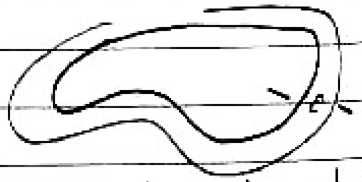
Διάλεξη 4

Θεώρημα 1 (Εσωτερική Προσέγγιση μέσω ομαλών συναρτήσεων)



Έστω $u \in W^{k,p}(U)$, $1 \le p < \infty$

$U_\varepsilon = \{x \in U \mid \operatorname{dist}(x, \partial U) > \varepsilon\}$

$$u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$$

U = ανοικτό, $U \subset \mathbb{R}^n$

Ισχύει

(i) $u^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon) \quad \forall\, \varepsilon > 0$

(ii) $u^\varepsilon \to u \quad W^{k,p}_{loc}(U), \quad \varepsilon \to 0$

Απ.

(i) • Έστω $f \in L^p(U)$. Θα δείξουμε ότι $f^\varepsilon := \eta_\varepsilon * f \in C^\infty(U_\varepsilon)$

Υπενθυμίζουμε:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_U g(x,t)\,dt = \int_U \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,dt$$

αν $\frac{\partial g(x,t)}{\partial x}$ υπάρχει, και αν $\int_U \left|\frac{\partial g(x,t)}{\partial x}\right| dx < \infty$

$$f^\varepsilon(x) = \int_U \eta_\varepsilon(x-y) f(y)\,dy$$

$\frac{\partial \eta_\varepsilon(x-y)}{\partial x_i}$ υπάρχει, και επίσης $\int \left|\frac{\partial \eta_\varepsilon(x-y)}{\partial x_i}\right| |f(y)|\,dy < \infty$

Παρόμοια χειριζόμαστε τις παραγώγους υψηλότερης τάξης.

) Ισχυει οτι $f^\varepsilon \to f$ $L^p_{loc}(U)$, $\varepsilon \to 0$ (*)

(βλ. Παραρτημα C.5 στον Evans).

Κανοντας χρηση αυτου θα δειξουμε οτι αν $u \in W^{k,p}(U)$

τοτε $u^\varepsilon \to u$, $W^{k,p}_{loc}(U)$, $\varepsilon \to 0$.

A) • $D^\alpha u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * D^\alpha u$ στο U_ε

$$D^\alpha_x u^\varepsilon = \int_U D^\alpha_x \eta_\varepsilon(x-y)\, u(y)\, dy$$

$$= (-1)^\alpha \int_U D^\alpha_y \eta_\varepsilon(x-y)\, u(y)\, dy$$

$$= (-1)^{2\alpha} \int_U \eta_\varepsilon(x-y)\, D^\alpha u(y)\, dy$$

$$= \eta_\varepsilon * D^\alpha u .$$

B) $$\|u^\varepsilon - u\|_{W^{k,p}(V)} = \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u^\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)} = \sum_{|\alpha|\le k} \|\eta_\varepsilon * D^\alpha u^\varepsilon - \ldots$$

$(V \subset\subset U)$ $\xrightarrow{(*)} 0$.

$\square$

I Ερώτημα

Τι περιθώρια βελτίωσης έχει το Θεώρημα 1;

α) Μια δυνατότητα θα ήταν η ακολουθία $\{u^\varepsilon\} \subset C^\infty(U)$

$u^\varepsilon \to u \quad W^{k,p}(U)$ (ολική προσέγγιση)

β) Ακόμη καλύτερα $\{u^\varepsilon\} \subset C^\infty(\overline{U})$

και

$u^\varepsilon \to u \quad W^{k,p}(\overline{U})$ (προσέγγιση μέχρι το ∂U)

Το α) είναι δυνατό. Το β) εξαρτάται από την ομαλότητα του ∂U. (

II

Έστω $U = (0,1)$.

$f(x) = \frac{1}{x} \in C^\infty((0,1))$, $f \notin W^{1,1}((0,1))$

$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \in C^\infty((0,1))$, $g \in W^{1,1}((0,1))$

$h(x) = x$, $h \in C^\infty(\overline{(0,1)}) = C^\infty([0,1])$

III

Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$, ανοικτό, φραγμένο, στο $\mathbb{R}^n$

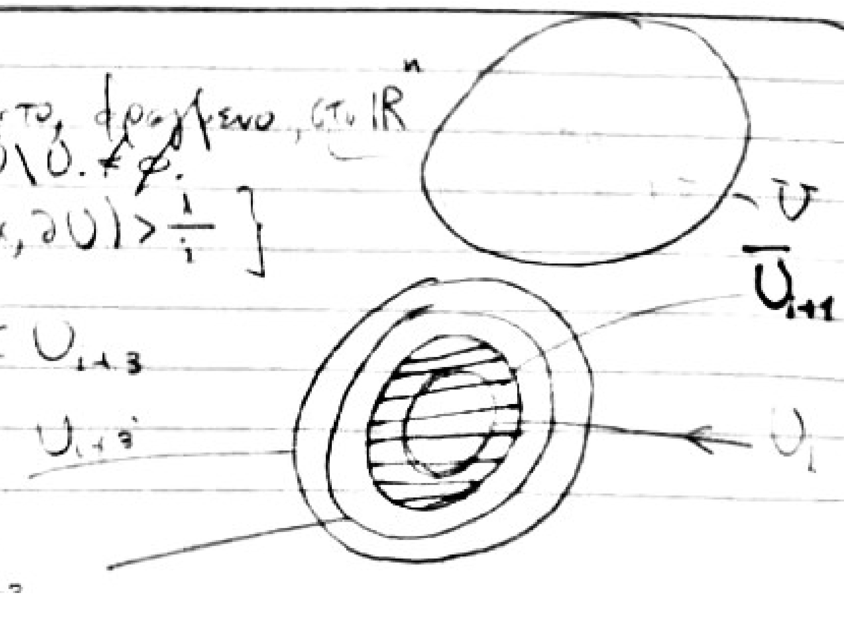
$\partial U = \overline{U} \setminus U \neq \emptyset$.

$U_i = \{x \in U \mid \operatorname{dist}(x, \partial U) > \frac{1}{i}\}$

$U_i \subset U_{i+1} \subset U_{i+2} \subset U_{i+3}$

$V_i := U_{i+3} - \overline{U}_{i+1}$

V_i = δακτύλιος, ανοικτό

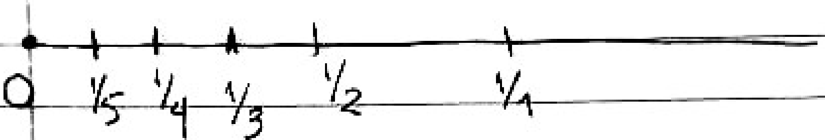


$$U = \bigcup_{i=0}^{\infty} V_i$$

<u>Παρ</u>: $U = (0, \infty)$

$$U_i = \left(\frac{1}{i}, \infty\right)$$

$i = 1, 2, \ldots$



$$U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \ldots$$

$$V_0 = U_3 - \overline{U}_1 = \left(\frac{1}{3}, 1\right)$$

$$V_1 = U_4 - \overline{U}_2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

$$V_2 = U_5 - \overline{U}_3 = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right)$$

$$V_3 = U_6 - \overline{U}_4 = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right)$$

$$\vdots$$

$$V_2 \cap V_0 = \emptyset$$

$$V_3 \cap V_1 = \emptyset$$

$$\vdots$$

<u>Διαμέριση της Μονάδος</u>

$$\{\zeta_i\}, \quad \zeta_i \in C_c^{\infty}(V_i), \quad 0 \leq \zeta_i \leq 1$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \zeta_i = 1 \quad , \text{στο } U$$

$\sum \zeta_i(x)$ έχει πεπερασμένο αριθμό μη μηδενικών όρων.

[Rudin, Real and Complex Analysis, Ch 2]

Θεώρημα 2 (Ολική Προσέγγιση)
Έστω U ανοικτό, και φραγμένο, και έστω $u \in W^{k,p}(U)$, $1 \le p < \infty$. Τότε $\exists\ u_m \in C^{\infty}(U) \cap W^{k,p}(U)$ τ.ω.

$$u_m \to u \text{ στο } W^{k,p}(U)$$

Απόδειξη

1. Θεωρούμε $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, όπου U_i στην σ. 28, $V_i = U_{i+3} - \overline{U}_{i+1}$. Επιλέγουμε V_0 έτσι ώστε $U = \bigcup_{i=0}^{\infty} V_i$. Δοθείσης $u \in W^{k,p}(U)$

$$\zeta_i u \in W^{k,p}(U) \text{ και } \operatorname{spt}(\zeta_i u) \subset V_i$$

("Calculus" Θεώρημα 1, σ 261, Evans)

2. Φιξάρουμε $\delta > 0$ και ορίζουμε $u^i := \eta_{\varepsilon_i} * (\zeta_i u)$

$\operatorname{spt} u^i \subset W_i := U_{i+4} - \overline{U}_i \supset V_i = U_{i+3} - \overline{U}_{i+1}$, i

Επιλέγοντας $\varepsilon_i > 0$ αρκετά μικρό και επειδή το $\operatorname{spt} u^i$ περιέχεται σε συμπαγές $\overline{W}_i \subset U$ μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θ1 και να πάρουμε

$$\|u^i - \zeta_i u\|_{W^{k,p}(U)} \le \frac{\delta}{2^{i+1}} \quad (i = 0, 1, \ldots)$$

3. Ορίζουμε $v = \sum_{i=0}^{\infty} u^i$

- Καλώς ορισμένη διότι $\forall x$ το άθροισμα είναι πεπερασμένο
- $\forall V \subset\subset U$, η $v\big|_V$ έχει πεπερασμένο αριθμό όρων.

$\Rightarrow v \in C^\infty(U)$

- $u = \sum \zeta_i u$. Για $V \subset\subset U$

$$\|v-u\|_{W^{k,p}(V)} \leq \sum \|u^i - \zeta_i u\|_{W^{k,p}(U)}$$
$$\leq \delta \sum \frac{1}{2^{i+1}}$$
$$= \delta$$

Εκτίμηση ανεξάρτητη του V!

- $\delta \geq \sup_{V \subset\subset U} \|v-u\|_{W^{k,p}(V)} = \|v-u\|_{W^{k,p}(U)}$.

$\square$

Σημ

Έστω f μετρήσιμη, $\int_Q |f|\,dx < C$

ομοιόμορφα για $Q \subset\subset U$. U open.

- $Q_n \subset Q_{n+1}$, $\mathbb{1}_{Q_n}|f| \to |f| \Rightarrow \lim \int_{Q_n} |f|dx = \int_U |f|$

$Q_n \to U$ μονότονης σύγκλισης

$\Rightarrow \int_U |f| \leq C.$

Ακριβης Αντιπροσωπος

- Για $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$

(*) $$\lim_{r \to 0} ⨍_{B(x,r)} |f - f(x)|^p dx = 0 \quad a.e.$$

('Θεωρημα διαφορισιμοτητος του Lebesgue)

- x τ.ω. η (*) ισχυει λεγεται <u>σημειο Lebesgue</u>

<u>Ορ</u>: Εστω $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

$$f^*(x) = \begin{cases} \lim_{r \to 0} ⨍_{B(x,r)} f\,dy & \text{αν οριο } \exists \\ 0 & \text{αν οχι} \end{cases}$$

f^* οριζεται $\forall x$. Λεγεται ο <u>ακριβης αντιπροσωπος</u> της f

- Εστω $f \in L^1_{loc}(U)$, $f^\varepsilon(x) = \eta_\varepsilon * f$, $x \in U_\varepsilon$

$f^\varepsilon(x) \longrightarrow f(x)$ αν x σημειο Lebesgue.

Ειδικα

$f^\varepsilon \longrightarrow f$ a.e.

• Έστω $1 \leq p < \infty$

(i) Αν $f \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}) \Rightarrow f^*$ απόλυτα συνεχής και $(f^*)' \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$

(ii) Αντιστρόφως: Αν $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$, $f = g$ a.e. όπου g απόλυτα συνεχής, και $g' \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$,

$$\Longrightarrow \quad f \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}).$$

#