• $u' = v$ (ασθενώς)

$\iff$

(2) $$\int_0^2 u\phi' dx = -\int_0^2 v\phi \, dx \quad \forall \phi \in C_c^\infty(U)$$

Η (2) ισχύει διότι:

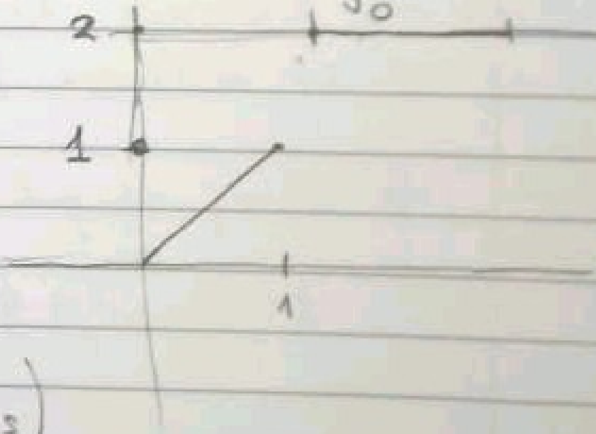
$$\int_0^2 u\phi' dx = \int_0^1 x\phi' dx + \int_1^2 \phi' dx$$

$$= \int_0^1 (x\phi)' dx - \int_0^1 \phi \, dx + \int_1^2 \phi' dx$$

$$= \cancel{\phi(1)} - \int_0^1 \phi \, dx + \cancel{\phi(2)}^{0} - \cancel{\phi(1)} = -\int_0^2 v\phi \, dx \quad \checkmark$$

II) $U = (0,2)$

$$u(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1 \\ 2, & 1 < x < 2 \end{cases}$$




• $\nexists \; u'$ (ασθενώς)

Με εις άτοπον απαγωγή: Έστω ότι $\exists \; v \in L^1_{loc}(0,2)$

τ.ω.

(3) $$\int_0^2 u\phi' dx = -\int_0^2 v\phi \, dx$$

$1^{ο}$ μέλος $= \int_0^2 u\phi' dx = \int_0^1 x\phi' dx + \int_1^2 2\phi' dx$

$$= \int_0^1 (x\phi)' dx - \int_0^1 \phi\, dx + 2\left[\cancel{\phi(0)}^{0} - \phi(1)\right]$$

$$= \phi(1) - \left[\phi(1) - \cancel{\phi(0)}^{0}\right] - 2\phi(1) = -2\phi(1).$$

(3) $\Leftrightarrow$

(4) $$-2\phi(1) = -\int_0^2 v\phi\, dx \quad \forall\, \phi \in C_c^\infty(0,2)$$

Θεωρούμε τώρα συναρτήσεις $\phi$ που επιπρόσθετως ικανοποιούν

$$\phi(1) = 0, \quad \phi \in C_c^\infty(0,2)$$

(4) $\Rightarrow$ $v = 0$ α.ε.

(Πρώτα $\phi \equiv 0$ στο $[1,2]$ $\Rightarrow$ $v = 0$ α.ε. στο $[0,1]$
Εν συνεχεία $\phi \equiv 0$ στο $[0,1]$ $\Rightarrow$ $v = 0$ α.ε. στο $[1,2]$)

Επανερχόμαστε στην (4) και θεωρούμε γενικές $\phi$,

$$-2\phi(1) = 0 \quad \forall\, \phi \in C_c^\infty(0,2)$$

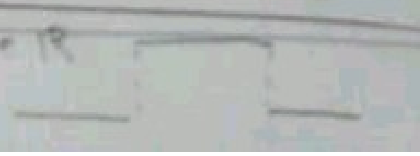
~~Χ~~. Άτοπο.(*)

Συμπ. : $u' = -2\delta_{(1)}$, όπου $\delta_{(1)}$ το μέτρο Dirac, $\langle \delta_{(1)}, \phi \rangle \overset{!}{=} \phi(1)$, $\delta_{(1)} \in C^*(0,2)$

b) Ορ. (Sobolev Χώροι)

$$W^{k,p}(U) = \{ u \in L^1_{loc}(U), \text{ τ.ω. } D^\alpha u \text{ υπάρχει ασθενώς},$$
$$|\alpha| \le k, \text{ και } D^\alpha u \in L^p(U) \}$$

(*) Χαρακτηριστικές συναρτήσεις $1_{[a,b]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ δεν ανήκουν σε Sobolev χώρο.



$u \equiv w$, $u, w \in W^{k,p}(U)$, αν $u = w$ α.ο. στο $U$.

Νόρμα

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} \begin{cases} = \sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|_{L^p(U)}, & 1 \le p < \infty \\ = \sum_{|\alpha| \le k} \operatorname{ess\,sup}_U |D^\alpha u|, & p = \infty. \end{cases}$$

Συμβολισμοί

(i) $u_m \to u$ $W^{k,p}_{loc}(U)$

$\iff \forall V \subset\subset U$, $u_m \to u$ στο $W^{k,p}(V)$.

(ii) $W^{k,p}_0(U) = \overline{C^\infty_c(U)}^{W^{k,p}(U)}$

(iii) $H^k_0(U)$, $H^k(U)$ (αντίστοιχα $W^{k,p}_0(U)$, $W^{k,p}(U)$)

Πόσο ιδιόμορφες μπορεί να είναι Sobolev συναρτήσεις;

Αρκετά – ιδιαίτερα καθώς η διάσταση μεγαλώνει.

Ασκηση 3

Exercise 4, p 306 in Evans, 2nd Edition.

($n=1$ $u \in W^{1,p}(0,1) \Rightarrow u$ απολύτως συνεχής και $u'$ ($\exists$ α.ο.) στον $L^p(0,1)$).

**Παραδείγματα**

A) $U = B^0(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x|<1\}$

$u(x) = |x|^{-\alpha} \quad (x \in U,\ x \neq 0)$

• $u \in W^{1,p}(U) \iff \alpha < \frac{n-p}{p}$, $u \notin W^{1,p}$ για $p \geq n$.

**Απόδειξη** $\qquad |x|^2 = x_k x_k$

$$u_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}|x|^{-\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|x|^2\right)^{-\frac{\alpha}{2}}$$

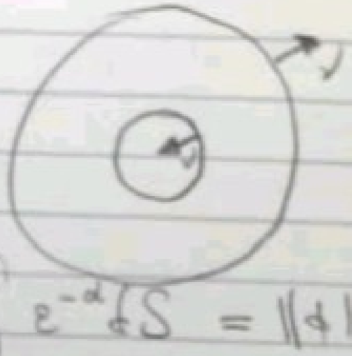
$$= \left(-\frac{\alpha}{2}\right)\left(|x|^2\right)^{-\frac{\alpha}{2}-1}\cancel{2}\,\delta_{x_i}x_k = -\alpha|x|^{-\alpha-2}x_i \quad (*)$$

Έστω $\phi \in C_c^\infty(U)$, και $\varepsilon > 0$ $\qquad \boxed{|Du|} = \frac{|\alpha|}{|x|^{\alpha+1}}$, $x \neq 0$

κλασική Παράγωγος

$$\int_{U-B(0,\varepsilon)} u\phi_{x_i}\,dx = -\int_{U-B(0,\varepsilon)} u_{x_i}\phi\,dx + \int_{\partial B(0,\varepsilon)} u\phi\nu^i\,dS$$

(Θεώρημα Απόκλισης)




$$\left|\int_{\partial B(0,\varepsilon)} u\phi\nu^i\,dS\right| \leq \|\phi\|_{L^\infty}\int_{\partial B(0,\varepsilon)}\varepsilon^{-\alpha}\,dS = \|\phi\|_{L^\infty}\,\varepsilon^{n-1-\alpha} \to 0$$

$\left(n-1 > \alpha \text{ διότι } \alpha < \frac{n-p}{p} = \frac{n}{p} - 1\right)$

---

(*) $Du = -\alpha\dfrac{x}{|x|^{\alpha+2}}$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{U-B(0,\varepsilon)} u_{x_i}\phi\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{U} u_{x_i}\phi\,\mathbb{1}_{U-B(0,\varepsilon)}\,dx$$

$$u_{x_i}\phi\,\mathbb{1}_{U-B(0,\varepsilon)} \longrightarrow u_{x_i}\phi$$

$$\left|u_{x_i}\phi\,\mathbb{1}_{U-B(0,\varepsilon)}\right| \le |u_{x_i}|\,|\phi| \in L^1(V)$$

$V \subset\subset U$

$(\operatorname{supp}\phi)$

Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{U} u_{x_i}\phi\,\mathbb{1}_{U-B(0,\varepsilon)}\,dx = \int_U u_{x_i}\phi\,dx.$$

Παρομοίως επειδή $u\in L^1_{loc}$, $\phi$ συμπαγή φορέα

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{U-B(0,\varepsilon)} u\phi_{x_i}\,dx = \int_U u\phi_{x_i}\,dx$$

$$\therefore \quad \int_U u\phi_{x_i}\,dx = -\int_U u_{x_i}\phi\,dx.$$

Σχό

$$|Du| = \frac{|\alpha|}{r^{\alpha+1}}$$

$$\int |Du|^p dx = |\alpha| \int_{S^{n-1}} \left( \int_0^1 \left(\frac{1}{r^{\alpha+1}}\right)^p r^{n-1} dr \right) dS < \infty$$

ΑΝ $n-1-p(\alpha+1) > -1$

$$p(\alpha+1) < n \iff u \in W^{1,p}(U), \ \alpha < \frac{n-p}{p}.$$

#

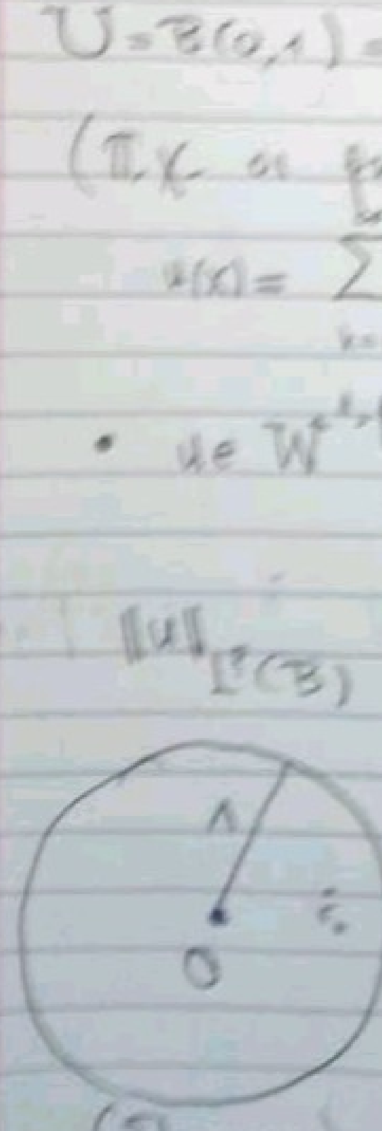
B) Έστω $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ αριθμήσιμο, πυκνό υποσύνολο του $U = B(0,1) = \{|x|<1\}$

(Π.χ. οι ρητοί στο $(0,1)$ για $n=1$)

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |x-r_k|^{-\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k, \quad f_k(x) = \frac{1}{2^k}|x-r_k|^{-\alpha}$$

- $u \in W^{1,p}$, $0 < \alpha < \frac{n-p}{p}$

1) $\|u\|_{L^p(B)} \le \sum \|f_k\|_{L^p(B)}$




$$\int_{B_1} f_k^p(x)\, dx \le \int_{|x-r_k|\le 2} f_k^p(x)\, dx$$

$$= C \int_0^2 \frac{1}{2^{kp}} \rho^{-\alpha p} \rho^{n-1} d\rho$$

(Σχήμα)

$$= C' \frac{1}{2^{kp}} \rho^{-\alpha p + n} \Big|_0^2 = C' \frac{1}{2^{kp}} 2^{n - \alpha p}$$

$$\left( n > \alpha p \Leftrightarrow \alpha < \frac{n}{p}. \checkmark \right)$$

$$= C' \, 2^{n - \alpha p - kp}$$

$$\|f_k\|_{L^p(B_1)} \leq (C')^{1/p} \, 2^{\frac{n}{p} - (\alpha + k)}$$

$$\sum_k \|f_k\|_{L^p(B_1)} \leq (C')^{1/2} \, 2^{\frac{n}{p} - \alpha} \sum_k 2^{-k} < \infty.$$

II) $$|Du(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\alpha|}{|x - r_k|^{\alpha+1}}$$

$$\|Du\|_{L^p} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |\alpha| \left\| \frac{1}{|\cdot - r_k|^{\alpha+1}} \right\|_{L^p}$$

$$\int_0^2 \rho^{-(\alpha+1)p} \rho^{n-1} \, d\rho = C_n \rho^{-(\alpha+1)p + n} \Big|_0^2$$

$$= C_n 2^{n - (\alpha+1)p}$$

$$\left( n > (\alpha+1) p \Leftrightarrow 0 < \alpha < \frac{n-p}{p} \right).$$

$$\therefore \|Du\|_{L^p} < \infty.$$

$\square$

## Διάλεξη 2

### 1. Χώροι Sobolev

**α) Ασθενείς Παράγωγοι**

Έστω $u \in C^1(U)$, $\varphi \in C_c^\infty(U)$, $U$ ανοικτό $\subset \mathbb{R}^n$

$$\int_U u\varphi_{x_i}\,dx = \int_U \left[\frac{\partial}{\partial x_i}(u\varphi) - u_{x_i}\varphi\right]dx = -\int_U u_{x_i}\varphi\,dx$$

(μέσω Θεωρ. απόκλισης)

Ορ. 1: $u \in L^1_{loc}(U)$. Η ασθενής παράγωγος $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ ορίζεται αν $\exists\, v \in L^1_{loc}$ έτσι ώστε

$$(*) \quad \int_U u\varphi_{x_i}\,dx = -\int_U v\varphi\,dx \quad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(U).$$

Ορίζουμε $\frac{\partial u}{\partial x_i} := v$.

Σημ: Ο ορισμός είναι εντάξει διότι η $v$ είναι μοναδική. Πράγματι αν $\tilde v \in L^1_{loc}$ επίσης ικανοποιεί την (*) τότε

$$-\int_U \tilde v\varphi\,dx = \int_U u\varphi\,dx \quad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(U)$$

$$\therefore \int (v - \tilde v)\varphi\,dx = 0, \quad \text{— " —}$$