$L: V \to V$

$m_L(x)$: το ελάχιστο πολυώνυμο της

$m_L(x) = m_1(x)\, m_2(x) \dots m_s(x)$

↳ διάσπαση του m_L σε γινόμενο πολυωνύμων $(m_i(x), m_j(x)) = 1$ ↗ πρώτοι μεταξύ τους (ΜΚΔ)

$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_s$

$W_i = \ker m_i(x)$ L-αναλλοίωτοι υπόχωροι

$m_{L|_{W_i}} = m_i(x)$

Ερώτημα Τι γνωρίζει το m_L για την κανονική μορφή Jordan?

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_s \end{pmatrix}, \quad J_i = J(\lambda_i, k_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

1] Το m_L είναι γινόμενο πρώτων μεταξύ τους παραγόντων αν και μόνο αν είναι διαγωνοποιήσιμος

πχ → $ch_A(x) = -(x-3)(x-5)^2$

$m_A(x) = (x-3)(x-5)$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$ → Δεν έχει σημασία με ποια σειρά γράφεται η κάθε ιδιοτιμή.

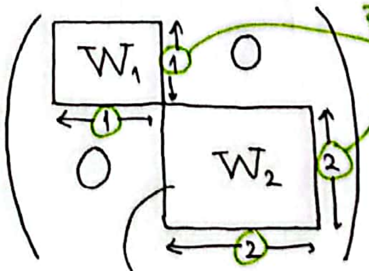
Ερώτημα:
Αν $ch_A(x) = -(x-3)(x-5)^2$ μπορεί το $m_A(x)$ να είναι $(x-3)$?

$\boxed{\text{ΟΧΙ}}$: Γιατί αν $m_A(x) = x-3$ τότε $0 = m_A(A) = A - 3I = 0$
$\Rightarrow A = 3I \overset{char}{\leadsto} (3-x)^2$.

- $ch_A(x) = -(x-3)(x-5)^2$

  $m_A(x) = (x-3)(x-5)^2$

Τι μπορούμε να πούμε για τον Jordan?



$m_A(x) = m_1(x) \cdot m_2(x)$, $m_1 = (x-3)$, $m_2 = (x-5)^2$

$W_1 = \ker m_1(L) = E_3$

$W_2 = \ker (L-5)^2$

→ Δεν είναι διαγωνοποιήσιμος, έχει ελάχιστο πολ. $(x-5)^2$, άρα είναι $J(5,2) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Σε αλγεβρικά κλειστό σώμα:
$m_A(x) = (x-\rho_1)^{a_1}(x-\rho_2)^{a_2} \dots (x-\rho_s)^{a_s}$

$$A = \begin{pmatrix} W_1 & & \\ & W_2 & \\ & & W_3 \end{pmatrix}$$ το μπλοκ W_i έχει ελάχιστο πολ: $(x-\rho_i)^{a_i}$

- Τι μας λέει ένα ελάχιστο πολυώνυμο για τον πίνακα;

  ↳ $\underline{\dim W_i}$: θα πρέπει να το γνωρίζουμε (και δεν το φέρει το ελ. πολ.)

  ↳ Πρόβλημα: $n \times n$ πίνακα με ελάχιστο πολυώνυμο $(x-3)^a$
  Μπορούμε με αυτή την πληροφορία να βρούμε την μορφή Jordan?

$a=1$ Διαγώνιος πίνακας (ανεξαρτήτως n) 25.10.23

$n=3$ $a=2$, $a=3$ γιατί $ch_A(x) = -(x-3)^3$

$m_A(x) \mid (x-3)^3 \Rightarrow a \leq 3$

$(x-3)^2 \Rightarrow P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|cc} 3 & 0 & \\ \hline 0 & 3 & 1 \\ & 0 & 3 \end{array}\right)$ ή $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ή $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ γιατί $3=1+1+1$, $3=1+2$, $3=3$

διαγωνοποιήσιμοι

!Άρα είναι αυτό! $(x-3)^2$

$(x-3)^3$: ελ. πολ. (λογαριάζουμε τα ελάχιστα πολ της κανονικής μορφής Jordan

όχι, γιατί τότε το ελάχιστο θα ήταν $(x-3)$

Πάμε τωρα σε 4×4:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \text{ΕΚΠ}: (x-3)^2$$

$(x-3)^2$, $(x-3)^2$

!SOS (Υποπτο) για εξετάσεις!

$$\left(\begin{array}{c|c|cc} 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \text{ΕΚΠ}: (x-3)^2$$

$x-3$, $x-3$, $(x-3)^2$

Αν πω δλδ ότι έχω 4×4 πίνακα με ελάχιστο πολ.:
- $(x-3) \to$ διαγώνιος
- $(x-3)^4 \to J(3,4)$
- $(x-3)^3 \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 3 & 0 & & \\ \hline 0 & 3 & 1 & 1 \\ & 0 & 3 & 0 \\ & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

ΠΟΡΙΣΜΑ: $L: V \to V$, $W \subset V$: L-αναλλοίωτος

Αν L διαγωνοποιήσιμος, τότε και ο $L|_W$ είναι διαγωνοποιήσιμος.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω f πολυώνυμο με $f(L)=0 \Leftrightarrow f(L)v=0 \;\; \forall v \in V_v$

$\Downarrow$

$f(L)w=0 \;\; \forall w \in W$

$\Downarrow$

$f(L)|_W = 0 = f(L|_W)$

- $m_L(L)=0$

$\Downarrow$

$m_L(L|_W)=0 \Rightarrow m_{L|_W}(x) \mid m_L(x)$

Συνέχεια $\longrightarrow$ Σελ. 3

25.10.23

$$A = \left(\begin{array}{c|cc} 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \qquad m_A = (X-3)(X-4), \quad m_{A|E_3} = (X-3), \quad m_{A|W_2} = (X-4)^2$$

Αφού L διαγωνοποιήσιμος $\Rightarrow$ m_L έχει διαφορετικούς γραμμικούς παράγοντες

$\Downarrow$ $m_{L|W} \mid m_L$

$L|_W : W \to W$ διαγωνοποιήσιμη $\Leftarrow$ $m_{L|W}$ έχει διαφορετικούς γραμμικούς παράγοντες

Πρόβλημα: $L_1, L_2 : V \to V$ και οι δυο διαγωνοποιήσιμες

↓ Άρα

$\exists$ βάση $B_1 : (L_1, B_1, B_1) = \Delta_1$ → διαγώνιος

$\exists$ βάση $B_2 : (L_2, B_2, B_2) = \Delta_2$

Ισοδύναμα,

Έχουμε 2 nxn πίνακες A_1, A_2 οι οποίοι είναι διαγωνοποιήσιμοι και Q_1, Q_2 αντιστρέψιμοι πίνακες:

$Q_1^{-1} A_1 Q_1 = \Delta_1$ και $Q_2^{-1} A_2 Q_2 = \Delta_2$.

{Ερώτημα}: Μπορώ να βρω βάση B ώστε: $\boxed{\begin{cases} (L_1, B, B) = \Delta_1 \\ (L_2, B, B) = \Delta_2 \end{cases}}$

Ισοδύναμα,

Υπάρχει κοινός πίνακας Q ώστε: $\boxed{\begin{cases} Q^{-1} A_1 Q = \Delta_1 \\ Q^{-1} A_2 Q = \Delta_2 \end{cases}}$?

ΝΑΙ → Αν και μόνο αν $\boxed{L_1 L_2 = L_2 L_1}$ (αν αντιμετατίθενται) → [Αυτό δεν σημαίνει ότι αν L_1, L_2 αντιμετατίθενται έχουμε το ανάποδο! (ότι θα είναι διαγωνοποιήσιμοι.]

Αναλυτικά,

→ Έστω ότι υπάρχει τέτοια βάση B, ώστε:

$$\left.\begin{cases} (L_1, B, B) = \Delta_1 \to \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \\ (L_2, B, B) = \Delta_2 \to \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} \end{cases}\right\} \Rightarrow \Delta_1 \Delta_2 = \Delta_2 \Delta_1 \Rightarrow L_1 L_2 = L_2 L_1$$

Αντιστρόφως, L_1, L_2 διαγωνοποιήσιμοι πίνακες : $L_1 L_2 = L_2 L_1$

Θα βρω μια κοινή βάση από ιδιοδιανύσματα.

L_1 έχει ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ (τις υποθέτω διαφορετικές ανά 2)

$V = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_s}$: E_{λ_i} ιδιόχωρος της ιδιοτιμής $\lambda_i = \ker(L - \lambda_i I_n)$

$L_1 L_2 = L_2 L_1 \Rightarrow$ Τα $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_s}$ είναι L_2-αναλλοίωτα

↓ Αυτό το έχουμε αποδείξει: → {Φ_1, Φ_2 = γραμ. απ. στο V, $\Phi_1 \Phi_2 = \Phi_2 \Phi_1$ τότε $\ker \Phi_1, \operatorname{Im} \Phi_1$ είναι Φ_2 αναλλ.}

→ $L_2|_{E_i}$ είναι διαγωνοποιήσιμος

κάθε στοιχείο του $E_i \setminus \{0\}$ είναι εξ' ορισμού λ_i-ιδιοδιάνυσμα για την L_1

Σελ ④

Απο το $L_2|_{E_i}$, υπάρχει βάση $v_1, \dots, v_{\dim E_i}$, αποτελουμενη απο L_2-ιδιοδ.
δλδ, $L_2 v_\nu = \mu_\nu v_\nu$ $\Downarrow$ (+ κάθε στοιχείο είναι λ_i ιδιοδ. για την L_1)
αποτελούμενη απο L_1-ιδιοδ.

→ Άρα $\forall E_i$, κάνω την ίδια δουλειά
και βρίσκω μια βάση B αποτελουμενη απο L_1 και L_2 ιδιοδιανυσματα
$= \{v_1, \dots, v_n\}$

→ Άρα $L_1 v_i = \lambda_i v_i$
$L_2 v_i = \mu_i v_i$ Συνεπως $(L_1, B, B) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$(L_2, B, B) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$

⇝ Πινακες που δεν αντιμετατιθενται δεν είναι διαγωνοποιήσιμοι!

- V: διανυσματικος χωρος, W: υποχωρος L-αναλ/τος | $L: V \to V$

Πρόβλημα: Υπάρχει W' υποχωρος, L-αναλλοιωτος, ωστε $V = W \oplus W'$?
Απάντηση: $\boxed{ΟΧΙ}$

Παράδειγμα: $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ είναι L-αναλ/τος

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xmapsto{L} A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ είναι L-αναλλοίωτος : $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
↳ ιδιοδιάνυσμα της L

Δεν υπάρχει W' L-αναλλοίωτος ωστε $\mathbb{R}^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus W'$
↳ θα έπρεπε να έχει διάσταση 1.

Ένας τέτοιος χωρος θα είχε $\dim = 1$ και βάση ένα ιδιοδιάνυσμα: v_2.
Τοτε το $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 \right\}$ θα ήταν μια βάση απο ιδιοδιανυσματα και ο L θα ήταν διαγωνοποιήσιμος, που δεν είναι!

Αυτό μας δίνει:

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η $L: V \to V$ θα λέγεται ημιαπλή αν για κάθε αναλλοίωτο υπόχωρο του W υπάρχει W' L-αναλλοίωτος ωστε $W \oplus W' = V$.

ΠΡΟΤΑΣΗ: $L: V \to V$, V διανυσματικος χωρος του αλγεβρικά κλειστού $\mathbb{F}$.
L ημιαπλή αν και μόνο αν είναι διαγωνοποιήσιμη.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω ότι η L είναι διαγωνοποιήσιμη, W L-αναλ/τος υπόχωρος.
Διαλέγουμε βάση του W αποτελουμενη απο ιδιοδιανύσματα (Αφού ο $L|_W$ είναι διαγωνοποιήσιμος.)
την οποία συμπληρωνω σε βάση απο ιδιοδιανυσματα

Συνέχεια → ΣΕΛ. 5

25.10.23

$W = \langle w_1, \dots, w_s \rangle$

$w_1, \dots, w_s, \underbrace{v_1, \dots, v_r}_{\text{ιδιοδιανύσματα}}$ $\Big\}$ $W' = \langle v_1, \dots, v_r \rangle$ L-αναλλοίωτος αφού W' παράγεται από ιδιοδιανύσματα

→ Αντίστροφα,

Επαγωγή στην διάσταση $\dim V$:

- $n=1$: ✓
- Έστω ότι το ζητούμενο ισχύει για δ.χ. $n-1$ διάστασης.

Το $Ch_A(x)$ έχει μια ρίζα (γιατί είναι αλγεβ. κλειστό) λ, στο $\mathbb{F}$:

$Lv = \lambda v$ για κάποιο $v \in V$.

θεωρώ:

$\langle v \rangle \oplus W'$ — L-αναλ/το συμπλήρωμα.

L είναι ημιαπλός για τον V, συνεπώς $L|_{W'}$ είναι ημιαπλός.

γιατί αν $W_1 < W'$ L-αναλ/το, τότε το $\langle v \rangle \oplus W_1$ είναι L-αναλ/το του V

$$\underbrace{\quad \oplus W''}_{W'} = V$$

Επαγωγική υπόθεση:

$L|_{W'}$ είναι διαγωνοποιήσιμη

Υπάρχει βάση αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα $w_1, \dots, w_{n-1}$

$\{v, w_1, \dots, w_{n-1}\}$: Βάση από ιδιοδιανύσματα του V. ■