Μάθημα 6ο 06/11/2023

ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

- Von Neumann: Ύπαρξη ΣΣΙ σε παίγνια 0-αθροίσματος (maximin = minimax) (απόδειξη Loomis)
- Nash: ύπαρξη ΣΣΙ σε γενικά πεπερασμένα παίγνια (σε μεικτές στρατηγικές) [Απόδειξη: μέσω Θ/τος Brouwer]

(Λήμμα Sperner)

(κορώνα-γράμματα)

Άσκηση 1 Έστω το 2x2 παίγνιο μηδενικού αθροίσματος με πίνακα πληρωμών

$$A = \begin{array}{c|cc} & K & \Gamma \\ \hline K & 1 & -1 \\ \Gamma & -1 & 1 \end{array}$$

Να βρεθούν τα ΣΣΙ του παιγνίου

Matching-Pennies

* ο καθένας διαλέγει Κ ή Γ

ΚΚ, ΓΓ: κερδίζει ο Ι

ΚΓ, ΓΚ: κερδίζει ο ΙΙ

Πιθανά στηρίγματα:

1. {ΚΚ}, {ΚΓ}, {ΓΚ}, {ΓΓ} Αμιγείς X
2. ({Κ,Γ}, Κ), ({Κ,Γ}, Γ), (Κ, {Κ,Γ}), (Γ, {Κ,Γ})
3. ({Κ,Γ}, {Κ,Γ})

Σε αμιγείς στρατηγικές δεν υπάρχει ΣΣΙ (με έλεγχο του διπινακοπαιχνιδιού)

Για τις υπόλοιπες περιπτώσεις γράφουμε τα διανύσματα μεικτών πληρωμών

⊛ Έστω (x_1, x_2) η στρατική του $Π_1$
(y_1, y_2) " " του $Π_2$

Τότε $V_1(x,y) = A \cdot y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ -y_1 + y_2 \end{pmatrix}$

Ομοίως $V_2(x,y) = -A^T x = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$

Περίπτωση 2 Άσκηση......
(δεν θα επηρεάζει το ΣΣΙ)

Περίπτωση 3

Πρέπει $\begin{cases} \text{Για τον } Π_1: y_1 - y_2 = y_2 - y_1 \Rightarrow y_1 = y_2 = 1/2 \\ \text{Για τον } Π_2: x_2 - x_1 = x_1 - x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 = 1/2 \end{cases}$

λείπει η Περ.2

Αρά ...... το μόνο ΣΣΙ είναι το

$Π_1$

Το $\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right)$ 1/2

Σε παίγνια 0-αθροίσματος

maximin = minimax = Nash

Αξία: $val(A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \dots = 0$

Άσκηση: Να βρεθεί συνάρτηση $u: [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ τ.ω.

$$\max_{x\in[0,1]} \min_{y\in[0,1]} u(x,y) < \min_{y\in[0,1]} \max_{x\in[0,1]} u(x,y)$$

Δοκιμές: $u(x,y) = x^2+y^2$

$$\min_y (x^2+y^2) = x^2 + \min_y \overset{\to 0}{y^2} = x^2$$

$$\text{maximin} = \max_x x^2 = 1$$

$$\max_x (x^2+y^2) = y^2 + \max_x x^2 = y^2+1$$

$$\min_y \max_x (y^2+1) = 0+1 = 1$$

Ausatz①: αντιπαρ/μα της μορφής $u(x,y) = f(x)+g(y)$

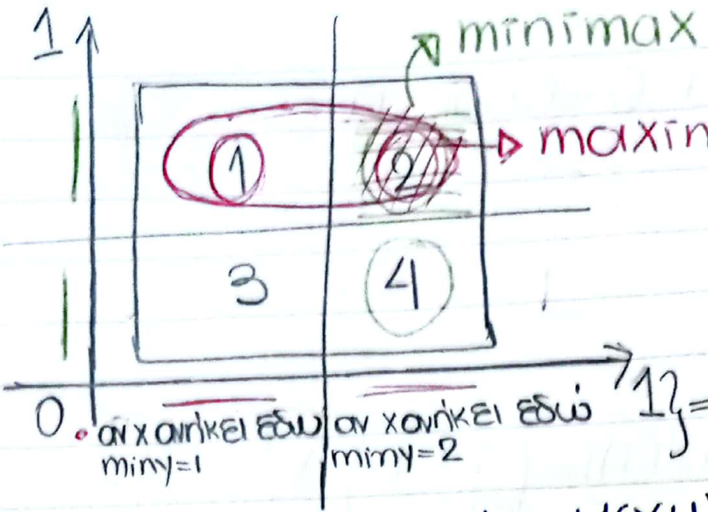
$$\min_y [\overbrace{f(x)+g(y)}^{u(x,y)}] = f(x) + \min g$$

$$\max_x \min_y [f(x)+g(y)] = \max f + \min g$$

$$\| $$

(Μια συνάρτηση αυτής της μορφής δεν θα βοηθήσει) $\min_y \max_x [\underbrace{f(x)+g(y)}_{u(x,y)}]$

(Η συνάρτηση κατά τμήματα συνεχής)



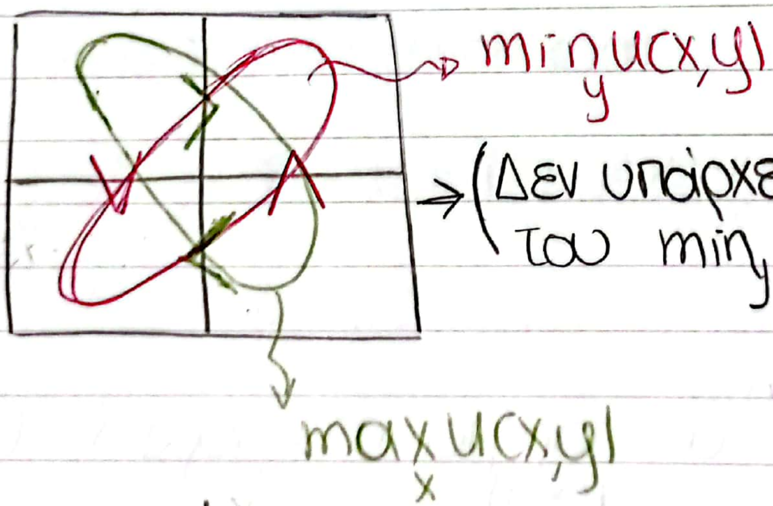
⇒ άρα $\max_x\{1,2\}=2$
όμοια για το minimax

maximin : $\max_x \min_y u(x,y)$

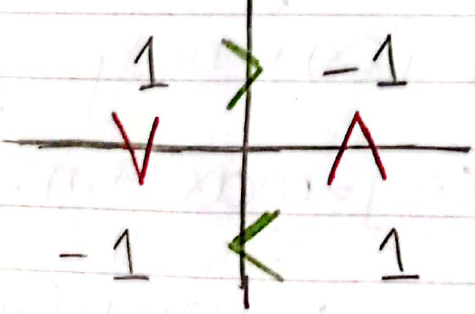
minimax : $\min_y \max_x u(x,y)$

⇝ Δεν δουλεύει

Ansatz ② Δοκιμάζουμε αντιπαράδειγμα που να είναι τμηματικά σταθερό στη διαμέριση $\{[0,1/2),[1/2,1]\}^2$ του $[0,1]^2$



→ (Δεν υπάρχει τομή μεταξύ του $\min_y$ και του $\max_x$)



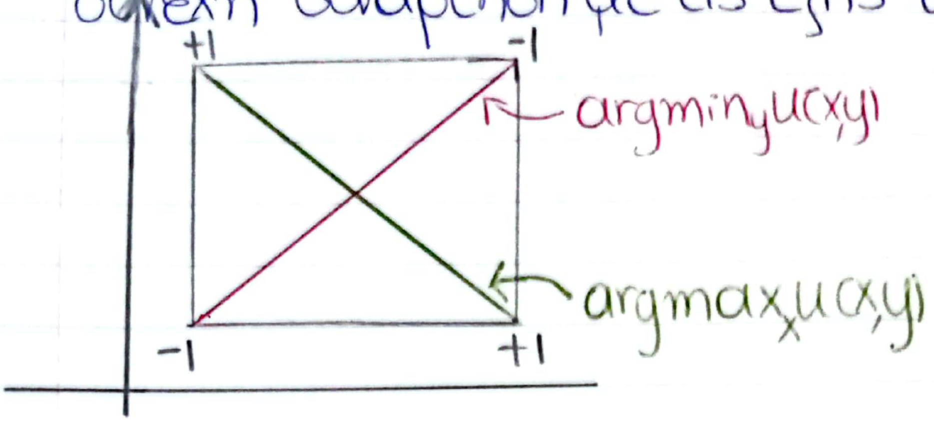
$\min_y u(x,y) = -1$

$\Rightarrow \boxed{\text{maximin} = -1}$

$\max_x u(x,y) = 1$

$\Rightarrow \boxed{\text{minimax} = 1}$

Θα προσπαθήσουμε να φτιάξουμε μια συνεχή συνάρτηση με τις εξής ιδιότητες.



Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ μεγιστοποιείται στο 0 και ελαχιστοποιείται στο ± 1

- $u(x,y)=f(x-y)$

Έστω $f(t)=\cos(\pi t) \Rightarrow u(x,y)=\cos(\pi(x-y))$

με $u(0,1)=-1$
$u(1,1)=1$
$u(0,0)=1$
$u(1,0)=-1$

$$\Rightarrow \max_x \min_y u(x,y) = -1$$
$$\wedge$$
$$\min_y \max_x u(x,y) = 1$$

$u(x,y)=\cos(\pi(x-y))$

1	-1
-1	1

MP: Matching Pennies

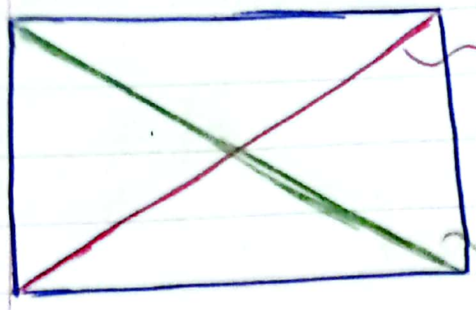
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(x \quad 1-x)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}$$

$$= (x \quad 1-x)\begin{pmatrix} 2y-1 \\ 1-2y \end{pmatrix}$$

$$= x(2y-1)+(1-x)(1-2y)$$
$$= 2xy - x + 1 - x - 2y + 2xy$$
$$= 1+4xy-2x-2y$$
$$= u(x,y)$$

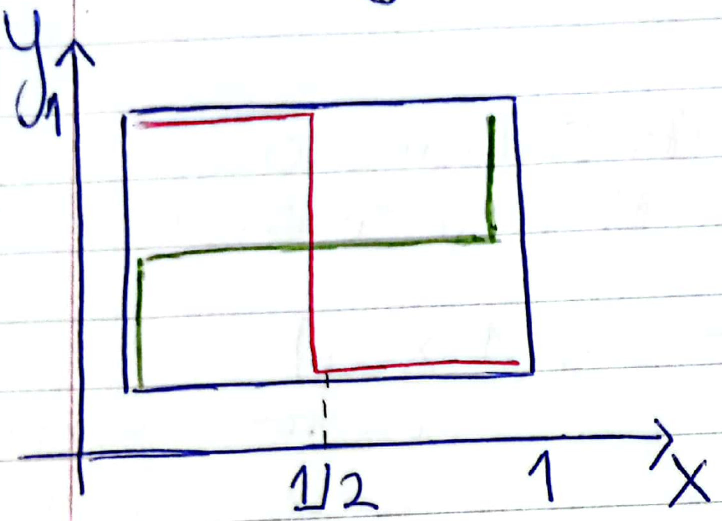
Αντιπαράδειγμα



$\rightarrow \operatorname{argmin}_y u(x,y) = BR_2(x)$

$\rightarrow \operatorname{argmax}_x u(x,y) = BR_1(x)$

Matching Pennies

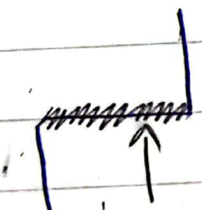


$BR_2(x) = \operatorname{argmin}_y \underbrace{u(x,y)}_{x^T A y}$

$BR_1(y) = \operatorname{argmax}_x u(x,y)$

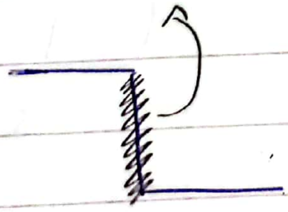
Παρατήρηση: Εδώ οι απεικονίσεις βέλτιστης αποκρίσης είναι πλειότιμες

BR(y)



σύνολο λόγω αδιαφορίας

BR(x)



Αν οι απεικονίσεις BR ήταν μονότιμες δεν θα υπήρχε σημείο (x,y) τ.ω. $BR(x,y) = (x,y)$

Τώρα $\exists$ σημείο (ΣΣΙ) τ.ω. $\underline{(x,y) \in BR(x,y)}$

Πιο γενικά, θυμίζουμε ότι ένα ΣΣΙ Nash είναι σταθ. σημείο της πλειότιμης απεικόνισης

$BR: X \rightrightarrows X$, δηλ. $\boxed{x^* \in BR(x^*)}$

Ερώτημα: Υπάρχει κάποιο θεώρημα ύπαρξης σταθερών σημείων για πλειότιμες απεικονίσεις

Θεώρημα (Kakutani) $F: C \to 2^C$

Έστω C συμπαγές κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω πλειότιμη απεικόνιση $F: C \rightrightarrows C$

① $F(x)$ είναι μη κενό, κλειστό, κυρτό υποσύνολο του C $\forall x \in C$

② F είναι άνω ημισυνεχής δηλ. $\forall x \in C$ αν $x_n \to x$ κ' $y_n \to y$, $y_n \in F(x_n)$

ορισμός άνω ημισυνέχειας

τότε $\lim y_n \in F(x)$ όταν το όριο $\lim_{n\to\infty} y_n$ $\exists$

Τότε $\exists x^* \in C$ τ.ω. $x^* \in F(x^*)$

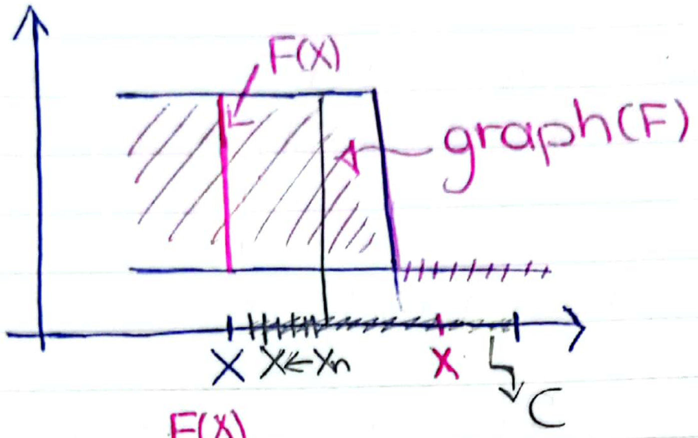
Άνω ημισυνέχεια: Θα λέμε ότι η $F: C \rightrightarrows C$ είναι άνω ημισυνεχής στο $x \in C$ όταν για όλες τις ακολουθίες $x_n \to x$, $y_n \to y$, $y_n \in F(x_n)$ έχουμε $y \in F(x)$

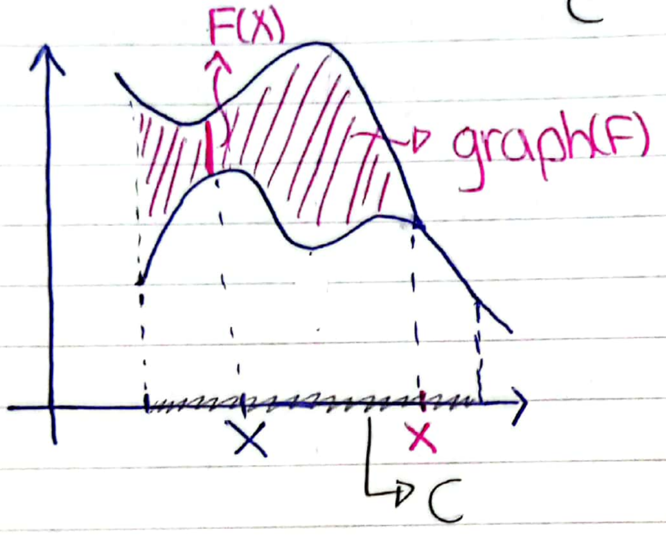
F άνω ημισυνεχής $\Leftrightarrow$ F άνω ημισυνεχής σε κάθε $x \in C$

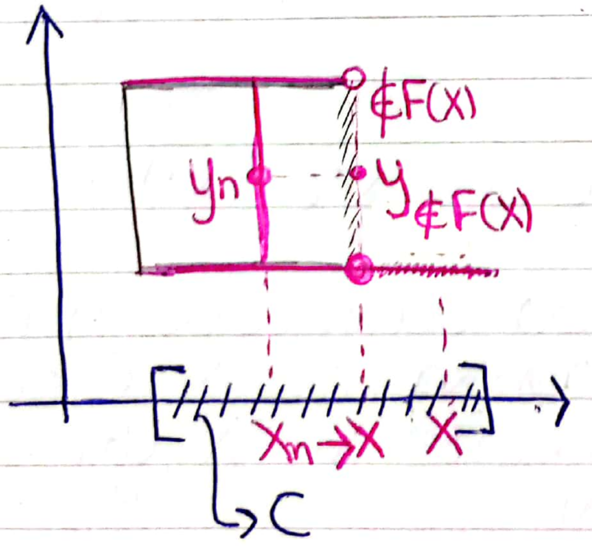
$\Longleftrightarrow$ Ισοδύναμα, η F έχει κλειστό γράφημα

$$\mathrm{graph}(F) = \{(x,y) : x \in C, y \in F(x)\}$$

είναι κλειστό







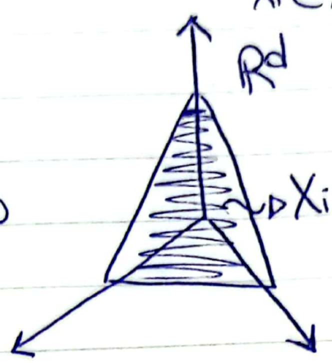
Απόδειξη ΘΙΤΟΣ Nash μέσω Θ. Kakutani (Gale)

Αρκεί να δείξουμε ότι η απ/ση $BR: X \rightrightarrows X$ ικανοποιεί τις συνθήκες του Θ. Kakutani

① $BR(x)$ μη κενό, κυρτό, κλειστό

$$BR_i(x) = \arg\max_{x_i' \in X_i} u_i(x_i'; x_{-i})$$

<u>OK</u> επειδή $BR_i(x)$ είναι (μη κενή) έδρα του X_i $\forall x_{-i} \in X_{-i}$



② $BR(x)$ άνω ημισυνεχής

→ Έστω ότι BR όχι α.η.σ

⇒ $\exists\, x \in X$ κ' ακολουθίες $x_n \to x$, $y_n \to y$, $y_n \in BR(x_n)$

τ.ω $y \notin BR(x)$

[Δηλ. το όριο βέλτιστων αποκρίσεων <u>δεν</u> είναι βέλτιστη απόκριση του ορίου]

i-οστή συνιστώσα του y

⇒ $\exists$ παίκτης $i \in N$ ώστε $y_i \notin$

⇒ $\exists$ παρέκκλιση x_i' του $i \in N$ ώστε

$$\boxed{u_i(x_i'; x_{-i}) > u_i(y_i; x_{-i})}$$

Όμως εξ υποθέσεως $y_n \in BR(x_n) \Rightarrow$

$$u_i(x_i'; x_{-i,n}) \leq u_i(y_{i,n}; x_{-i,n})$$

Άτοπο

$$\xRightarrow{\lim()} \boxed{u_i(x_i'; x_{-i}) \leq u_i(y_i; x_{-i})}$$