Παράρτημα Διάλεξης 4

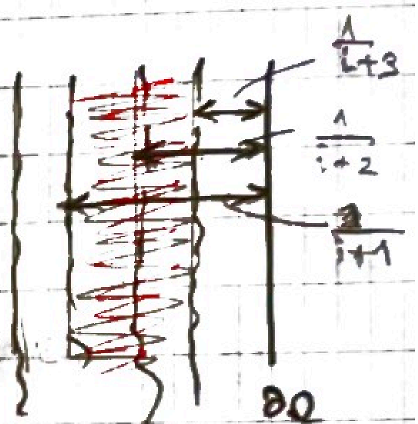
Λήμμα (Διαμέριση της Μονάδος)

Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$, ανοικτό, φραγμένο. Ορίζουμε

$$U_i = \{x \in U \mid dist(x, \partial U) > \frac{1}{i}\}, \quad i = 1, 2, \dots$$

$$V_i = U_{i+3} - \overline{U}_{i+1}, \quad V_0 \subset\subset U \text{ τ.ω. } U = \bigcup_{i=0}^{\infty} V_i$$

Υπάρχει $\{z_i(\cdot)\}$, $z_i \in C_c^\infty(V_i)$ τ.ω.



$$\begin{cases} 0 \le z_i(x) \le 1, \\ \sum_{i=0}^{\infty} z_i(x) = 1, \quad \forall x \text{ στο } U \end{cases}$$

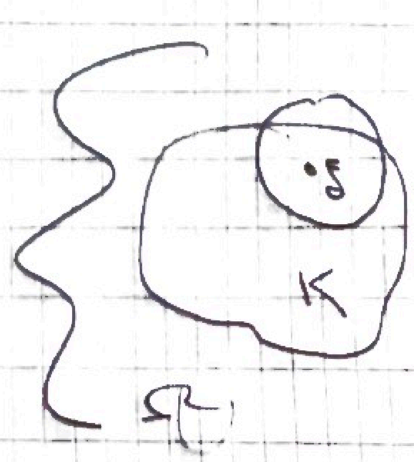
όπου στο Σ $\forall x$ έχει πεπερασμένο αριθμό μη μηδενικών όρων.

Απόδειξη

1. **Λήμμα 1**: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ανοικτό, K συμπαγές, $K \subset \Omega$
$\Rightarrow \exists\, \chi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\chi \ge 0$, $supp\,\chi$ συμπαγές
$\chi(x) > 0$, $x \in K$

Απόδειξη

$$\Psi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{4|x|^2 - 1}}, & |x| < \frac{1}{2} \\ 0, & |x| \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$



$\Psi \in C^\infty$, $supp\,\Psi = \{|x| \le \frac{1}{2}\}$, $\Psi(0) = e^{-1}$.

Επιλέγουμε $0<\delta<\text{dist}(K,\partial\Omega)$ και θεωρούμε

$$\Psi_\xi(x) := \Psi\left(\frac{x-\xi}{\delta}\right), \ \xi\in K$$

Έχουμε:

$$\Psi_\xi(\xi) = \Psi(0) > 0$$

$$\Psi_\xi \in C_c^\infty(\Omega)$$

Ορίζουμε

$$V_\xi = \{x\in\Omega \mid \Psi_\xi(x) > 0\}$$

V_ξ ανοικτό, $K\subset \bigcup_{\xi\in K} V_\xi$

Heine-Borel $\exists\ \xi_1,\dots,\xi_N$, $K\subset V_{\xi_1}\cup\dots\cup V_{\xi_N}$

Τέλος

$$\chi(x) := \Psi_{\xi_1}(x) + \dots + \Psi_{\xi_N}(x).$$

$\square$

2. Λήμμα 2

$\exists$ κάλυμμα $\{W_i\}$ του U, $U=\bigcup_{i=0}^{\infty} W_i$, W_i ανοικτό,

$\overline{W_i}\subset V_i$.

(Άσκηση ①. Παρατηρούμε ότι το $\{W_i\}$ είναι τοπικά πεπερασμένο, δηλαδή $\forall\ x\in U$, $\exists$ περιοχή του x που τέμνεται με πεπερασμένο αριθμό από W_i.

3. (Coda)

Από Λήμμα 1 με $\Omega = Y_i$, $K = \overline{W_i}$ υπάρχει

$\theta_i \in C_c^\infty(Y_i)$, $\theta_i \geq 0$ στο Y_i, $\theta_i > 0$ στο $\overline{W_i}$.

Θέτουμε

$$(*) \qquad \theta(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j(x)$$

Η $\{Y_i\}$ είναι τοπικά πεπερασμένη στο U

οπότε το άθροισμα στην $(*)$ $\forall x$ έχει πεπερασμένο

πλήθος όρων. Άρα $\theta \in C^\infty(U)$

Συνεπώς οι συναρτήσεις

$$z_j(x) = \frac{\theta_j(x)}{\theta(x)}$$

έχουν τις επιθυμητές ιδιότητες. $\square$