Θεωρία Παιγνίων 23/10/2023 (Βασίλης Σταμάτης)

Επισκόπηση: Έστω πεπερασμένο παίγνιο $\Gamma = \Gamma(N, A, u)$

→ Μεικτή επέκταση $\Delta(\Gamma)$ του Γ είναι το συνεχές παίγνιο:

Παίκτες: $N = \{1, \dots, N\}$

Δράσεις: $X_i = \Delta(A_i)$, $\forall i \in N$

Πληρωμές: $u_i : X \equiv \prod_j X_j \to \mathbb{R} \mid u_i(x) = \mathbb{E}_{\alpha \sim x}[u_i(\alpha)] = \mathbb{E}_{\substack{\alpha_1 \sim x_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \sim x_N}}[u_i(\alpha_1, \dots, \alpha_N)]$

Σημείο Στρατηγικής Ισορροπίας (ΣΣΙ) Nash:

Προφίλ (μεικτών) στρατηγικών $x^* = (x_1^*, \dots, x_N^*)$ τ.ω. $u_i(x_i^*; x_{-i}^*) \geq u_i(x_i; x_{-i}^*)$ $\forall x_i \in X_i, \forall i \in N$.

Παρατηρήσεις: 1) **Μονομερής Ευστάθεια:** Κανείς παίκτης δεν έχει κίνητρο να παρεκκλίνει μονομερώς από ένα ΣΣΙ Nash.

2) Αν $supp(x^*)$ = μονοσύνολο $\Rightarrow$ ΣΙ σε καθαρές στρατηγικές.
($supp(X_i) = \{\alpha_i \in A_i ; x_{i\alpha_i} > 0\}$): actions that are played with positive probability under x_i.

Χαρακτηρισμοί συνθήκης Στρατηγικής Ισορροπίας Nash.

1) Θα χαρακτηρίσουμε τα ΣΣΙ Nash μέσω των πληρωμών στις καθαρές στρατηγικές που $\underbrace{\text{παίζονται με καθαρή πιθανότητα}}_{\text{(υπο)στηρίζονται}}$ στην Ισορροπία.

Πρόταση: Έστω πεπερασμένο παίγνιο $\Gamma \equiv \Gamma(N, A, u)$. Τότε:

$$\boxed{x^* \text{ είναι Nash} \Leftrightarrow u_i(\alpha_i; x_{-i}^*) \underset{(*)}{\geq} u_i(\alpha_i'; x_{-i}^*),\ \forall \alpha_i \in supp(x_i^*),\ \forall \alpha_i' \in A_i,\ \forall i \in N.}$$

Ερμηνεία: Η πληρωμή κάθε καθαρής στρατηγικής που παίζεται με θετική πιθανότητα είναι "≥" της πληρωμής κάθε άλλης καθαρής στρατηγικής

→ Αν $\alpha_i, \alpha_i' \in supp(x_i^*)$ τότε,
- $u_i(\alpha_i; x_{-i}^*) \geq u_i(\alpha_i'; x_{-i}^*)$
- $u_i(\alpha_i'; x_{-i}^*) \geq u_i(\alpha_i; x_{-i}^*)$

$\Rightarrow u_i(\alpha_i; x_{-i}^*) = u_i(\alpha_i'; x_{-i}^*)$ (*) $\forall \alpha_i, \alpha_i' \in supp(x_i^*)$.

Απόδειξη: (⇐) Έστω ότι η x^* ικανοποιεί την (*)

Τότε: $u_i(x_i^*; x_{-i}^*) = \sum_{\alpha_i \in supp(x_i^*)} x_{i\alpha_i}^* \cdot u_i(\alpha_i; x_{-i}^*) = (\cdot)$

$\Rightarrow$

όμως $u_i(\alpha_i; x_{-i}^*) = u_i(\alpha_i'; x_{-i}^*)$, $\forall \alpha_i \in supp(x_{-i}^*)$ (λόγω *)

Έστω $u_i(\alpha_i; x_{-i}^*) = v_i$

$$(\cdot) = v_i \cdot \sum_{\alpha_i \in supp(x_i^*)} x_{i\alpha_i}^* = v_i = \Big(\sum_{\alpha_i \in A_i} x_{i\alpha_i}\Big) \cdot v_i = \sum_{\alpha_i \in A_i} v_i \cdot x_{i\alpha_i} \geq$$

$$\geq \sum_{\alpha_i \in A_i} x_{i\alpha_i} u_i(\alpha_i; x_{-i}^*) = u_i(x_i; x_{-i}^*)$$. Άρα δ.ο. $u_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geq u_i(x_i; x_{-i}^*)$ και άρα, η x_i^* είναι Nash.

($\Longrightarrow$) x^* είναι Nash $\Rightarrow u_i(x_i^*; x_{-i}^*) \geq u_i(x_i; x_{-i}^*)$, $\forall x_i \in X_i, i \in N$.

Έστω ότι η (*) δεν ισχύει, οπότε $\exists i \in N\ \exists \alpha_i' \in A_i\ \exists \alpha_i \in supp(x_i^*)$ τ.ω. $u_i(\alpha_i; x_{-i}^*) < u_i(\alpha_i'; x_{-i}^*)$. Έστω η μεικτή στρατηγική $x_i = x_i^* + \varepsilon(\alpha_i' - \alpha_i)$

Τότε, $u_i(x_i; x_{-i}^*) = u_i(x_i^* + \varepsilon(\alpha_i' - \alpha_i); x_{-i}^*) = u_i(x_i^*; x_{-i}^*) + \varepsilon \underbrace{[u_i(\alpha_i'; x_{-i}^*) - u_i(\alpha_i; x_{-i}^*)]}_{>0}$

$> u_i(x_i^*; x_{-i}^*)$ ■

Μεταβολικός (Variational) / Γεωμετρικός Χαρακτηρισμός ΣΙ Nash

→ Διάνυσμα μεικτών πληρωμών του παίκτη i: $v_i(x) = (u_i(\alpha_i; x_{-i}))_{\alpha_i \in A_i} \in \mathbb{R}^{A_i}$.

→ Προφίλ μεικτών πληρωμών: $v(x) = (v_i(x))_{i \in N} = (v_1(x), \dots, v_N(x)) \in \prod_i \mathbb{R}^{A_i}$

Τότε έχουμε: $\boxed{u_i(x) = \langle v_i(x), x_i \rangle} = \sum_{\alpha_i \in A_i} u_i(\alpha_i; x_{-i}) x_{i\alpha_i}$

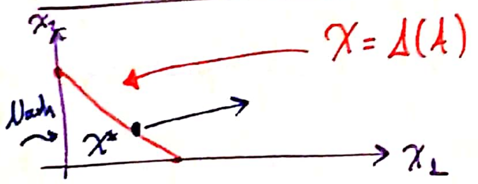
Nash: $u_i(x_i^*; x_{-i}^*) \geq u_i(x_i; x_{-i}^*) \Leftrightarrow \langle v_i(x^*), x_i - x_i^* \rangle = 0$, $\forall x_i \in X_i$, $\forall i \in N$. $\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$

$\langle v_i(x^*), x_i^* \rangle \geq \langle v_i(x^*); x_i \rangle$

$\Leftrightarrow \boxed{\langle v(x^*), x - x^* \rangle \leq 0}$, $\forall x \in X$. ⟶ Μεταβολική Ανισότητα (Variational Inequality)

Γεωμετρική Ερμηνεία:

Απλή περίπτωση: $|A_i| = 2$ [Για απλότητα, δεν σημειώνουμε το i].



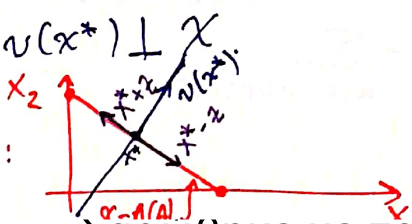
Τότε $X_i = \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 = 1, x_1, x_2 > 0\}$

Περίπτωση 1: $x_1^*, x_2^* > 0$

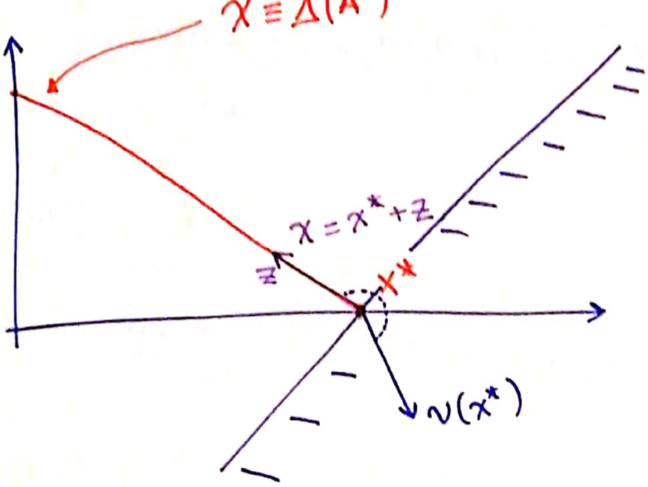
Έστω διάνυσμα μετατόπισης $z = x - x^*$ τ.ω. $x^* \pm z \in X$.

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \langle v(x^*), z \rangle \leq 0 \\ \langle v(x^*), z \rangle \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \langle v(x^*), z \rangle = 0 \Rightarrow v(x^*) \perp X$$

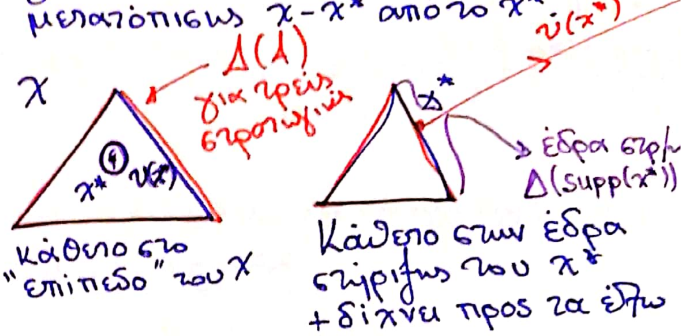
Σχηματικά:



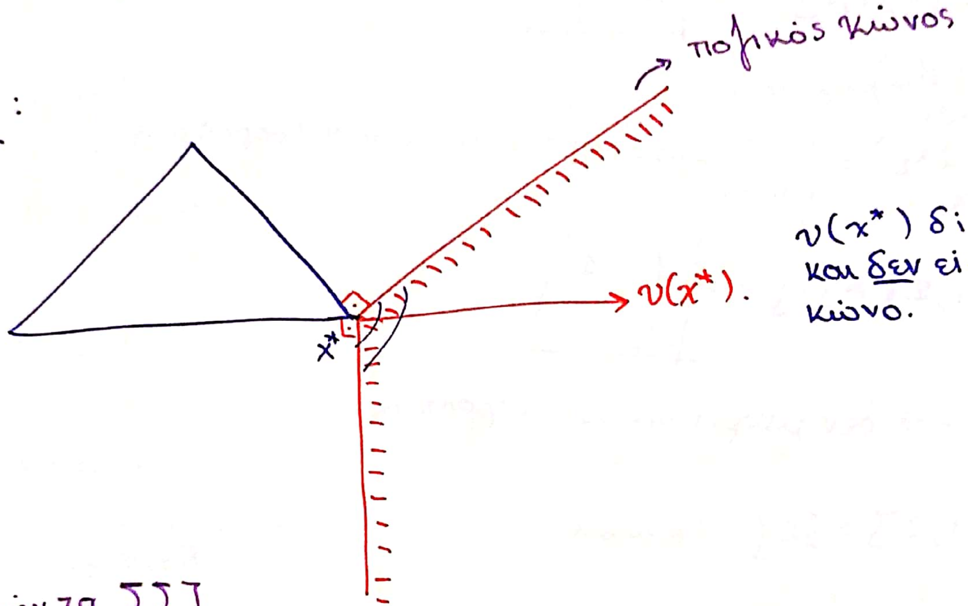
Περίπτωση 2 : $x_1^* = 1$, $x_2^* = 0$



Γενικά το διάνυσμα $v(x^*)$ είναι πολικό σχηματίζει (ασθενώς) αμβλεία γωνία με οποιοδήποτε διάνυσμα μετατόπισης $x - x^*$ από το x^*



Περίπτωση 3 :



$v(x^*)$ δείχνει προς τα έξω και δεν είναι μέσα στον κώνο.

Παράδειγμα:

Να υπολογιστούν τα ΣΣΙ Nash του παιγνίου μηδενικού αθροίσματος με πίνακα πληρωμών $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Σε μορφή διπινακοπαιγνίου $\rightsquigarrow \begin{pmatrix} (1,-1) & (1,-1) \\ (2,-2) & (0,0) \end{pmatrix}$. Έστω $x = (x_1, x_2)$ η μεικτή στρατηγική του παίκτη 1 και $y = (y_1, y_2)$ του παίκτη 2.

$$v_1(x,y) = A \cdot y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ 2y_1 \end{pmatrix}.$$

$$v_2(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{*} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \left(= \left[\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} (x_1, x_2) \right]^T \right) = \begin{pmatrix} -x_1 - 2x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$$

Γιατί ο παίκτης 2 παίζει στήλες

* Προσοχή, πρέπει να αναστρέψουμε!

Πιθανά στηρίγματα: $\Pi_1 : \{1\}, \{2\}, \{1,2\}$ → 9 περιπτώσεις

$\Pi_2 : \{1\}, \{2\}, \{1,2\}$

Nash Eq.

Ξεκινάμε με καθαρές στρατηγικές $\begin{pmatrix} (1,-1) & (1,-1) \\ (2,-2) & (0,0) \end{pmatrix}$

Από τον πίνακα πληρωμών συμπεραίνουμε ότι η μόνη καθαρή ισορροπία, είναι όταν

$x_1 = 1$, $x_2 = 0$

$y_1 = 0$, $y_2 = 1$ →

- Στήριγμα $\{1\}\times\{1,2\} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x_1=1 \\ x_2=0 \end{matrix}}$

$v_1(x,y) = \begin{pmatrix} y_1+y_2 \\ 2y_1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Για να είναι Ν.Ε. θα πρέπει $y_1+y_2 \geq 2y_1 \Rightarrow \boxed{y_1 \leq y_2}$

$v_2(x,y) = \begin{pmatrix} -x_1-2x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}. \Rightarrow$ ίσα ✓

$\Rightarrow y_1 \leq 1-y_1$

$\boxed{y_1 \leq \frac{1}{2}}$

$\boxed{y_2 > 0}$

Όλες περιπτώσεις με $x=(1,0)$
και $y=(y_1,y_2)$, $y_1 \leq \frac{1}{2}$, $y_2>0$ είναι όλες ισορροπίες Nash

- Στήριγμα $\{2\}\times\{1,2\} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x_1=0 \\ x_2=1 \end{matrix}}$

$v_1(x,y) = \begin{pmatrix} y_1+y_2 \\ 2y_1 \end{pmatrix}$

$v_2(x,y) = \begin{pmatrix} -x_1-2x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}. \rightarrow$ δεν μπορεί να 'ναι ισορροπία

- Στήριγμα $\{1,2\}\times\{1\} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} y_1=1 \\ y_2=0 \end{matrix}}$

$v_1(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ δεν μπορεί να 'ναι ισορροπία

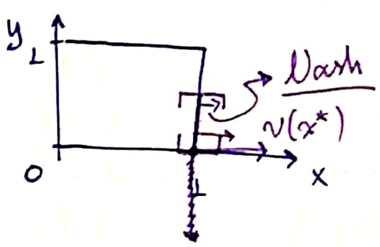
- Στήριγμα $\{1,2\}\times\{2\}$ Άσκηση

- Στήριγμα $\{1,2\}\times\{1,2\}$

$v_1(x,y) = \begin{pmatrix} y_1+2y_2 \\ 2y_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{y_1}+y_2 = \cancel{2}y_1 \\ y_1=y_2=1/2 \end{cases}$

$v_2(x,y) = \begin{pmatrix} -x_1-2x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_1+2x_2 \\ x_2=0 \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} x_1=1 \\ x_2=0 \end{matrix}}$

Γεωμετρική αναπαράσταση:



Σημεία στρατηγικής ισορροπίας σε παίγνια μηδενικού αθροίσματος.

- $N=\{1,2\}$
- A_1, A_2 πεπερασμένα
- $u_1(x_1,x_2) = x_1^T A x_2$
- $u_2(x_1,x_2) = -x_1^T A x_2$

$\Rightarrow$ Χαρακτηρίζεται ισοδύναμα από τον πίνακα πληρωμής A κ' την συνάρτηση πληρωμής $\boxed{u(x)=x_1^T A x_2}$

$u_1(x) = -u_2(x)$

Συνθήκη ΣΙ Nash: Έστω $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ σ.σ.ι. $\Longrightarrow \begin{cases} u_1(x_1^*; x_2^*) \geq u_1(x_1; x_2^*) \\ u_2(x_1^*; x_2^*) \geq u_2(x_1^*; x_2) \end{cases}$

Αφού $u_1 = u = -u_2$. x^* είναι Nash $\Longleftrightarrow \boxed{u(x_1, x_2^*) \leq u(x_1^*, x_2^*) \leq u(x_1^*; x_2)}$ $\forall x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$.

$\rightarrow$ x^* είναι σαγματικό σημείο (saddle point) της u.

Λύση Ασφαλείας:

Ορισμός: Θα λέμε ότι η στρατηγική $p_1 \in X_1$ εξασφαλίζει (εγγυάται) πληρωμή w στον Π_1 όταν $\boxed{u_1(p_1, x_2) \geq w}$, $\forall x_2 \in X_2$.

Αντιστοίχως για τον Π_2. $\boxed{u(x_1; p_2) \leq w, \ \forall x_1 \in X_1}$.

Ερώτηση:
$\rightarrow$ Ποιά η $\begin{Bmatrix} \text{μεγαλύτερη πληρωμή} \\ \text{μικρότερη απώλεια} \end{Bmatrix}$ που μπορεί να παίξει ο $\begin{cases} \text{ο } \Pi_1 \\ \text{ο } \Pi_2 \end{cases}$.

Π_1: Λύση maxi-min

$$\boxed{\begin{aligned} & p_1 \in \arg \max_{x_1 \in X_1} \min_{x_2 \in X_2} u(x_1, x_2) \\ & \underline{v} = \max_{x_1 \in X_1} \min_{x_2 \in X_2} u(x_1, x_2) \end{aligned}} \rightarrow \text{maximin}$$

Π_2: Λύση mini-max

$$\boxed{\begin{aligned} & p_2 \in \arg \min_{x_2 \in X_2} \max_{x_1 \in X_1} u(x_1, x_2) \\ & \overline{v} = \min_{x_2 \in X_2} \max_{x_1 \in X_1} u(x_1, x_2) \end{aligned}} \rightarrow \text{minimax}$$

Saddle Nash: $\boxed{u(x_1, x_2^*) \leq u(x_1^*, x_2^*) \leq u(x_1, x_2^*)}$

Ερώτημα: Ποιά η σχέση τους;

- Η λύση maximin είναι η καλύτερη εγγύηση για τον Π_1.

Πρόταση: Αν η στρατηγική q_1 εξασφαλίζει w στον Π_1, τότε $w \leq \underline{v}$

Απόδειξη: Εξασφάλιση w $\Longrightarrow u(q_1, x_2) \geq w$, $\forall x_2 \in X_2$. $\Longrightarrow$

$\min\limits_{x_2 \in X_2} u(q_1; x_2) \geq w$. Όμως $\max\limits_{x_1 \in X_1} \min\limits_{x_2 \in X_2} u(x_1; x_2) \geq \min\limits_{x_2 \in X_2} u(q_1; x_2)$

$\Longrightarrow w \leq \underline{v}$

Πρόταση: Ανάλογα για τον Π_2: $w \geq \overline{v}$

② $\underline{v}$

$$\text{maximin} = \underline{v} = \max_{x_2 \in X_2} \min_{x_1 \in X_1} u(x_1, x_2) = \underbrace{\min_{x_2 \in X_2} u(p_1, x_2)}_{\text{maximin}} \leq u(p_1, p_2)$$

$$\text{minimax} = \overline{v} = \min_{x_2 \in X_2} \max_{x_1 \in X_1} u(x_1, x_2) = \max_{x_1 \in X_1} u(x_1, p_2) \geq$$

$\Longrightarrow \underline{v} \leq u(p_1, p_2) \leq \overline{v}$.