$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^n \longrightarrow V$ διανυσματικός χώρος

V διανυσματικός χώρος με <u>νόρμα</u> $V \longrightarrow \mathbb{R}$

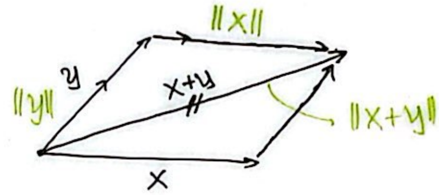
$v \mapsto \|v\|$

· <u>Ώ</u>στε:

1) $\|u\| \geq 0 \quad \forall u \in V$, $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$

2) $\|\lambda \cdot u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$, $\lambda \in \mathbb{F}$ → Αν $\lambda \in \mathbb{C}$: $\lambda = x + iy \Rightarrow |\lambda| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x, y \in \mathbb{R}$ } $y = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \Rightarrow |\lambda| = \sqrt{x^2} = |\lambda|$

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $x, y \in V$



<u>Παραδείγματα</u>

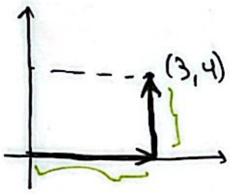
1. $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ $\quad \|x\| = |x|$

2. $(\mathbb{C}, \|\cdot\|)$ $\quad \|x\| = |x|$ → απόλυτη τιμή μιγαδικού αριθμού

3. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ $\quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ $\begin{cases} x = (x_1, \ldots, x_n) \\ \|x\| \geq 0 \text{ άθροισμα θετικών} \\ \|x\|_1 = 0 \Leftrightarrow \sum |x_i| = 0 \Leftrightarrow |x_i| \overset{\forall i}{=} 0 \Leftrightarrow x_i = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ \|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|) \leq \|x\|_1 + \|y\|_1 \end{cases}$

Γεωμετρικά:

$\|(3,4)\|$



4. $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ → Η κλασική απόσταση, μήκος διανυσμάτων.

- $x = (x_1, x_2)$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$
- $x = (x_1, x_2, x_3) = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

⋮

- $x = (x_1, \ldots, x_n) = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$

5. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p) = \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$ → Συναρτησιακή Ανάλυση

6. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

7. $C[a, b]$ συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, b]$

$\|f\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$

άπειρες διαστάσεις δ.χ.

Μια νόρμα σε ένα δ.χ. μας δίνει την δυνατότητα να ορίσουμε <u>σύγκλιση</u>.

Σελ. 2

Πότε δυο στοιχεία είναι κοντά και να ορίσουμε σύγκλιση. 30.10.23

(a_n) $a_n \in V$

$\underset{a_n}{\overset{V}{\Downarrow}} \to \underset{e}{\overset{V}{\Downarrow}}$ $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ ώστε $n > n_0$ $\|a_n - e\| < \varepsilon$.

⇝ Στο $\mathbb{R}^n$ ← $n < \infty$

← $\mathbb{R}$-πλήρες (κάθε ακολουθία cauchy συγκλίνει)

όλες οι νόρμες είναι ισοδύναμες:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n \xrightarrow{\|\,\|} e \\ a_n \xrightarrow{\|\,\|'} e \end{array} \right\}$$

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

V έχει εσωτερικό γινόμενο : $V \times V \to \mathbb{F}$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$

↳ $\mathbb{F}$-χώρος $(v, w) \longmapsto \langle v, w \rangle$

Απαιτούμε τα εξής:

- Γραμμικότητα ως προς το 1º όρισμα:
  - ⇝ $\langle cv, w \rangle = c\langle v, w \rangle$, $v, w \in V$
  - ⇝ $\langle v+v', w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle$
  - ⇝ $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ → συζυγής.
  - ⇝ $\langle u, u \rangle \geq 0$

    $\langle u, u \rangle = 0_V \Leftrightarrow u = 0_V$.

⟹

- $\boxed{\langle v, u_1 + u_2 \rangle} = \overline{\langle u_1 + u_2, v \rangle}$

  $= \overline{\langle u_1, v \rangle} + \overline{\langle u_2, v \rangle} =$

  $\boxed{\langle v, u_1 \rangle + \langle v, u_2 \rangle}$.

- $\boxed{\langle v, \lambda u \rangle} = \overline{\langle \lambda u, v \rangle} = \bar{\lambda}\overline{\langle u, v \rangle}$

  $= \boxed{\bar{\lambda}\langle v, u \rangle}$!

  $\lambda \in \mathbb{C}$

  ↳ Από το 2º βγαίνει συζυγές.

Παράδειγμα ① $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = y \longrightarrow \underbrace{x^t \cdot y}_{\text{πολλαπ/μος πινάκων}} = (x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

⇝ $\vec{v} = (x_1, x_2)$
$\vec{w} = (y_1, y_2)$
$\vec{v} \cdot \vec{w} = x_1 y_1 + x_2 y_2$
↳ Γεωμετρία Ι

- $\langle (x_1 + x_2), y \rangle = (x_1 + x_2)^t y = (x_1^t + x_2^t) y = x_1^t y + x_2^t y = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$
- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle = \langle x, \lambda y \rangle$, $\lambda \in \mathbb{R}$ άρα $\bar{\lambda} = \lambda$.

$$\left(\begin{array}{c} a + i b \in \mathbb{C} \\ \overline{a + i b} = a - i b \end{array} \right)$$

- $x = (x_1, \ldots, x_n)$

  $\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$

  $= 0$ ανν $x_1 = \ldots = x_n = 0$ ⟶ επόμενο παράδειγμα σελ. ③.

Παράδειγμα ② $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$

$x = (x_1, \dots, x_n)^t \quad (y_1, \dots, y_n) \to \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$

$x_i \in \mathbb{C}$, $\quad (y_1,\dots,y_n) = y$

$y_i \in \mathbb{C}$

↳ "Hermitian"

• $\langle y, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} y_i \overline{x_i} = \overline{\langle x, y \rangle}$

Γιατί συζυγία?

$\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{x_i} \geq 0$ $\qquad \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

$x = a + ib$

$\overline{x} = a - ib$

$x\overline{x} = a^2 + b^2 \geq 0$

$x\overline{x} = |x|^2$

Εξασφαλίζει ότι είναι θετικό.

● $C[a,b] \times C[a,b] \to \mathbb{R}$

συνεχείς συναρτήσεις στο $[a,b]$

$(f, g) \longmapsto \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \cdot g(t) \, dt$

Εσωτερικό γινόμενο (πραγματικό) $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$

$\langle f_1 + f_2, g \rangle = \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle$

$\langle \lambda f, g \rangle = \lambda \langle f, y \rangle$, $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$, $\quad \langle f, f \rangle = \int_a^b f^2(t) \, dt \geq 0$

● $\{ f : [a,b] \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C} \}$ συνεχείς

$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \cdot \overline{g(t)} \, dt$

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο

$V \to \mathbb{R}$ $\qquad \langle v, v \rangle \geq 0$

$v \longmapsto \langle v, v \rangle^{1/2}$

↳ <u>Αυτό είναι νόρμα</u> $\quad$ θα το δείξουμε

Cauchy-Schwartz ανισότητα

ΠΡΟΣΟΧΗ ανισότητες γράφω μόνο για πραγματικούς!

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\cdot\|y\|$$

$\vec{x}\cdot\vec{y} = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\cos(\vec{x},\vec{y})$

$\|\vec{x}\cdot\vec{y}\| = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\||\cos\theta|$

$\leq \|\vec{x}\|\|\vec{y}\| \quad (|\cos\theta|\leq 1)$

θυμάμαι από Γεωμετρία

Αν $y=0$: είναι προφανές

$\boxed{\langle x,0\rangle = 0}$ | $\langle x,y+0\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,0\rangle$, $\langle x,y+0\rangle = \langle x,y\rangle \Rightarrow \langle x,0\rangle = 0$

Άρα $0 = |0| \leq \|x\|\cdot\|y\|$, $\|y\| = 0$

Υποθέτουμε $y\neq 0$

$\forall \lambda\in\mathbb{F}$: $0\leq \langle x-\lambda y, x-\lambda y\rangle = \langle x, x-\lambda y\rangle - \lambda\langle y, x-\lambda y\rangle = \langle x,x\rangle - \bar{\lambda}\langle x,y\rangle - \lambda\langle y,x\rangle + \lambda\bar{\lambda}\langle y,y\rangle \Rightarrow$

Αληθής για κάθε $\lambda\in\mathbb{F}$.

$$\lambda = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}, \quad y\neq 0$$

$$\langle x,x\rangle - \underbrace{\frac{\overline{\langle x,y\rangle}}{\langle y,y\rangle}\langle x,y\rangle} - \underbrace{\frac{\langle x,y\rangle}{\cancel{\langle y,y\rangle}}\cancel{\overline{\langle x,y\rangle}}} + \frac{\langle x,y\rangle}{\cancel{\langle y,y\rangle}}\cdot\frac{\cancel{\overline{\langle x,y\rangle}}}{\cancel{\langle y,y\rangle}}\cancel{\langle y,y\rangle} =$$

$$\langle x,x\rangle - \frac{\overline{\langle x,y\rangle}}{\langle y,y\rangle}\langle x,y\rangle \geq 0$$

$$\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \geq \langle x,y\rangle\overline{\langle x,y\rangle} = |\langle x,y\rangle|^2$$

Άρα πριν: $\|x\| = \langle x,x\rangle^{1/2}$

$$\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \geq |\langle x,y\rangle|^2$$

$\langle x,x\rangle = \|x\|^2$, $\langle y,y\rangle = \|y\|^2$

$$\|x\|\,\|y\| = |\langle x,y\rangle|^2$$

$\mathbb{F}=\mathbb{R}$

$0\leq\langle x-\lambda y, x-\lambda y\rangle = \langle x,x\rangle - 2\lambda\langle x,y\rangle + \lambda^2\langle y,y\rangle$ αληθές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$

↳ Άρα η Διακρίνουσα είναι αρνητική ⟶ Αν ήταν θετική:

ενώ τώρα είναι μόνο θετική!

Άρα $4\langle x,y\rangle^2 - 4\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \leq 0$

cauchy-schwartz.

⟶

Πορίσματα

- $$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right)^{1/2}$$ για κάθε $x_1, \dots, x_n$, $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{C}$

- $$\left|\int_a^b f(t)\cdot g(t)dt\right| \leq \left(\int_a^b |f(t)|^2\right)^{1/2} \left(\int_a^b |g(t)|^2\right)^{1/2}$$

- $(V, \langle \circ, \circ \rangle)$ χωρος με εσωτερικό γινόμενο

  $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$

  $v \longmapsto \langle v, v\rangle^{1/2}$ είναι νόρμα!

$*$

$\mathbb{C} \ni z = a + ib$

$z + \bar{z} =$

$2a = 2Re(z)$

$a = Re(z)$ (Real Part)

$b = Im(z)$ (Imaginary Part)

- $\|v\| = 0 \Leftrightarrow \langle v, v\rangle = 0 \overset{op6}{\Leftrightarrow} v = 0$

- $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \underbrace{\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle}_{*} + \|y\|^2$

  $= \|x\|^2 + 2Re\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leq$

  $\|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$

Αυτό μου δίνει την τριγ. αν.

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

- $\|\lambda x\| = \langle \lambda x, \lambda x\rangle^{1/2} = (\lambda\bar{\lambda}\langle x, x\rangle)^{1/2} = (|\lambda|^2\langle x, x\rangle)^{1/2} = |\lambda|\langle x, x\rangle^{1/2} = |\lambda|\|x\|$