$L: V \to V$ κανονική $\to LL^* = L^*L$

Τότε υπάρχει ορθοκανονική βάση του V που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα.
Ισοδύναμα αν:

A κανονικός ($A^*A = AA^*$), υπάρχει μοναδιαίος πίνακας U: $U^{-1}AU = \Delta$

αλλαγή βάσης — Διαγώνιος ως προς αυτή

→ Γιατί μοναδιαίος;
Γιατί οι μοναδιαίοι διατηρούν το εσωτερικό γινόμενο!

$$\langle x, y\rangle = \langle Ux, Uy\rangle = \langle x, \underbrace{U^*U}_{I_n} y\rangle = \langle x, y\rangle$$

Διαγωνοποίηση Ερμητιανών Πινάκων

$(A = A^*)$ → Οι ερμητιανοί είναι ειδική περίπτωση των κανονικών.

- Αν $\lambda \neq \mu$ ιδιοτιμές, τότε $E_\lambda \perp E_\mu$.

Βήματα:

1] Υπολογισμός $ch_A(x)$
2] Εύρεση ιδιοτιμών
3] Υπολογισμός βάσεων του E_λ
} κλασσική διαγωνοποίηση

4] Ορθοκανονικοποίηση των βάσεων κάθε E_λ ← βάση του E_λ αποτελούμενη από ορθοκανονική ιδιοδιανύσματα.

$$P = \begin{array}{cc} E_{\lambda_1} & E_{\lambda_2} \end{array}$$

στήλες ορθοκ/κή βάση E_{λ_1} — στήλες ορθοκ. βάση του E_{λ_2}

τα διανύσματα του $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_s}$ είναι κάθετα $\lambda_1 \neq \lambda_s$

Εξασφαλίζουμε ότι η βάση μας είναι ορθοκανονική.

- P: μοναδιαίος
  - διατηρεί εσωτερικό γινόμενο
  - βρίσκω εύκολα τον αντίστροφο τραβώντας συζυγία και παίρνοντας τον ανάστροφο!

Παράδειγμα:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A$$

: Να βρεθεί P μοναδιαίος ($P^* = P^{-1}$) ώστε $P^{-1}AP = \Delta$.

! ερμητιανός! $A^* = A^t = A$ συμμετρικός

αν οι γραμμές → στήλες και οι στήλες → γραμμές, δεν αλλάζει

Συνέχεια →

22.11.23

~ $ch_A(x) = (1+x)^2(-5+x)$

↳ Έχει πολλαπλές ρίζες, ίσως ο πίνακας να μην είναι διαγωνοποιήσιμος.

Επειδή όμως είναι ερμητιανός είναι πάντα διαγων/μος!

~ $\lambda = -1$ ιδιοτιμή $\Rightarrow$ $(A+I)X = 0$ έχει μη τετριμμένες λύσεις: πόσες; δες η διάσταση του πυρήνα

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

~ $\dim Im = rank(A+I) = 1$

Άρα $\dim Ker = 2$

ποιές είναι οι λύσεις;

$$\boxed{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

→ είναι γραμμικά ανεξάρτητες ✓

~ $\lambda = 5$ ιδιοτιμή $\Rightarrow$ $(A - 5I)X = 0 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

~ $\dim E_{-1} + \dim E_5 = 3$

$\dim E_{-1} = 2$, $\dim E_5 \Downarrow 1$

$$\boxed{V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$ λύση του συστήματος.

Αν είχα απλή διαγωνοποίηση: $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{λογαρ.}}{\rightsquigarrow} Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 5 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$$

↳ Ο Q δεν είναι μοναδιαίος διότι $Q^* = Q^t \neq Q^{-1}$

Άρα συνεχίζω:

• Παρατηρώ ότι $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ είναι κάθετα.

$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle = 0$.

~ Κάνω ορθοκανονικοποίηση στον E_5

$$\boxed{e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

~ ορθοκανονικοποίηση στον E_{-1}: $u_2 = v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_2, v_3 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 =$$

Συνέχεια σελ. 3

22.11.23

$$u_3' = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\1/2\\-1\end{pmatrix}$$ $\rightsquigarrow$ για να τσεκάρω τις πράξεις:

$\langle u_2, u_3 \rangle = 0$? $\rightsquigarrow$ ΝΑΙ άρα ok.!

Συνολικά: $$\boxed{e_2} = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}}, \quad \boxed{e_3} = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \boxed{\sqrt{2/3}\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\-1\end{pmatrix}}$$

Άρα:

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -\sqrt{2/3} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = P^* = P^t = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -\sqrt{2/3} \end{pmatrix}$$

- $\underbrace{x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4xz + 4yz}$ $= 1$

$\Downarrow$

$$(x, y, z)\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 1. \quad (*)$$

$$P^t A P = \begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow A = P\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}P^t$$

$(*) \Rightarrow$ $$((x,y,z)P^{t})^{t}\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}P^t\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 1.$$ Θέτω $$\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix} = P^t\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$ → αλλαγή συντεταγμένων

$$(X\ Y\ Z)\begin{pmatrix}5 & & 0\\ & -1 & \\ 0 & & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix} = 1 \Rightarrow 5X^2 - Y^2 - Z^2 = 1$$

υπερβολοειδές

Μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων (Gauss, αστρολόγοι και αστεροϊδής Δήμητρα)

22.11.23

$f(x_1 \dots x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$

θέλουμε "μετρώντας τα $x_1,\dots,x_n$" και το $f(x_1,\dots,x_n)$ να υπολογίσουμε τα $a_1,\dots,a_n$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Βρίσκω τα "πλησιέστερα" και καλύτερα $a_1,\dots,a_n$.

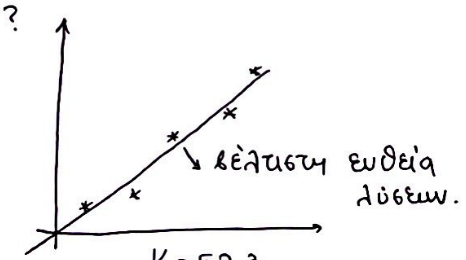
$f(1,0,\dots,0) = a_1$

$f(0,1,\dots,0) = a_2$

Παράδειγμα: Η δύναμη που ασκεί ένα ελατήριο σχετίζεται με την παραμόρφωση του x: $F = -kx$ (Hook)

x	F
0,0	0,0
0,1	5,2
0,2	10,5
0,3	15,7
0,4	20,9

$\Rightarrow$



$K = 52,3$

Γενικά: Στο i πείραμα έχουμε τις τιμές $x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{n,i}$ και $f(x_{1,i},\dots,x_{n,i}) = y$.

$[1 \le i \le m]$

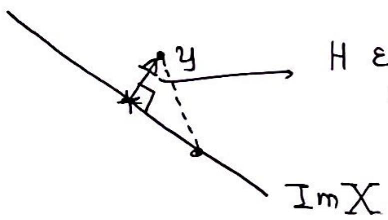
$$X = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x^1 & x^2 & \cdots & x^n \end{array} \\ \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_{1m} & \cdots & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$\sim$ το σύστημα είναι αδύνατο.

Γιατί είναι αδύνατο; $y \notin \mathrm{Im}X$

↳ Ελαχιστοποιούμε την ποσότητα:

$$\sum_{i=1}^{m} \left(a_1 x_{1,i} + \dots + a_n x_{ni} - y_i\right)^2$$



Αυτή η ελαχιστοποίηση γίνεται για το διάνυσμα προβολή του y στον $\mathrm{Im}X$.

Άρα ψάχνω $v \in \mathrm{Im}X$: $\langle v-y, x^i \rangle = 0$ → απαιτώ το $v-y$ να είναι κάθετο στις στήλες.

$v = a_1x^1 + \dots + a_nx^n$

Απαιτώ $a_1\langle x^1, x^i\rangle + a_2\langle x^2, x^i\rangle + \dots + a_n\langle x^n, x^i\rangle = \langle y, x^i\rangle = b_i$

↳ Νέο σύστημα $n \times n$

$$V = \sum_{j=1}^{n} a_j x^j$$

Συνέχεια σελ. 5

$n \times n$ σύστημα $1 \leq i \leq n$:

$$A\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad , \quad A = (\langle X^i, X^j \rangle) \Rightarrow A = \underbrace{\underset{n\times m}{X^t} \underset{m \times n}{X}}_{n \times n}$$

εκεί κρύβεται το m!

$$X^i = \begin{pmatrix} X_{i1} \\ \vdots \\ X_{im} \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

$$\langle V, X^i \rangle = \sum_{v=1}^{m} c_v X_{iv}$$

Αν δείξω ότι A αντιστρέψιμος $\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (X^tX)^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$(X^tX)^{-1} X^t \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

γιατί; $b_i = \langle y, X^i \rangle$

Αλλά $(X^tX)^{-1}X^t =$

$X^{-1}(X^t)^{-1}\cancel{X^t} = X^{-1}$ αν $n=m$

λάθος γιατί $m > n$ και $\underset{n\times m}{X^t}\underset{m\times n}{X}$.

Γιατί A αντιστρέψιμος;
(και άρα το σύστημα έχει λύση;)

{ X $m \times n$ πίνακας με στήλες $X^1, \dots, X^n$
$X^1, \dots, X^n$ είναι γρ. αν. $\Leftrightarrow$ X^tX είναι αντιστρέψιμος $\bar{X}$. }

- Έστω ότι ο πίνακας X^tX δεν είναι αντιστρέψιμος, τότε υπάρχει $v \neq 0$:

$$X^tXv = 0 \Rightarrow v^t0 = v^tX^tXv = (Xv)^tXv = \|Xv\|^2 \Rightarrow Xv = 0 \Rightarrow v \neq 0$$

$XW = 0$, $W \neq 0$

$\underline{(X^tX)}W = 0$
δεν είναι αντιστρέψιμος.

$$Xv = 0$$

$$(X^1, X^2, \dots, X^n)\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0 \quad (\neq 0)$$

$\Rightarrow$

$$\lambda_1 X^1 + \lambda_2 X^2 + \dots + \lambda_n X^n = 0$$

Άρα οι στήλες του X είναι γρ. εξαρτημένες.

Άρα από τα πειράματα που έκανα θα βγάλω τις γρ. εξαρτημένες στήλες.

Άρα πίσω στο πρόβλημα με το ελατήριο:

$f(x) = ax$, πειράματα: $\left.\begin{matrix}(x_1, y_1) \\ (x_2, y_2) \\ \vdots \\ (x_m, y_m)\end{matrix}\right\} \Rightarrow A = (X^tX)^{-1}X^ty$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

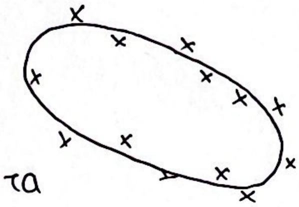
ο συντελεστής

22.11.23

$$\boxed{x^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0}$$

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_m, y_m)$

ψάχνουμε τα B, C, D, E, F



Τι κάνω εδώ;

$$A = \begin{pmatrix} y_1^2 & x_1 y_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ y_2^2 & x_2 y_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ y_m^2 & x_m y_m & x_m & y_m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1^2 \\ -x_2^2 \\ \vdots \\ -x_m^2 \end{pmatrix}$$

→ τα $x_1, \ldots, x_m$ και $y_1, \ldots, y_m$ τα γνωρίζω από τις συντεταγμένες.

Άρα, σύμφωνα με τα προηγούμενα:

$$\begin{pmatrix} B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{pmatrix} = (A^t A)^{-1} A^t \begin{pmatrix} -x_1^2 \\ -x_2^2 \\ \vdots \\ -x_m^2 \end{pmatrix}$$