Εξετάσεις Γραμμικής Άλγεβρας ΙΙ
28 Μαρτίου 2023

Για το «Άριστα» απαιτούνται 10 μονάδες

Θέμα 1

Σωστό λάθος. Να δικαιολογηθούν οι απαντήσεις πλήρως.

(1) Δύο όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ίχνος και την ίδια ορίζουσα. 1 μονάδα

Σωστό, και μπορεί να δικαιολογηθεί είτε λέγοντας ότι $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ συνεπώς $\mathrm{tr}(QAQ^{-1}) = AQ^{-1}Q = \mathrm{tr}(A)$, και $\det(QAQ^{-1}) = \det(Q)\det(A)\det(Q^{-1}) = \det(A)$, είτε αναφέροντας ότι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολύωνυμο αφού

$$\det(x\mathbb{I}_n - QAQ^{-1}) = \det(xQQ^{-1} - QAQ^{-1}) = \det(Q)\det(x\mathbb{I}_n - A)\det(Q)^{-1} = \det(x\mathbb{I}_n - A)$$

και στην συνέχεια αναγνωρίζοντας το ίχνος και την ορίζουσα ως τους συντελεστές του x^{n-1} και σταθερού όρου του χαρακτηριστικού πολυωνύμου.

(2) Αν λ είναι ιδιοτιμή της $f \circ g$ το λ είναι ιδιοτιμή της $g \circ f$. 1 μονάδα

Σωστό. Αν ένας πίνακας από τους δύο είναι αντιστρέψιμος, για παράδειγμα ο A τότε έχουμε

$$A^{-1}ABA = BA$$

και συνεπώς οι πίνακες AB και BA έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο ως όμοιοι. Για να δούμε την περίπτωση όπου κανένας πίνακας δεν είναι αντιστρέψιμος μπορούμε να θεωρήσουμε μια ακολουθία αντιστρεψίμων πινάκων $A_n \to A$ και να πούμε ότι

$$\mathrm{Ch}_{AB}(x) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Ch}_{A_nB}(x) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Ch}_{BA_n}(x) = \mathrm{Ch}_{BA}(x).$$

Διαφορετικά μπορούσε κανείς να χρησιμοποίησει την άσκηση VI.1.35 στην σελ. 190, `https://eclass.uoa.gr/modules/document/file.php/MATH809/GrammikiII.pdf`

Διαφορετικά μπορούμε και να επιχειρηματολογήσουμε ως εξής: Εάν x ιδιοδιάνυσμα της $f \circ g$ με ιδιοτιμή κ τότε $f(g(x)) = \kappa x$ άρα $g(f(g(x))) = g(\kappa x) = \kappa g(x)$ και έτσι το $g(x)$ είναι ιδιοδιάνυσμα της $g \circ f$ με ιδιοτιμή κ, αρκεί το $x \notin \ker g$. Το τελευταίο εξασφαλίζεται αν η g είναι 1-1. Αν πάλι $x \in \ker g$ τότε αναγκαστικά $\kappa = 0$. Σε αυτή την περίπτωση αν f είναι 1-1 άρα και επί τότε διαλέγουμε ένα $y \neq 0$ με $f(y) = x$ και έχουμε $g \circ f(y) = g(x) = 0 = \kappa y$ οπότε το y είναι ιδιοδιάνυσμα. Τέλος αν η f δεν είναι 1-1 τότε διαλέγουμε ένα $y \in \ker f$ και έχουμε $g \circ f(y) = g(0) = 0 = \kappa y$.

(3) Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$ τέτοιος ώστε $A^2 - 4A + 3I = 0$. 0,5 μονάδα

(1) Είναι διαγωνίσιμος.
(2) Δεν είναι διαγωνίσμος.
(3) Δεν μπορούμε να αποφανθούμε.

Παρατηρούμε ότι το ελάχιστο πολυώνυμο του A διαιρεί το $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$. Συνεπώς το ελάχιστο έχει απλές ρίζες και ο πίνακας είναι διαγωνίσιμος.

(4) λ ιδιοτιμή της f εάν και μόνο εάν λ είναι ρίζα του ελαχίστου πολυωνύμου m_f. 0,5 μονάδα

Σωστό, κάθε ρίζα του ελαχιστού πολυωνύμου είναι ιδιοτιμή αφού το ελάχιστο πολυώνυμο διαιρεί το χαρακτηριστικό. Επίσης, αν το λ είναι ιδιοτιμή της f τότε υπάρχει μη-μηδενικό ιδιοδιάνυσμα της f και $m_f(f)\nu = m_f(\lambda)\nu = 0$ συνεπώς $m_f(\lambda) = 0$.

(5) Έστω δ.χ πεπερασμένης διάστασης. Η $f \in L(E)$ διαγωνίσιμος αν και μόνο εάν το άθροισμα των ιδιόχωρων της f είναι ευθύ. 0,5 μονάδα

Λάθος. Αν θεωρήσουμε την μη-διαγωνίσιμη

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

αυτή έχει μοναδικό ιδιόχωρο για την ιδιοτιμή 1 διάστασης 1, το οποίο έχει μόνο ένα προσθεταίο και είναι ευθύ.

Εναλλακτικά, γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των ιδιόχωρων είναι πάντα ευθύ. (θεώρημα 2.2.15 βιβλίο). Από το θεώρημα διαγωνοποίησης η $f \in L(E)$ είναι διαγωνίσιμος αν και μόνο εάν το είναι το ευθύ άθροισμα των ιδιόχωρων. (Θεώρημα 2.217 βιβλίο)

(7) Το άθροισμα δύο διαγωνίσιμων πινάκων είναι διαγωνίσιμος. 1 μονάδα

Λάθος, για παράδειγμα

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ο πρώτος πίνακας είναι ήδη διαγώνιος, ο δεύτερος είναι διαγωνοποιήσιμος γιατί έχει διαφορετικές ιδιοτιμές και ο τρίτος δεν είναι διαγωνοποιήσιμος.

(8) Έστω διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και $f \in L(E)$ και P πολυώνυμο που μηδενίζει την f. Να δειχθεί ότι

(1) Αν λ είναι ιδιοτιμή της f τότε $P(\lambda) = 0$. 0,5 μονάδα

(2) Αν η f είναι τέτοια ώστε $f^3 + 2f^2 - f - 2 = 0$ τότε η f είναι ένα προς ένα και επί. 0,5 μονάδα

Αν η λ είναι ιδιοτιμή της f, τότε έχει μη-μηδενίκο ιδιοδιάνυσμα v και $P(f)v = P(\lambda)v$ και αφού $v \neq 0$ έχουμε ότι $P(\lambda) = 0$.

Παρατηρούμε ότι αν f δεν ήταν 1-1 τότε θα είχε μη-μηδενικό πυρήνα συνεπώς το 0 θα ήταν ιδιοτιμή. Όμως το 0 δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου $g(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$, αφού $g(0) = 2$. Άρα η f είναι 1-1 γραμμική συνάρτηση $f : E \to E$ συνεπώς είναι και επί, αφού $\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{im} f$.

Θέμα 2

a) Να μελετηθεί για $m \in \mathbb{R}$ ως προς την διαγωνισιμότητα, τριγωνισιμότητα ο παρακάτω πίνακας 2 μονάδες

$$A_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{bmatrix}$$

b) Αν για κάποια τιμή m ο A_M είναι τριγωνίσιμος και όχι διαγωνίσιμος να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε $P^{-1}AP = T$ όπου άνω τριγωνικός. 2 μονάδες

Λύση: Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\det \begin{pmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ 1 & x-2 & -1 \\ m-2 & 2-m & x-m \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ -x+2 & x-2 & 0 \\ m-2 & 2-m & x-m \end{pmatrix}$$

$$(x-2)\det \begin{pmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ m-2 & 2-m & x-m \end{pmatrix} = (x-2)\det \begin{pmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2-m & x-m \end{pmatrix}$$

$$= (x-2)(x-1)(x-m).$$

Διαφορετικά θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο αναπτύσσοντας την ορίζουσα ως προς την πρώτη γραμμή (διαλέγουμε αυτή γιατί έχει ένα μηδενικό). Έχουμε

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ 1 & x-2 & -1 \\ m-2 & 2-m & x-m \end{pmatrix} &= (x-1)\det\begin{pmatrix} x-2 & -1 \\ 2-m & x-m \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 1 & x-2 \\ m-2 & 2-m \end{pmatrix} \\
&= (x-1)\big((x-2)(x-m)+(2-m)\big)-(2-m)-(x-2)(m-2) \\
&= (x-1)(x-2)(x-m)+(x-1)(2-m)-(2-m)+(x-2)(m-2) \\
&= (x-1)(x-2)(x-m)+(2-m)(x-1-1-x+2) = (x-1)(x-2)(x-m).
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι αν $m \neq 2, 1$ τότε ο πίνακας είναι διαγωνοποιήσιμος αφού έχει διαφορετικές ιδιοτιμές.

• Αν $m = 1$ τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το $-(x-2)(x-1)^2$ και ο πίνακας είναι ο

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε τον ιδιόχωρο της ιδιοτιμής 1 ο οποίος δίνεται από το σύστημα

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Παρατηρούμε ότι η τάξη του πίνακα είναι 2 συνεπώς η διάσταση του ιδιόχωρου της ιδιοτιμής 1 είναι 1 και ο πίνακας σε αυτή την περίπτωση δεν είναι διαγωνοποιήσιμος.

• Αν $m = 2$ τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το $-(x-2)^2(x-1)$ και ο πίνακας είναι ο

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε τον ιδιόχωρο της ιδιοτιμής 2 ο οποίος δίνεται από το σύστημα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι η τάξη του πίνακα αυτού είναι 1 και συνεπώς ο ιδιόχωρος της ιδιοτιμής 2 έχει διάσταση 2 και ο πίνακας είναι διαγωνοποίησιμος.

Συνεπώς η περίπτωση $m = 1$ είναι ενδιαφέρουσα και αφού όλες οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές δεν υπάρχει θέμα να μην είναι ο πίνακας τριγωνοποιήσιμος. Επιστρέφουμε στον σύστημα της εξίσωσης (1) και παρατηρούμε ότι μια λύση είναι η $x = y = 1, z = 0$, συνεπώς το $(1, 1, 0)^t$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα. Θα χρειαστεί να υπολογίσουμε και τον ιδιόχωρο της ιδιοτιμής 2, ο οποίος δίνεται από την λύση του συστήματος

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Αυτός ο χώρος γνωρίζουμε ότι έχει διάσταση 1, μια λύση δίνεται από το $x = z = 1, y = 0$ και ένα ιδιοδιάνυσμα είναι το $(1, 0, 1)^t$. Αυτοί που γνωρίζουν την θεωρία της κανονικής μορφής Jordan θα μπορούσαν να προχωρήσουν στην εύρεση της και με αυτό τον τρόπο να καταλήξουμε σε μια πολύ καλή τριγωνοποιήσιμη μορφή. Αλλά αυτό δεν είναι απαραίτητο ούτε ζητείται!

Πράγματι αν βάλουμε ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα των ιδιόχωρων που έχουμε ήδη υπολογίσει έχουμε ότι:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 2 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$$

Συνεπώς οποιαδήποτε επιλογή των a, b, c η οποία να οδηγεί σε αντιστρέψιμο πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$$

είναι αποδεκτή! Για παράδειγμα μια τέτοια είναι η $a = 1, b = c = 0$ αφού τότε οι στήλες είναι γραμμικά ανεξάρτητες (με μια μετάθεση τους δίνουν άνω τριγωνικό πίνακα με μη-μηδενικά στοιχεία στην διαγώνιο). Ένας πίνακας P που να δίνει το ζητούμενο είναι ο

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Θέμα 3

a) Να προσδιοριστούν όλοι οι διαγωνίσιμοι πίνακες $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τέτοιοι ώστε $A^3 + 2A = 3I$. 1 μονάδα

b) Υπάρχει πίνακας $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ τέτοιος ώστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(X) = X^2 + X + 1$. 1 μονάδα

Παρατηρούμε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι ρίζες της $h(x) = x^3 + 2x - 3$. Η παραπάνω εξίσωση έχει μια ρίζα την $x = 1$ και στην συνέχεια υπολογίζουμε (με διαίρεση πολυωνύμων για παράδειγμα) ότι $x^3 + 2x - 3 = (x-1)(x^2 + x + 3)$. Το πολυώνυμο $x^2 + x + 3$ έχει αρνητική διακρίνουσα και συνεπώς δεν έχει πραγματικές ρίζες. Οι διαγωνίσιμοι πραγματικοί πίνακες πρέπει να έχουν πραγματικές ρίζες συνεπώς η μοναδική δυνατότητα για τις ιδιοτιμές τους είναι να είναι όλες ίσες με την μονάδα, άρα $A = \mathbb{I}_n$.

Εναλλακτικά παρατηρούμε ότι $h'(x) = 3x^2 + 2$. Το πολυώνυμο αυτό δεν έχει πραγματικές ρίζες άρα έχει πάντα θετικό πρόσημο. Συνεπώς η $h'(x)$ είναι γνήσια αύξουσα και έχει μοναδική ρίζα ρ. Άρα ο πίνακας είναι της μορφής $\rho\mathbb{I}_n$.

Για το δεύτερο ερώτημα παρατηρούμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

έχει την ζητούμενη μορφή. Το πολυώνυμο αυτό το σκεφτήκαμε με την θεωρία του συνοδού πίνακα.

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να πούμε ότι ψάχνουμε ένα πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ώστε $\mathrm{tr}(A) = -1$ και $\det(A) = 1$. Για να ελαφρύνουμε την αναζήτηση σκεφτόμαστε πρώτα μήπως υπάρχει τέτοιος πίνακας που να είναι άνω τριγωνικός, δηλαδή της μορφής

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d. \end{pmatrix}$$

Τότε όμως τα a, d θα ήταν ιδιοτιμές και το πολυώνυμο x^2+x+1 δεν έχει πραγματικές ρίζες. Ας πάμε να δούμε αν υπάρχουν πίνακες που να έχουν ένα άλλο στοιχείο μηδενικό για παράδειγμα το $a = 0$. Τότε έχουμε ότι $d = -1$ από την συνθήκη του ίχνους. Ενώ η συνθήκη της ορίζουσας μας δίνει ότι $b = -\frac{1}{c}$. Η προηγούμενη περίπτωση προκύπτει για $c = -1$.

Διάρκεια εξέτασης 1 ώρα 45 λεπτά