Το gradient της συνάρτησης

(M, g) πολ/τα Riemann, $f : M \to \mathbb{R}$ C^∞

Διαφορικό df 1-μορφή $df_p : T_pM \to \mathbb{R}$ γραμμική

$$df_p(X) = X(f)$$

nabla

Ορίζουμε: $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$ ως $\nabla f = df^\sharp$

Δηλαδή ∇f το μοναδικό με την ιδιότητα

$$X(f) = \langle \nabla f, X \rangle \quad \text{για κάθε } X \in \mathfrak{X}(M)$$

Τοπική έκφραση: (U, φ) C^∞ χάρτης $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \quad \rightsquigarrow \quad \nabla f = df^\sharp = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

δ^{ij} στον $\mathbb{R}^n$

Πως ορίζονται ανώτερες παράγωγοι της f; π.χ. Hess f

$\to$ $X(Y(f))$? $X\left(Y^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) = X(Y^i)\frac{\partial f}{\partial x^i} + X^k Y^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i}$

εξ. παράγωγος 1-μορφής

$(d(df) = d^2 f = 0)$

$\rightsquigarrow$ παραγωγίζεται και το Y επομένως δεν εξαρτάται μόνο από το Y_p.

$\to$ $\nabla \underbrace{df}_{\text{1-μορφή}}$ ή $\nabla(\underbrace{\nabla f}_{\text{δ. πεδίο}})$ $\rightsquigarrow$ πώς παραγωγίζονται 1-μορφές ή διανυσματικά πεδία σε μια πολλ/τα ή πολλ/τα Riemann;

Στον $\mathbb{R}^n$ ορίζεται απόκλιση ενός δ. πεδίου $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$

ως $\operatorname{div} Y = \frac{\partial Y^1}{\partial x^1} + \dots + \frac{\partial Y^n}{\partial x^n} = \frac{\partial Y^i}{\partial x^i} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

Αν $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ supp φ συμπαγές τότε $\int \varphi \cdot \operatorname{div} Y \, dx^1 \dots dx^n = -\int \nabla\varphi \cdot Y \, dx^1 \dots dx^n$

Θ. απόκλισης (Integration by parts)

?

Έστω (M,g) πολ/τα Riemann, (U,φ) C^∞ χάρτης $\varphi=(x^1,\dots,x^n)$

$$g = g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j \quad \text{στο } U.$$

Πώς θα ορίσουμε $\operatorname{div} Y$ $\left(Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ στο U

ώστε $\forall f \in C^\infty(U)$, $\operatorname{supp} f \subseteq U$ συμπαγές

$$\int_U f \cdot \operatorname{div} Y \cdot dV_g = -\int_U \langle \nabla f, Y \rangle \, dV_g \; ;$$

Ανεξάρτητο της επιλογής χάρτη ('Ασκηση)

$$g_{\mathbb{R}^n}\left(\nabla^{\mathbb{R}^n} f, \sqrt{\det(g_{ij})}\cdot Y\right)$$

$$\int_U \langle \nabla f, Y\rangle \, dV_g = \int_U Y(f)\, dV_g = \int_{\varphi(U)} Y^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \dots dx^n$$

$$= -\int_{\varphi(U)} f \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^i}\left(Y^i \sqrt{\det(g_{ij})}\right)}_{\operatorname{div}_{\mathbb{R}^n}\left(\sqrt{\det(g_{ij})}\cdot Y\right)} dx^1 \dots dx^n = -\int_{\varphi(U)} f \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(Y^i \sqrt{\det g_{ij}}\right)\right)}_{=:\operatorname{div}_g Y} \underbrace{\sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \dots dx^n}_{dV_g}$$

Θα δούμε ότι αν $Y \in \mathfrak{X}(M)$, [illegible] ορίζεται $\mathrm{div}_g Y \in C^\infty(M)$

ώστε $$\mathrm{div}_g Y = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}\left(Y^i \sqrt{\det(g_{ij})} \right)$$

και $$\int_M f \, \mathrm{div}_g Y \, dV_g = - \int_M \langle \nabla f , Y \rangle \, dV_g$$

για κάθε $f \in C^\infty(M)$ με $\mathrm{supp}\, f \subseteq M$ συμπαγές.

↳ Θα χρειαστεί να καταλάβουμε πως πρέπει να παραγωγίζουμε δ. πεδία.

(*) Τώρα ορίζεται και ο τελεστής του Laplace $\Delta f = \mathrm{div} \nabla f$.

Παραγώγιση δ. πεδίων

$p \longmapsto (x^1(p), \dots, x^n(p))$

$X: U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

Η επιλογή πάρτε ορίζει $L: T_{\gamma(0)}M \to T_{\gamma(t)}M$

$\xi^i \partial_i\big|_{\gamma(0)} \longmapsto \xi^i \partial_i\big|_{\gamma(t)}$

Στον $\mathbb{R}^n$, $X = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$

$$\bar{\nabla}_X Y\Big|_p = X(Y^i)\frac{\partial}{\partial x^i} = X^k \frac{\partial Y^i}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x^i} = \lim_{t\to 0} \boxed{\frac{Y^i(\gamma(t)) - Y^i(\gamma(0))}{t}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (*)$$

$p = \gamma(0)$, $\gamma(t)$, $X = \gamma'(0)$

Κατευθυνόμενη παράγωγος του Y στη διεύθυνση $X(p)$

$$= \lim_{t\to 0} \boxed{\frac{Y(\gamma(t)) - Y(\gamma(0))}{t}} \quad (**)$$

1) Η έκφραση $(**)$ δεν έχει νόημα σε C^∞ πολλαπλότητα γιατί $Y(\gamma(t)) \in T_{\gamma(t)}M$, $Y(\gamma(0)) \in T_{\gamma(0)}M$ ανήκουν σε διαφορετικούς δ. χώρους.

2) Η έκφραση $(*)$ εξαρτάται από κάποιο σύστημα συντεταγμένων

$\Rightarrow$ η παράγωγη δ. πεδίων στον $\mathbb{R}^n$ δεν γενικεύεται, σε μια C^∞ πολ/τα M, χωρίς επιπλέον δομή

Συνοχή σε μια δ. δέσμη (connection)

Έστω E μια δ. δέσμη πάνω από μια C^∞ πολ/τα M, $\pi : E \to M$ η απεικόνιση προβολή, $\Gamma(E) = \{ \sigma : M \to E,\ C^\infty \text{ τομή της } E \}$

nabla

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$$ λέγεται συνοχή της E αν

$$(X, \sigma) \longmapsto \nabla_X \sigma$$

συναλλοίωτη παράγωγος

1) $\forall\ f_1, f_2 \in C^\infty(M)$, $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$, $\sigma \in \Gamma(E)$: $\nabla_{f_1 X_1 + f_2 X_2} \sigma = f_1 \nabla_{X_1} \sigma + f_2 \nabla_{X_2} \sigma$

C^∞-γραμμική (σε αντίθεση με $\mathcal{L}_X Y$ π.χ)

2) $\forall\ a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(E)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$: $\nabla_X (a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2) = a_1 \nabla_X \sigma_1 + a_2 \nabla_X \sigma_2$

3) $\forall\ f \in C^\infty(M)$, $\sigma \in \Gamma(E)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$: $\nabla_X (f \cdot \sigma) = X(f) \cdot \sigma + f \nabla_X \sigma$ (Leibniz).

Πρόταση (Τοπικότητα). Έστω ∇ μια συνοχή σε μια δ.δέσμη $\pi: E \to M$ και $X, \tilde{X} \in \mathcal{X}(M)$, $\sigma, \tilde{\sigma} \in \Gamma(E)$ ώστε για κάποιο $U \subseteq M$ ανοιχτό $p \in U$ και $X = \tilde{X}$, $\sigma = \tilde{\sigma}$ στο U. Τότε

$$\nabla_X \sigma \big|_p = \nabla_{\tilde{X}} \tilde{\sigma} \big|_p \in E_p = \pi^{-1}(p) \qquad \left(E = \bigsqcup_{p \in M} E_p \right)$$

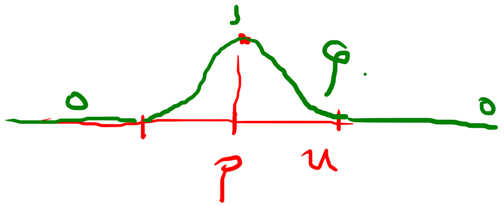
Απόδειξη : i) $\nabla_X \sigma = \nabla_X \tilde{\sigma}$ $\iff$ $\nabla_X(\sigma - \tilde{\sigma}) = 0$, $\sigma - \tilde{\sigma} = 0$ στο U

αν $\sigma = \tilde{\sigma}$ στο U

Επομένως αρκεί ν.δ.ο $\nabla_X \sigma = 0$ αν $\sigma = 0$ στο U

(bump function

Έστω $\varphi \in C^\infty(M)$, $\varphi(p) = 1$, $\operatorname{supp}\varphi \subset U$. Τότε



- $\varphi\sigma = 0 = \sigma$ στο U
- $\varphi\sigma = 0$ στο $M \setminus U$

$\sigma_p = 0$

$$\to \nabla_X(\varphi\sigma)\big|_p = X_p(\varphi)\cdot \cancel{\sigma\big|_p}^{\,0} + \underbrace{\varphi(p)}_{=1}\cdot \nabla_X \sigma\big|_p = \nabla_X \sigma\big|_p$$

$\varphi(p) = 1$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla_X \sigma\big|_p = 0}$$

αλλά $\varphi\sigma = 0$ στο M $\longrightarrow$ $0\cdot\varphi\sigma = \varphi\sigma$

$$\Rightarrow \underbrace{\nabla_X(0\cdot\varphi\sigma) = 0\cdot\nabla_X \varphi\sigma = 0.}$$

2) $\nabla_X \sigma = \nabla_{\tilde{X}} \sigma$ αν $X = \tilde{X}$ στο U

$\Leftrightarrow \nabla_X \sigma = 0$ αν $X = 0$ στο U

$$\left.\begin{aligned} &\nabla_{\varphi X} \sigma\big|_p = \varphi(p) \nabla_X \sigma\big|_p \underset{\varphi(p)=1}{=} \nabla_X \sigma\big|_p \\ &\left.\begin{aligned} &X = 0 \text{ στο } U \\ &\varphi = 0 \text{ στο } M \setminus U \end{aligned}\right\} \varphi X = 0 \text{ στο } M \Rightarrow \nabla_{\varphi X} \sigma = 0 \end{aligned}\right\} \nabla_X \sigma\big|_p = 0$$

Πρόταση (Περιορισμός συνοχής) ∇ συνοχή σε δ.δ. $\pi : E \to M$

$U \subseteq M$ ανοιχτό. Υπάρχει μια μοναδική συνοχή ∇^U στη δ.δέσμη $\pi : E_U \to M$, $E_U = \pi^{-1}(U)$, ώστε για κάθε $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$ και $\tilde{\sigma} \in \Gamma(E)$

$$\nabla^U_{\tilde{X}|_U} \tilde{\sigma}|_U = \nabla_{\tilde{X}} \tilde{\sigma} \Big|_U \quad (*)$$

Απόδειξη. Έστω $X \in \mathfrak{X}(U)$, $\sigma \in \Gamma(E_U)$, $p \in U$ και $\varphi \in C^\infty(M)$, $\operatorname{supp}\varphi \subseteq V$ και $\varphi|_U = 1$ για κάποιο ανοιχτό $V \supseteq \overline{U}$, $p \in V$.

$$\tilde{X} = \begin{cases} \varphi X & \text{στο } U \\ 0 & \text{στο } M \setminus U \end{cases} \implies \tilde{X}|_U = X$$

$$\tilde{\sigma} = \begin{cases} \varphi \sigma & \text{στο } U \\ 0 & \text{στο } M \setminus U \end{cases} \qquad \tilde{\sigma}|_U = \sigma$$

Lee "Smooth manifolds", διαμερίσεις της μονάδας

$\tilde{X}|_U = X \quad , \quad \tilde{\sigma}|_U = \sigma$

Ορίζουμε $\nabla^U_X \sigma \Big|_p = \nabla^U_{\tilde{X}|_U} \tilde{\sigma}|_U \Big|_p = \underbrace{\nabla_{\tilde{X}} \tilde{\sigma} \Big|_p}$. Το δεξί μέλος είναι ανεξάρτητο των επεκτάσεων $\tilde{X}, \tilde{\sigma}$ αφού όλες θα συμφωνούν με X, σ σε γειτονιά του p

∇^U είναι πράγματι συνοχή στην E_U ⇝ ελέγχουμε τα αξιώματα (Άσκηση)

<u>Πρόταση</u>. Έστω ∇ συνοχή στη $\pi : E \to M$, $X, \tilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$, $\sigma \in \Gamma(E)$, $p \in M$ και $X(p) = \tilde{X}(p)$. Τότε $\nabla_X \sigma \Big|_p = \nabla_{\tilde{X}} \sigma \Big|_p$

<u>Απόδειξη</u>. Αρκεί ν.δ.ο. $\nabla_X \sigma \Big|_p = 0$ αν $X(p) = 0$

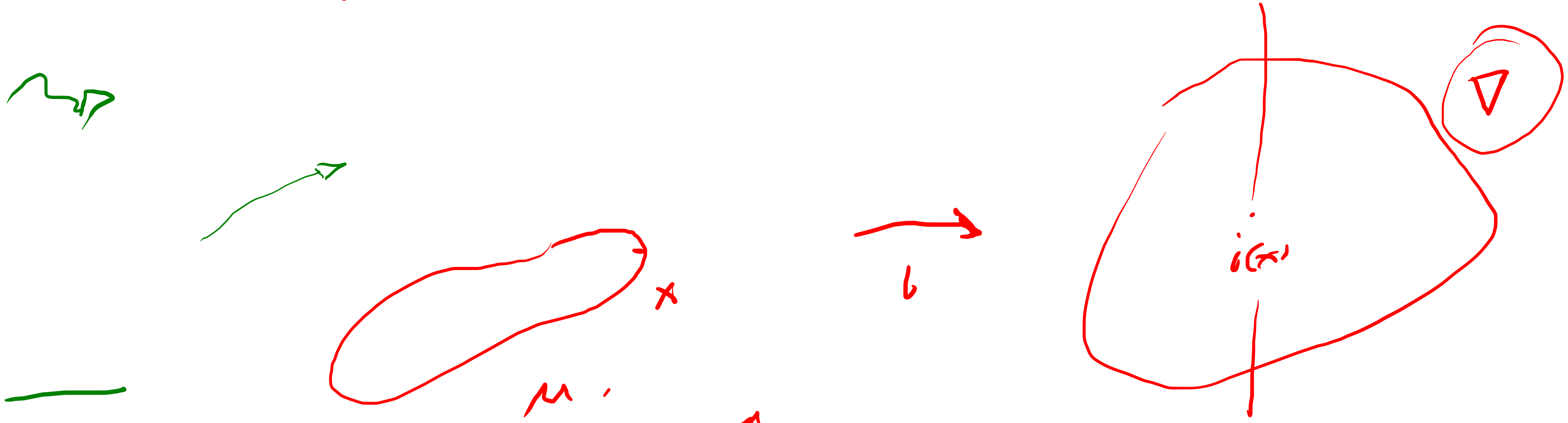
(U, φ) C^∞ χάρτης $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ $p \in U$. $X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ και $\xi^i(p) = 0 \ \forall i$

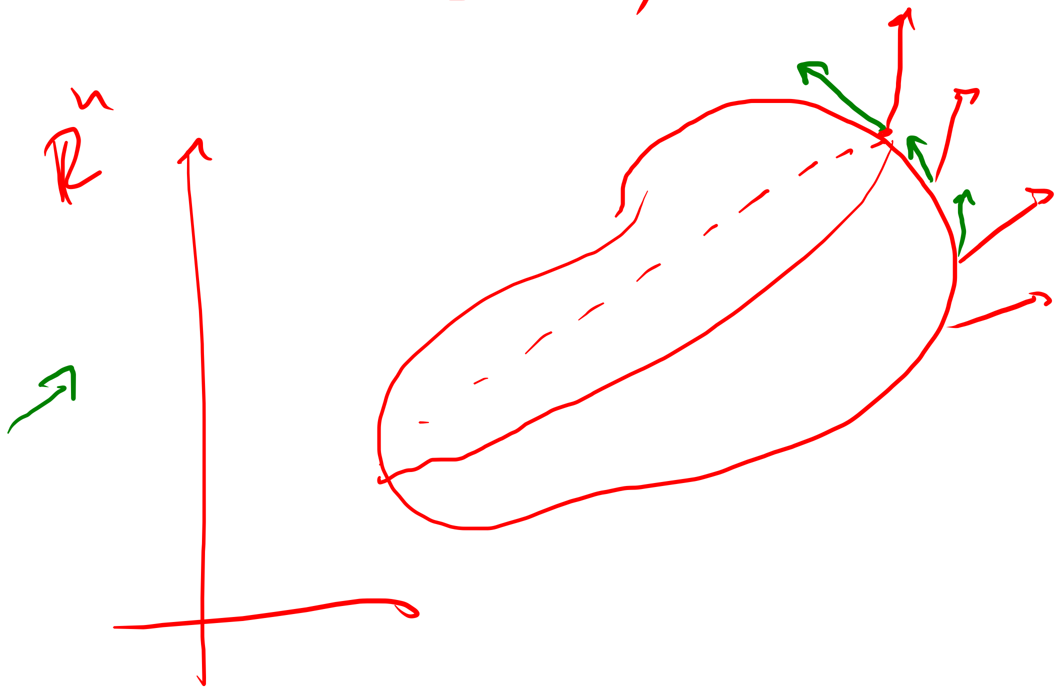
$$\nabla_X \sigma \Big|_p = \nabla^U_{X|_U} \sigma|_U \Big|_p = \nabla^U_{\xi^i \partial/\partial x^i} \sigma|_U \Big|_p = \xi^i(p) \nabla^U_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \sigma|_U \Big|_p = 0$$

$$\begin{tikzcd} i^*E \arrow[d] & E \arrow[d] \\ i : M \arrow[r] & N \end{tikzcd}$$

$E_{i(x)}$.

$\left(\gamma : I \xrightarrow{\text{immersion}} M \quad \nabla.\right)$





Συνεπώς αν ∇ είναι συνοχή σε μια δ.δ. $E \to M$ και $\underline{\sigma} \in \Gamma(E)$, $v \in T_pM$, μπορούμε να ορίσουμε

$$\underbrace{\nabla_v \sigma}_{} \in T_pM \quad \text{ως} \quad \nabla_v \sigma := \nabla_X \sigma \big|_p \quad \text{όπου } X \in \mathfrak{X}(M) \text{ με } X(p) = v$$

↳ αφού είναι ανεξάρτητο της επέκτασης X.

↳ $\forall\, p \in M$, ∇ επάγει μια απεικόνιση

$$\nabla : T_pM \times \Gamma(E) \to E_p$$

→ $\nabla_v(a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2) = a_1 \nabla_v \sigma_1 + a_2 \nabla_v \sigma_2$

→ $\nabla_{av+bw}\sigma = a\nabla_v \sigma + b\nabla_w \sigma$

→ $\nabla_v(f\sigma) = f(p)\nabla_v \sigma + v(f)\sigma(p)$.

Συνοχές στην εφαπτόμενη δέσμη $\Gamma(E)$

$$\nabla : \mathcal{X}(TM) \times \mathcal{X}(TM) \to \mathcal{X}(TM) \quad \text{συνοχή}$$

→ Αν $U \subseteq M$ ανοικτό και $E_i : U \to TM$ τοπικό πλαίσιο

$\left(E_i \in \mathcal{X}(U) \right.$, $\{E_i(p)\}$ βάση του $T_pU \cong T_pM \quad \forall \; p \in U \left. \right)$

Τότε κάθε $X, Y \in \mathcal{X}(U)$ γράφονται $X = X^i E_i$, $Y = Y^j E_j$ στο U

και $\nabla_X Y = \nabla^U_{X^i E_i}(Y^j E_j) = X^i \nabla_{E_i}(Y^j E_j) = X^i\left(E_i(Y^j) \cdot E_j + Y^j \nabla_{E_i} E_j \right)$

Γράφοντας $\nabla_{E_i} E_j = \Gamma^k_{ij} E_k$ στο U, $i, j, k = 1, \ldots, n$

έχουμε $\nabla_X Y = \underbrace{\left(X^i E_i(Y^k) + X^i Y^j \Gamma^k_{ij} \right)}_{} E_k$ $\qquad \Gamma^k_{ij} : U \to \mathbb{R} \quad C^\infty$

συντελεστές της συνοχής

$X(Y^k)$

↳ τοπική έκφραση της ∇.

Παραδείγματα

1) Η Ευκλείδεια συνοχή στον $\mathbb{R}^n$: $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$

$$\bar{\nabla}_X Y = X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \quad (*)$$

⤳ Χρησιμοποιήσατε το $\underbrace{\text{ολικό}}$ πλαίσιο $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$

2) Επαγόμενη συνοχή σε μια υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^n$

Έστω $M^k \subseteq \mathbb{R}^n$ μια υποπολλαπλότητα (εμφυτευμένη) του $\mathbb{R}^n$, $i: M \to \mathbb{R}^n$ εμφύτευση.

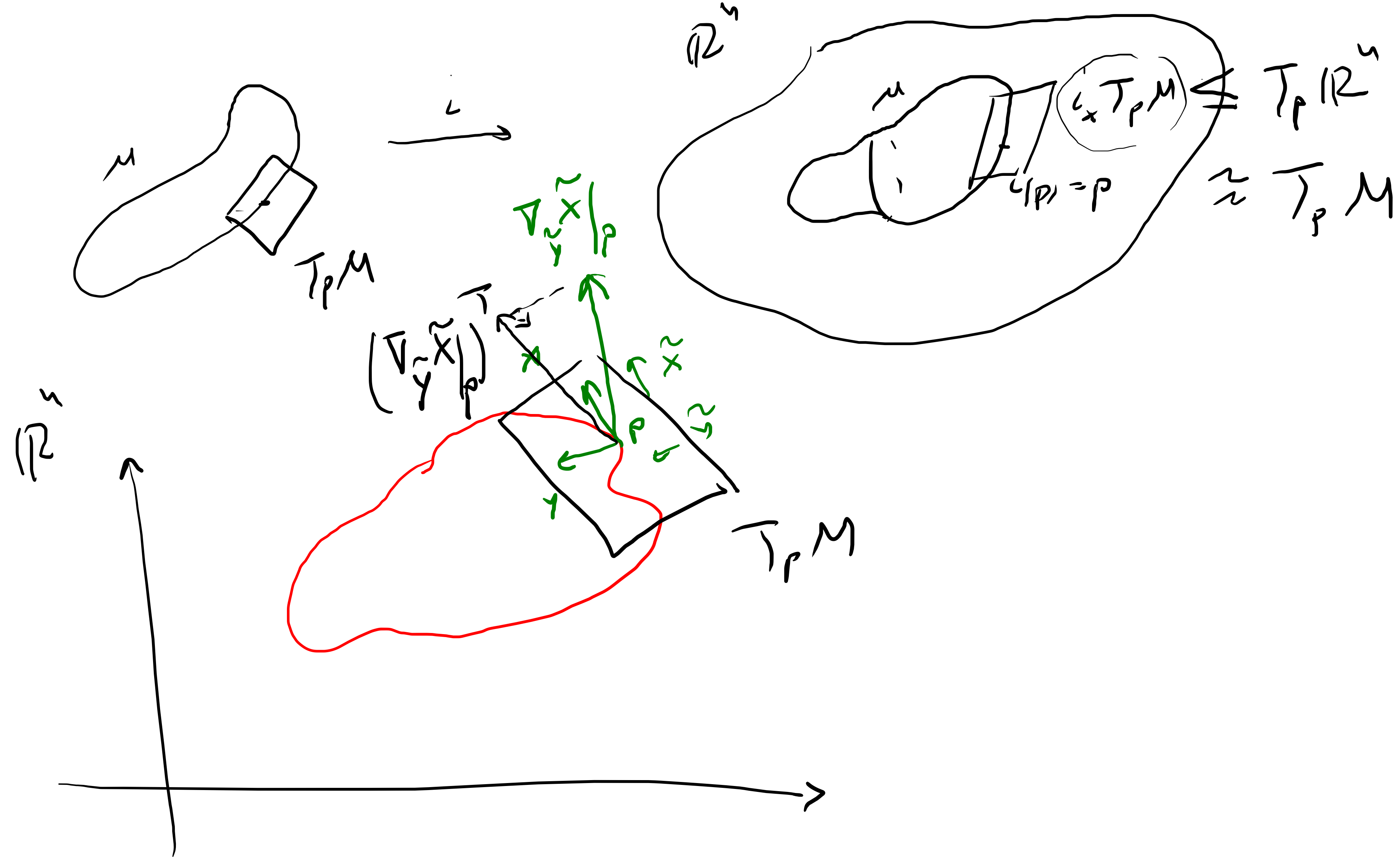
Ορίζουμε $\nabla^T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ συνοχή στην TM

ως $\nabla^T_X Y\big|_p = \left(\bar{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}\big|_p \right)^T$, όπου $p \in M \subseteq \mathbb{R}^n$ και

$\tilde{X}\big|_M = X \quad \tilde{Y}\big|_M = Y$

$X^T = pr_{T_pM} X$, $X \in T_p\mathbb{R}^n = T_pM \oplus \mathbb{R}$

↳ ορθή προβολή στο $T_pM \simeq i_* T_pM$


M
ι
T_pM
$\mathbb{R}^n$
M
$\iota_* T_pM \leq T_p\mathbb{R}^n$
$\cong T_pM$
$\iota(p) = p$
$\nabla_{\tilde{Y}} \tilde{X}|_p$
$(\nabla_{\tilde{Y}} \tilde{X}|_p)^T$
X
$\tilde{X}$
$\tilde{Y}$
p
Y
T_pM
$\mathbb{R}^n$

∇^T είναι καλά ορισμένη απεικόνιση $\nabla^T: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$;

Έστω $p \in M \subseteq \mathbb{R}^n$ και (U, φ) C^∞ χάρτης του $\mathbb{R}^n$ (η U ανοιχτό) προσαρμοσμένος στην M γύρω από το p : $p \in U$ και $U \cap M = \{x^{k+1} = \dots = x^n = 0\}$ ↳ ανοιχτό στην M.

$\tilde{\varphi} : U \cap M \to \mathbb{R}^k$

$\varphi(q) = (x^1(q), \dots, x^k(q))$

C^∞ χάρτης της M γύρω από το p.

$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_q, \dots, \frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_q \right\} \subseteq T_q M$ ενώ με Gram-Schmidt

μπορούμε να βρούμε ορθοκανονικό πλαίσιο $\{E_1, \dots, E_n\}$ στο U ώστε

$\operatorname{span}(E_{k+1}(x), \dots, E_n(x)) \perp \operatorname{span}(E_1(x), \dots, E_k(x))$ $\forall x \in U \cap M$

$= \operatorname{span}\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_x, \dots, \frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_x \right) = T_x M$

Τότε $\forall$ $q \in M \cap U$ $\quad V \in T_q \mathbb{R}^n = \mathrm{span}\left(E_1(q), \dots, E_n(q)\right)$

$$\underline{V = V^i} E_i \quad \text{και} \quad V^T = \sum_{i=1}^{k} V^i E_i \in T_q M$$

Επομένως

$$\overset{T}{\nabla}_X Y\Big|_p = \left(\overline{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}\Big|_p\right)^{T} = \sum_{i=1}^{k}\left[\tilde{X}^a(p) E_a\Big|_p(\tilde{Y}^i) + \tilde{X}^a(p)\,\tilde{Y}^b(p)\,\Gamma^i_{ab}(p)\right] E_i\Big|_p$$

(όπου $a, b = 1, \dots, k$, $\tilde{X} = \tilde{X}^a E_a$, $\tilde{Y} = \tilde{Y}^b E_b$ $\quad i = 1, \dots, k$

και Γ^i_{ab} συντελεστές της $\overline{\nabla}$, ως προς το πλαίσιο $\{E_1, \dots, E_n\}$

$$= \sum_{i=1}^{k}\left[X^a(p) E_a\Big|_p(Y^i) + X^a(p)\,Y^b(p)\,\Gamma^i_{ab}(p)\right] E_i\Big|_p$$

εξαρτάται μόνο από τα X, Y και όχι τις επεκτάσεις τους.

όπου $\tilde{X}\Big|_M = X$, $\tilde{Y}\Big|_M = Y$, $X = X^a E_a$, $Y = Y^b E_b$

και χρησιμοποιήσαμε ότι $E_a\big|_p(\tilde{Y}^i) = E_a\big|_p(Y^i)$, αφού $\tilde{Y}^i = Y^i$ στο $M \cap U$

∇^T συνοχή $\rightsquigarrow$ έλεγχος αξιωμάτων (άσκηση) (χρειάζεται να ξέρουμε να κατασκευάζουμε επεκτάσεις συναρτήσεων και δ-πεδίων από το M στον $\mathbb{R}^n$ - Lee "Smooth manifolds".

Σχέση επαγόμενης συνοχής με την επαγόμενη μετρική

$(M, \bar{g} = i^* g_{\mathbb{R}^n}, \nabla^T)$

$X \in T_pM$, $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ $\longrightarrow$ επέκταση $\tilde{X}, \tilde{V}, \tilde{W}$ σε δ-πεδία στον $\mathbb{R}^n$

I

$$X(\bar{g}(V,W)) = \tilde{X}|_p(g_{\mathbb{R}^n}(\tilde{V},\tilde{W})) = g_{\mathbb{R}^n}(\bar{\nabla}_{\tilde{X}(p)}\tilde{V}|_p, \tilde{W}|_p) + g_{\mathbb{R}^n}(\tilde{V}|_p, \bar{\nabla}_{\tilde{X}(p)}\tilde{W}|_p)$$

$\tilde{V}|_M = i_* V$

$$= g_{\mathbb{R}^n}((\bar{\nabla}_{\tilde{X}(p)}\tilde{V})^T, \tilde{W}|_p) + g_{\mathbb{R}^n}(\tilde{V}|_p, (\bar{\nabla}_{\tilde{X}(p)}\tilde{W})^T)$$

$\tilde{W}|_M = i_* W$

$$= \bar{g}(\nabla^T_{X(p)} V, W|_p) + \bar{g}(V|_p, \nabla^T_{X(p)} W)$$

$X, \tilde{X}, Y, \tilde{Y}$: συσχετισμένα $\left(\begin{array}{l} i_* X(p) = \tilde{X}(p) \\ i_* Y(p) = \tilde{Y}(p) \end{array} \right.$

(II)

$$[X,Y]\big|_p = [\tilde{X},\tilde{Y}]\big|_p = \left(\tilde{X}^i \frac{\partial \tilde{Y}^k}{\partial x^i} - \tilde{Y}^i \frac{\partial \tilde{X}^k}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$= \bar{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} - \bar{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{X} = \nabla^T_X Y - \nabla^T_Y X \quad \left(\text{αφού } [X,Y]\big|_p \in T_pM \right.$$

$$\bar{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}\big|_p = \nabla^T_X Y\big|_p + V \qquad , V \perp T_pM$$

$$\bar{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{X}\big|_p = \nabla^T_Y X\big|_p + W \qquad W \perp T_pM$$

$$\Rightarrow \bar{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}\big|_p - \bar{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{X}\big|_p = \underbrace{\nabla^T_X Y\big|_p}_{\in T_pM} - \nabla^T_Y X\big|_p + \underbrace{V - W}_{\perp T_pM} \left.\begin{array}{l} \\ \in T_pM \end{array}\right\} \Rightarrow V - W = 0$$

Θα δούμε ότι οι ιδιότητες (I) και (II), που ισχύουν αυτόματα για την επαγόμενη συνοχή μιας υποπολλαπλότητας του $\mathbb{R}^n$ καθορίζουν μια μοναδική συνοχή στην εφαπτόμενη δέσμη μιας πολλαπλότητας Riemann (M, g)

Η εφαπτόμενη δέσμη δέχεται τουλάχιστον μια συνοχή (μπορεί κανείς επίσης να χρησιμοποιήσει διαμερίσεις της μονάδος για να ενώσει Ευκλείδειες συνοχές)

Πρόταση: Έστω ∇^1, ∇^2 δύο συνοχές στην εφαπτόμενη δέσμη TM μιας διαφορικής πολλ/τας M. Τότε η απεικόνιση

$$D : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M) \quad , \quad D(X,Y) = \nabla^1_X Y - \nabla^2_X Y$$

ικανοποιεί $D(fX, Y) = D(X, fY) = f D(X,Y)$ για κάθε $f \in C^\infty(M)$

Απόδειξη: $D(fX,Y) = \nabla^1_{fX} Y - \nabla^2_{fX} Y = f(\nabla^1_X Y - \nabla^2_X Y) = f D(X,Y)$

$$D(X, fY) = \nabla^1_X (fY) - \nabla^2_X (fY) = f \nabla^1_X Y + \cancel{X(f) Y} - f \nabla^2_X Y + \cancel{X(f) Y}$$

$$= f D(X,Y).$$

Ορίζεται επομένως $\forall$ $p \in M$ $D_p : T_pM \times T_pM \to T_pM$

$D_p(v,w) = D(\tilde{V}, \tilde{W})$, όπου $\tilde{V}, \tilde{W}$ επεκτάσεις των v, w αντίστοιχα

D_p ανεξάρτητο των επεκτάσεων λόγω της προηγούμενης Πρότασης (Π.χ. συντεταγμένες)

↳ Γενικά $(2,1)$-τανυστής σε ένα δ-χώρο V είναι

$L : V \times V \to V$ διγραμμική (και αντίστοιχα (k,l) τανυστής)

$\Leftrightarrow L \in V^* \otimes V^* \otimes V = T^{(2,1)}V$ όπου αν $w_1 \in V^*$, $w_2 \in V^*$, $X \in V$

$(w_1 \otimes w_2 \otimes X)(v_1, v_2) = w_1(v_1) \cdot w_2(v_2) \cdot X$

και $V^* \otimes V^* \otimes V = \text{span}\left(v^i \otimes v^j \otimes v_k \right)$ $v_1, \ldots, v_n$ βάση του V
$v^1, \ldots, v^n$ δυϊκή βάση

$\Rightarrow \quad D_p \quad (2,1)$ τανυστής

↳ $T^{(2,1)}M = \bigsqcup_{p\in M} T_p^{(2,1)}M$ δέσμη $(2,1)$ τανυστών

$D \in \Gamma(T^{(2,1)}M)$ τομή της $T^{(2,1)}M$.

<u>Προσοχή</u> $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$ δεν είναι $(2,1)$ τανυστής

γιατί δεν ικανοποιεί $\nabla_X fY = f\nabla_X Y$

όμως η <u>διαφορά</u> δύο συνοχών <u>είναι</u> τανυστής.