Διαγωνοποίηση του $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$ (από διάλεξη 4)

$ch_A(x)$:

$$\det\begin{pmatrix} 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1-x & & 1 \\ 1 & \cdots & \ddots & 1-x \end{pmatrix} \overset{\circ\circ\circ}{=} \det\begin{pmatrix} n-x & 1 & 1 \cdots & 1 \\ n-x & 1-x & & \\ \vdots & & \ddots & \\ n-x & & & 1-x \end{pmatrix} =$$

$$(n-x)\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & 1 & & 1-x \end{pmatrix} = (n-x)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -x & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots 0 & \cdots & -x \end{pmatrix} = (n-x)\cdot(-x)^{n-1}$$

$1 \le \underbrace{p(n) \le \mu(n)}_{=} = 1$ $\longrightarrow$ θα βρω βάση του $Ker(A-nI)$:

$\| \dim Ker(A-I\cdot n) = 1$!

$$\begin{pmatrix} 1-n & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & & \\ 1 & & \ddots & \\ 1 & \cdots & & 1-n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1-n & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 1-n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (1-n)+(n-1) \\ (1-n)+(n-1) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Αντί να λύσω το σύστημα

παρατηρώ ότι το $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in Ker(A-nI)$ γιατί;

- **Ιδιοτιμή 0**:

$$\begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ 1 & \cdots & 1 \\ 1 & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Βάση του πυρήνα:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}$$

$(n-1)$ το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.

$\rightsquigarrow$

13.10.23

$$Q^{-1} A Q = \Delta = \begin{pmatrix} n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Q: πίνακας που έχει ως στήλες ιδιοδιανύσματα

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & -1 & & & \vdots \\ \vdots & 0 & -1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & & -1 \end{pmatrix}$$

~ Δεν είναι απαραίτητα μοναδικός!

Πρώτη στήλη: βάση του ιδιοχώρου της ~~ιδιο~~τιμής n.

Υπόλοιπες στήλες: βάση του ιδιοχώρου της ιδιοτιμής 0

Ελάχιστο Πολυώνυμο

Το σύνολο I των πολυωνύμων $f \in \mathbb{F}[x]$ ώστε $f(A)=0$ είναι μη-κενό.

- $f_1 \in I$, $f_2 \in I$, τότε $f_1 + f_2 \in I$
- $f \in I$, $r \in \mathbb{F}[x]$, τότε $f \cdot r \in I$
- $f = m_A(x) g(x)$: $m_A(x)$ είναι ελάχιστου βαθμού μονικό πολυώνυμο

ΘΕΩΡΗΜΑ Caley-Hamilton

$ch_A(x) = \det(A - xI_n)$

$ch_A(A) = 0$

$\Downarrow$

$ch_A(x) \in I$ → σύνολο πολυωνύμων που μηδενίζουν τον A.

$m_A(x) \mid ch_A(x)$

το ελάχιστο διαιρεί το χαρακτηριστικό

πχ) $A = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$, $m_A = x - \lambda$, $ch_A(x) = (\lambda - x)^n$

$m_A(A) = A - \lambda I_n = O_{n \times n}$

- Όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολ.
- Όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ελάχιστο πολ.

$$f(A) = f(Q^{-1}BQ) = \sum_{i=1}^{m} a_i [Q^{-1}BQ]^i = \sum_{i=1}^{m} a_i Q^{-1} B^i Q = Q^{-1} f(B) Q$$

$A = Q^{-1}BQ$

$$\Rightarrow \quad f(A) = 0 \Leftrightarrow f(B) = 0$$

Άρα το σύνολο των πολυωνύμων που μηδενίζουν τον A είναι ίδιο με αυτό που μηδενίζουν τον B.

13.10.23

A πίνακας με $ch_A(x)$ να έχει n-το πλήθος ανα δυο διαφορετικές ρίζες.

$Q^{-1}AQ = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$m_A = m_{diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n)} = \prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i) = (-1)^n ch_A(x)$

$f \in \mathbb{F}[x]$

$$f(diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n)) = diag(f(\lambda_1),\dots,f(\lambda_n))$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}^i = \begin{pmatrix} \lambda_1^i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^i \end{pmatrix} \to \sum_{i=1}^{m} a_i\, diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n)^i =$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i\, diag(\lambda_1^i,\dots,\lambda_n^i) = \sum_{i=1} diag(a_i\lambda_1^i,\dots,a_i\lambda_n^i)$$

$$= diag\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\lambda_1^i, \dots, \sum_{i=1}^{m} a_i\lambda_n^i\right) =$$

$$= diag(f(\lambda_1),\dots,f(\lambda_n))$$

Άρα
- $f(diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n)) = 0 \Leftrightarrow$
  $f(\lambda_1) = f(\lambda_2) = \dots = f(\lambda_n) = 0$
- $(x-\lambda_i) \mid m_A \quad \forall i$
  $m_A = \prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i)$

● Ένας πίνακας θα λέγεται **μηδενοδύναμος** αν το ελάχιστο πολυώνυμό του είναι της μορφής x^k $\quad k \in \mathbb{N}, k>1$

πχ) $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ → Δεν είναι διαγωνοπ/μος : $\cdot\, ch_N(x) = -x^3$: ιδιοτιμή 0 με αλγ. πολ/τα ③

$\cdot\, rank(N) = 2$

$\dim Ker N = \dim Ker(N - 0I_n) = \rho(0)$

$3 = \underset{1}{\rho(0)} + \underset{2}{r(N)}$ Η γεωμ. πολ/τα της ιδιοτιμής 0 είναι ①

Άρα $1 = \rho(0) < \mu(0) = 3$

↳ άρα όχι διαγωνοποιήσιμος!

⟶ Συνέχεια παραδείγματος.

$m_N(x) \mid -x^3$

$m_N(x) \in \{x, x^2, x^3\}$

- Έστω $m_N(x) = x$

$m_N(x) = N \neq 0$ άρα $m_N(x) \neq x$

- Αν $m_N(x) = x^2$, $m_N(x) = N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Άρα $\underline{m_N(x) = x^3}$, πράγματι $N^3 = 0$
↳ πράξεις ...

$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n$

$$C(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & & -a_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}$$ → **συνοδός πίνακας**

- $ch_{C(f)}(x) = (-1)^n \cdot f(x)$
- $m_{C(f)}(x) = f(x)$

$\xrightarrow{\text{ΑΠΟΔΕΙΞΗ}}$ $ch_{C(f)}(x) = \det(C(f) - xI_n) =$

$$\det\begin{pmatrix} -x & 0 & & -a_0 \\ 1 & -x & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & 1 \; -x & -a_{n-2} \\ 0 & & 1 & -x-a_{n-1} \end{pmatrix} \Big] x =$$

$$\det\begin{pmatrix} -x & & & \\ 1 & -x & & \\ & x[\; 1 & -x & -a_{n-3} \\ & & \ddots & -a_{n-2} + x(-x-a_{n-1}) \\ & & 1 & -x-a_{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} -x & & & \\ 1 & & & \\ & 0 & 0 & -(a_{n-3} + x(a_{n-2} + x(x+a_{n-1}))) \\ & 1 & 0 & -(a_{n-2} + x(x+a_{n-1})) \\ 0 & & 1 & -x-a_{n-1} \end{pmatrix} = \text{συνεχίζω την διαδικασία} \dots$$

$$= \det\begin{pmatrix} 0 & -f(x) \\ \underbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}_{(n-1)\times(n-1)} & * \end{pmatrix}$$

$-f(x) \to -(\underbrace{a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \dots + x(x + a_{n-1}))) \dots)}_{f(x) \text{ αναλυμένο κατά horner}}$

$= -f(x) \cdot (-1)^{n-1} \underbrace{\det I_{n-1}}_{=1} = f(x) \cdot (-1)^n$ ∎

ΑΠΟΔ. για $m_{C(f)}$ →

Σελ. 5

- $$C(f)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = x_n\begin{pmatrix}-a_0\\ -a_1\\ \vdots\\ -a_{n-1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ x_1\\ \vdots\\ x_{n-1}\end{pmatrix}$$

Θεωρούμε το διάνυσμα $v=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} C(f)v=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}\\ C(f)^2v=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\ \vdots\\0\end{pmatrix}\\ \vdots\\ C(f)^{n-1}v=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\1\end{pmatrix}\end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{j=0}^{n-1} b_j C(f)^j v = \begin{pmatrix}b_0\\b_1\\ \vdots\\ b_{n-1}\end{pmatrix}$$

→ Άρα $\left\{\begin{array}{l} m_{C(f)} \mid f(x) \quad \text{(Βαθμός } n\text{)}\\ \text{κανένα πολυώνυμο} \\ \text{μη μηδενικό} \\ \text{βαθμού} \leq n-1 \text{ δεν} \\ \text{μηδενίζει τον } C(f) \end{array}\right\}$ ■

● Είναι ο $C(f)$ διαγωνοποιήσιμος;

Παρατηρούμε ότι: ο A είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν A^t διαγων/μος.
Δηλαδή αν $Q^{-1}AQ=\Delta$, $Q^tA^t(Q^{-1})^t=\Delta^t=\Delta$ ° $(AB)^t=B^tA^t$
και έχουν ίδιο χαρακ/κό και
ελάχιστο πολυώνυμο αντίστοιχα!

→ Αν το f έχει διαφορετικές ρίζες ο A^t είναι διαγωνοποιήσιμος.

λ ιδιοτιμή $f(\lambda)=0$

$$C(f)^t\begin{pmatrix}1\\ \lambda\\ \vdots\\ \lambda^{n-1}\end{pmatrix} \quad \Big\| \quad (1,\lambda,\dots,\lambda^{n-1})\begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & & -a_0\\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & -a_{n-1}\end{pmatrix}=(\lambda,\lambda^2,\dots,\lambda^n)$$

$\begin{pmatrix}1\\ \lambda\\ \lambda^2\\ \vdots\\ \lambda^{n-1}\end{pmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής λ για τον $C(f)^t$

$$\det\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & & \lambda_n\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & & \lambda_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & & \lambda_n^{n-1}\end{pmatrix}}_{\text{γραμ. ανεξ. διαν.}} = \prod_{1\leq i\leq j\leq n}(\lambda_i-\lambda_j)\neq 0$$

van der Monde ορίζουσα

Σελ. ⑥ .

Από Τετάρτη και για μερικές εβδομάδες, θα θέλω να υπολογίζω A^n για πίνακα A 13.10.23

$f(A)$, $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $f \in \mathbb{F}[x]$

Αν ο A είναι διαγωνοποιήσιμος

Υπάρχουν πίνακες που δεν είναι διαγωνοποιήσιμοι.

Στόχος : Να βρούμε μια όσο το δυνατόν απλούστερη μη διαγώνια μορφή.

$$J(\lambda,k) = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}}_{k} \Big\} k \rightarrow \text{Jordan Block, ιδιοτιμής } \lambda \text{ και διάστασης } k.$$

$$ch_{J(\lambda,k)}(x) = (\lambda - x)^k = \det\left(J(\lambda,k) - xI_k\right) = \det\begin{pmatrix} \lambda-x & 1 & & \\ & \lambda-x & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda-x \end{pmatrix}$$

$$m_{J(\lambda,k)}(x) = (x-\lambda)^k$$

↳ διαιρέτης του χαρ.

$(x-\lambda)^\nu \quad 1 \leq \nu \leq k$, θα δείξω ότι $\nu = k$:

$$(J(\lambda,k) - \lambda I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} = N$$

Η σειρά με τις μονάδες ανεβαίνει!

θα αποδείξουμε την επόμενη φορά ότι:

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

A: Δεν είναι διαγωνοποιήσιμος :

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \boxed{J}_{k_1} & & \\ & \boxed{J}_{k_2} & \\ & & \boxed{J}_{k_3} \end{pmatrix}$$

~ όχι διαγώνιος, αλλά κατά μπλοκ διαγώνιος

↳ Εδώ το Δήλος διέκοψε αλλά δεν νομίζω να ειπώθηκε κάτι άλλο.