dots$$

-98-

$\|$
 $w^T p(\theta)$

regarding $\{$

$\rightarrow v$

$\|v\|$

$$= \lim_{k_j \rightarrow a} \int_{C_{k_j}} f$$

$$= - \lim_{k_j \rightarrow a} \int_{C_{k_j}} \frac{\partial f}{\partial z}$$

$\lim_{k_j \rightarrow a}$

$\lim_{k_j \rightarrow a} \int_{C_{k_j}} \frac{\partial f}{\partial z}$