56

$$\ldots N(x)| \leq CM \sum_{|\alpha|=N} \left(\frac{2^{n+1} n^2 e}{r} \right)^N \left(\frac{r}{2^{n+2} n^3 e} \right)^N$$

$$\leq CM\, n^N \frac{1}{(2n)^N} = \frac{CM}{2^N} \to 0$$

...ollows $N \to \infty$.

$\square$

Επίσης

$$n^k = (1+1+\dots+1)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{|\alpha|!}{\alpha!}$$

$\Longrightarrow$

(5) $$|\alpha|! \leq n^{|\alpha|} \alpha!$$

$\therefore$ (3), (4), (5)

$$\| D^\alpha u \|_{L^\infty(B(x_0,r))} \leq CM \left(\frac{2^{n+1} n^2 e}{r} \right)^{|\alpha|} \alpha!$$

3. Θεωρούμε την (1) για

(6) $$|x - x_0| < \frac{r}{2^{n+2} n^3 e}$$

<u>Εκτίμηση Υπολοίπου</u> (Άσκηση 6)

$$R_N(x) = u(x) - \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha u(x_0)(x-x_0)^\alpha}{\alpha!}$$

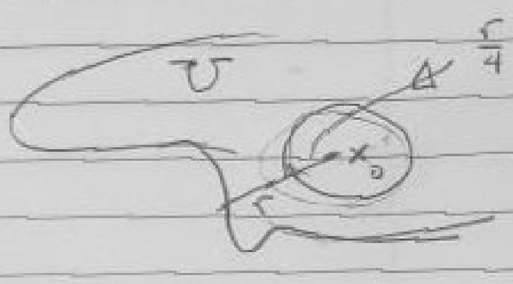
$$= \sum_{|\alpha|=N} \frac{D^\alpha u(x_0 + t(x-x_0))(x-x_0)^\alpha}{\alpha!}$$

(Υπόδειξη: $g(t) = u(x_0 + t(x-x_0))$)

Αναλυτικότητα (Διάλεξη 7 συνέχεια)

Θεώρημα 3

Έστω u αρμονική στο U. Τότε η $u(x)$ πραγματική αναλυτική στο U.



Απόδειξη

1. Θεωρούμε $x_0 \in U$

Θα δείξουμε ότι σε περιοχή του x_0 η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως,

(1) $$\sum_{\alpha} \frac{D^{\alpha}u(x_0)}{\alpha!} (x-x_0)^{\alpha} \quad . \quad \left(u \in C^{\infty} \right)$$

Επιλέγουμε $r := \frac{1}{4} \operatorname{dist}(x_0, \partial U)$

(2) $$M := \frac{1}{\alpha(n) r^n} \|u\|_{L^1(B(x_0, 2r))} < \infty$$

2. Για $|x-x_0| < r \Rightarrow B(x,r) \subset B(x_0, 2r)$

$\Theta 2 \Rightarrow$

(3) $$\|D^{\alpha}u\|_{L^{\infty}(B(x_0,r))} \leq M \left(\frac{2^{n+1} n}{r} \right)^{|\alpha|} |\alpha|^{|\alpha|}$$

$$\frac{e^k}{k!} < e^k \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k)^n}{n!} > \frac{k^k}{k!} \right) \quad [k \in \mathbb{N}]$$

$\Rightarrow$

(4) $$|\alpha|^{|\alpha|} \leq e^{|\alpha|} |\alpha|!$$