

## Θ6. Διαφορική Γεωμετρία 2

### Μήνας 1

1. Τι είναι η Γεωμετρία Riemann. Διαφορικές πολλαπλότητες, διανυσματικές δέσμες, δέσμες τανυστών.
2.
  - Μετρική Riemann
  - Κάθε διαφορική πολλαπλότητα εφοδιάζεται με κάποια μετρική Riemann.
  - Ισομετρίες, σύμμορφες μετρικές Riemann, σύμμορφες αμφιδιαφορίσεις, επίπεδες πολλαπλότητες Riemann.
  - Τοπική αναπαράσταση μιας μετρικής Riemann, ορθοκανονικά πλαίσια.
3.
  - Υποπολλαπλότητες Riemann. Παραδείγματα: γραφήματα και επιφάνειες εκ περιστροφής - σφαίρα και τόρος
  - Καρτεσιανά γινόμενα πολλαπλοτήτων Riemann, και παραμορφωμένα γινόμενα (warped products).
  - Riemannian submersions. Η μετρική στον προβολικό χώρο  $\mathbb{R}P^n$ . Ο μιγαδικός προβολικός χώρος  $CP^n$  και η μετρική Fubini–Study.
4.
  - Επέκταση μιας μετρικής Riemann στις δέσμες τανυστών. Ίχνος.
  - Ο όγκος σε μια πολλαπλότητα Riemann.
  - Το gradient μιας συνάρτησης, η απόκλιση ενός διανυσματικού πεδίου (και γενικότερα ενός τανυστή) σε μια πολλαπλότητα Riemann, και ο τελεστής του Laplace μιας συνάρτησης. Το θεώρημα της απόκλισης.
  - Μήκος καμπύλων και η δομή μετρικού χώρου μιας πολλαπλότητας Riemann.

### Μήνας 2

1.
  - Τοπικά ομογενείς πολλαπλότητες Riemann. Σφαίρα και στερεογραφική προβολή. Ο υπερβολικός χώρος.
  - Συνοχές σε διανυσματικές δέσμες. Συνοχές στην εφαπτόμενη δέσμη. Τοπική αναπαράσταση μιας συνοχής - σύμβολα Christoffel. Συνοχή στην εφαπτόμενη δέσμη του  $\mathbb{R}^n$  και μιας υποπολλαπλότητας του  $\mathbb{R}^n$  - ιδιότητες.
2.
  - Η εφαπτόμενη δέσμη μιας διαφορικής πολλαπλότητας δέχεται μια συνοχή. Το σύνολο των συνοχών μιας διαφορικής πολλαπλότητας.
  - Η επέκταση μιας συνοχής στη δέσμη των τανυστών. Ανώτερες παράγωγοι μιας συνάρτησης.
  - Παραγωγήιση διανυσματικών πεδίων κατά μήκος μιας καμπύλης.

- Γεωδαισιακές και παράλληλη μετατόπιση κατά μήκος μιας καμπύλης.
  - Pullback συνοχή
3.
    - Μετρικές συνοχές. Στρέψη μιας συνοχής και συμμετρικές συνοχές. Η συνοχή Levi-Civita μιας μετρικής Riemann. Γεωδαισιακές και ισομετρίες.
    - Η εκθετική απεικόνιση και οι ιδιότητές της. Κανονικές συντεταγμένες.
    - Οι γεωδαισιακές στο επίπεδο, τη σφαίρα και τον υπερβολικό χώρο.
  4.
    - Πρώτη μεταβολή του μήκους μιας καμπύλης. Καμπύλες με ελαχιστο μήκος είναι γεωδαισιακές
    - Το Λήμμα του Gauss. Οι γεωδαισιακές ελαχιστοποιούν τοπικά το μήκος.

### Μήνας 3

1.
  - Πληρότητα και το Θεώρημα Hopf–Rinow.
  - Ο τανυστής καμπυλότητας Riemann. Μετάθεση παραγώγων. Συμμετρίες του τανυστή καμπυλότητας. Τοπική αναπαράσταση.
  - Επίπεδες πολλαπλότητες Riemann. Μια πολλαπλότητα Riemann είναι επίπεδη αν και μόνο αν ο τανυστής Riemann είναι μηδέν.
2.
  - Οι ταυτότητες του Ricci. Sectional, Ricci και Scalar καμπυλότητες. Ταυτότητα Bianchi. Εξίσωση Einstein.
  - Ο τανυστής Weyl και η διάσπαση του τανυστή Riemann. Το γινόμενο Kulkarni–Nomizu. Ο τανυστής Riemann σε διάσταση 2 και 3. Σύμμορφες ιδιότητες του τανυστή Weyl.
3.
  - Γεωμετρική σημασία των καμπυλοτήτων Ricci και scalar.
  - Η καμπυλότητα στη σφαίρα και τον υπερβολικό χώρο.
  - Πεδία Jacobi. Τοπική έκφραση μιας μετρικής με σταθερή sectional καμπυλότητα σε κανονικές συντεταγμένες.
  - Συζυγή σημεία.
  - Δεύτερη μεταβολή του μήκους.
  - Οι γεωδαισιακές παύουν να ελαχιστοποιούν μετά από ένα συζυγές σημείο. Cut locus και ιδιότητες. Injectivity radius.
4.
  - Το Θεώρημα Cartan–Hadamard.
  - Το Θεώρημα Bonnet–Myers. Το Θεώρημα μεγιστικής διαμέτρου του Cheng.
  - Comparison geometry
  - Ανασκόπηση σημαντικών θεωρημάτων. Synge, Preissman, Sphere Theorem, Splitting Theorem, Soul Theorem.