Διάλεξη 12 (Λύσεις Ασκήσεων 9, 10, 11 Εκτός ή Διάλεξη 11)

Πορίσματα της

(1) $$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \le C_1 \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad 1 \le p < n.$$

για U ανοικτό, φραγμένο μέσω Επέκτασης E.

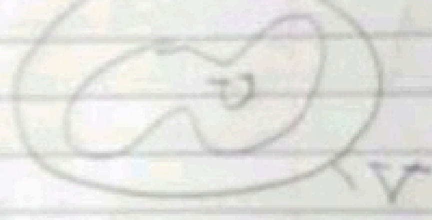
A. Θεώρημα 1

Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$, φραγμένο, ανοικτό, $\partial U \in C^1$

Τότε ισχύει

(2) $$\begin{cases} W^{1,p}(U) \hookrightarrow L^{p^*}(U) \Leftrightarrow \\ \|u\|_{L^{p^*}(U)} \le C' \|u\|_{W^{1,p}(U)} \end{cases}$$

$$C' = C'(p, n, U)$$



Απόδειξη

Θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα Επέκτασης

(3) $$E : W^{1,p}(U) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n), \quad Eu\big|_U = u$$

Θεώρημα 1, Διάλεξη 7, σ 43.

Γνωρίζουμε ότι $\exists\, V \supset\supset U$, V ανοικτό, φραγμένο, τ.ω.

(4) $$\operatorname{supt} Eu \subset V, \quad \forall\, u \in W^{1,p}(U)$$

και

(5) $$\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le C_2 \|u\|_{W^{1,p}(U)}$$

Η $\bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ και ισχυει

(13) $$\|\bar{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \overset{(1)}{\leq} C_1 \|\nabla \bar{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$\Longleftrightarrow$

(14) $$\|u\|_{L^{p^*}(U)} \leq C_1 \|\nabla u\|_{L^p(U)}$$

Εχουμε απο (11)

(15) $$\|u\|_{L^p(U)} \leq \hat{C} \|u\|_{L^{p^*}(U)}$$

$\therefore$

$$\|u\|_{L^p(U)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(U)}.$$

$\square$

<u>Σχολια για $p=n$</u>

Το Θεωρημα 1 δεν ισχυει για την οριακη περιπτωση $p=n \Leftrightarrow p^*=\infty$.

<u>Δηλαδη</u>

$$W^{1,n}(U) \not\subset L^\infty(U) \quad \text{αν } n \neq 1.$$

Ορίζουμε

(6) $$\bar{u} := Eu \,.$$

(7) $$\|\bar{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \overset{(1)}{\leq} C_1 \|\nabla \bar{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \overset{(5)}{\leq} C_1 C_2 \|u\|_{W^{1,p}(U)}$$

Επίσης

(8) $$\|\bar{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} = \|\bar{u}\|_{L^{p^*}(V)} \geq \|\bar{u}\|_{L^{p^*}(U)} = \|u\|_{L^{p^*}(U)}$$

(7), (8) $\Rightarrow$

(9) $$\|u\|_{L^{p^*}(U)} \leq C_1 C_2 \|u\|_{W^{1,p}(U)} \,.$$

Το Θεώρημα 1 αποδείχθη. $\square$

B. <u>Θεώρημα 2</u>

Έστω U ανοικτό, φραγμένο στο $\mathbb{R}^n$, και έστω $u \in W_0^{1,p}(U)$, για $1 \leq p < n$. Γ.1.

Τότε ισχύει η ανισότητα

(10) $$\|u\|_{L^q(U)} \leq C \, \|\nabla u\|_{L^p(U)}$$

$1 \leq q \leq p^*$, $\quad C = C(p, q, n, U)$.

Άρα

(11) $$\boxed{\|u\|_{L^p(U)} \leq \left(\int_U |u|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} (m(U))^{\frac{p^*-p}{p^*p}} \overset{((10),\, q=p^*)}{\leq} C\|\nabla u\|_{L^p(U)}.}$$

$$\boxed{u \in W_0^{1,p}(U)}$$

Η (11) λέγεται

Ανισότητα του Poincaré

και ισχύει $\forall\, p \geq 1$.

Προφανώς η (11) δεν ισχύει για $u \in W^{1,p}(U)$ (επιλέγουμε $u \equiv$ σταθερά !).

Απόδειξη του Θεωρήματος 2

Επεκτείνουμε την u τετριμμένα εκτός U:

(12) $$\bar{u} = \begin{cases} u, & \text{στο } U \\ 0, & \mathbb{R}^n \setminus U. \end{cases}$$

Σημείωση 1

Παρατηρούμε ότι η (10) ΔΕΝ ισχύει για $U=\mathbb{R}^n$, παραμόνως στην περίπτωση $q=p^*$! (Επιχείρημα Κλιμάκας).

Σημείωση 2

Για U φραγμένο

$$\|u\|^p_{L^p(U)} = \int_U |u|^p dx = \int_U |u|^p \cdot 1 \, dx$$

$$\left(\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{p^*} < \frac{1}{p} \Leftrightarrow p^* > p \right)$$

$$\leq \left(\int_U |u|^{pq} dx \right)^{1/q} \left(\int_U 1^r dx \right)^{1/r}$$

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$$

Επιλέγουμε q

$$pq = p^* \Leftrightarrow q = \frac{p^*}{p} > 1.$$

$$\frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{q} = 1 - \frac{p}{p^*} = \frac{p^*-p}{p^*}$$

(Άσκηση 14 Evans).

Για $p=n$ ισχύει το εξής Θεώρημα εμφύτευσης:

$$W^{1,n}(U) \hookrightarrow BMO(U).$$

Αυτό απορρέει από την ανισότητα στο $\mathbb{R}^n$:

$$\|u\|_{BMO(\mathbb{R}^n)} \leq C \, \|\nabla u\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}$$

$\forall \; u \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$.

$\square$

<u>Σχόλιο για $p>n$</u>

Για $p>n$ ισχύει το αποτέλεσμα του Morrey:

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{\gamma}(\mathbb{R}^n), \quad \gamma = 1-\frac{n}{p}.$$

$\Longleftrightarrow$

$$\|u\|_{C^{\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq C \, \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

$\#$