ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ (ΣΕΠ 19)

ΔΕΥΤΕΡΑ 16-10

ΔΙΑΛΕΞΗ 3

Επισκόπηση:

- **Έννοιες Λύσης κ' Ισορροπίας σε πεπ/να παίγνια**

Έστω πεπ/νο παίγνιο $\Gamma = \Gamma(N, A, u)$

- Κυριαρχημένες στρατηγικές (γνησίως ή ασθενώς):

→ Η $a_i \in A_i$ είναι γνησίως κυριαρχημένη όταν υπάρχει στρατηγική $a_i' \in A_i$ τ.ω.

$$\boxed{u_i(a_i; a_{-i}) < u_i(a_i'; a_{-i}) \quad \forall a_{-i} \in A_{-i}}$$

- Βέλτιστες αποκρίσεις (best responses)

Ως βέλτιστη απόκριση στο προφίλ στρατηγικών $a_{-i} \in A_{-i}$ ορίζεται κάθε στρατηγική $a_i^* \in A_i$ τ.ω.

$$u_i(a_i^*; a_{-i}) \geq u_i(a_i; a_{-i}) \quad \forall a_i \in A_i$$

ή, ισοδύναμα

$$\boxed{a_i^* \in \operatorname{argmax}_{a_i \in A_i} u_i(a_i; a_{-i})}$$

Αντιστοιχία βέλτιστης απόκρισης (best response correspondence)

$$BR_i : A_{-i} \rightrightarrows A_i \, , \quad \boxed{BR_i(a_{-i}) = \operatorname*{argmax}_{a_i \in A_i} u_i(a_i; a_{-i})}$$

- **Στρατηγική ισορροπίας κατά Nash**

Ένα προφίλ στρατηγικών $a^* = (a_1^*, \ldots, a_N^*) \in A$ είναι σημείο στρατηγικής ισορροπίας Nash (Nash equilibrium) όταν

$$\boxed{u_i(a_i^*; a_{-i}^*) \geq u_i(a_i; a_{-i}^*) \quad \forall a_i \in A_i, \, i \in N}$$

ή, ισοδύναμα

$$\boxed{a_i^* \in BR_i(a_{-i}^*) \qquad \forall i \in N}$$

ή, ακόμα πιο συμπαγώς

$$\boxed{a^* \in BR(a^*)}$$

όπου $BR(a) := \Pi_j BR_j(a_{-j})$ *

* Αν $S_i(a_{-i}) = \operatorname*{argmax}_{a_i \in A_i} u_i(a_i; a_{-i})$

τότε $BR(a) = \Pi_j S_j(a_{-j})$ δηλ.

$\hat{a} \in BR(a) \iff \hat{a}_i \in S_i(a_{-i}) = (\operatorname{argmax} \ldots) = BR_i(a_{-i})$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

- Split or Steal

I \ II	Split	Steal
Split	$(5,5)$	$(0,10)$
Steal	$(10,0)$	$\boxed{(0,0)}$

- $BR_i(\text{Split}) = \{\text{Steal}\}$
- $BR_i(\text{Steal}) = \{\text{Steal}, \text{Split}\}$

Σημείο ισορροπίας: $BR_i(a_{-i}^*) \ni a_i^*$

$BR_i(\text{Steal}) = \{\text{Steal}, \text{Split}\} \ni \text{Steal} \Rightarrow (\text{Steal}, \text{Steal}) \equiv \text{Nash}$

$$\begin{aligned} BR(\text{Split}, \text{Steal}) &= BR_1(\text{Steal}) \times BR_2(\text{Split}) \\ &= \{\text{Steal}, \text{Split}\} \times \{\text{Steal}\} \\ &= \{(\text{Steal}, \text{Steal}), (\text{Split}, \text{Steal})\} \end{aligned}$$

$\Rightarrow (\text{Split}, \text{Steal}) \equiv \text{Nash}$

Ανάλογα $(\text{Steal}, \text{Split}) \equiv \text{Nash}$

Άρα, συνολικά, το παίγνιο έχει τρία σημεία (αμιγούς) στρατηγικής ισορροπίας

- Battle of the Sexes

I \ II	Movie	Theater
Movie	$(3,2)$	$(0,0)$
Theater	$(0,0)$	$(2,3)$

- $BR_i(\text{movie}) = \{\text{movie}\}$
- $BR_i(\text{theater}) = \{\text{theater}\}$

$$\begin{aligned} BR(\text{movie}, \text{movie}) &= \{\text{movie}\} \times \{\text{movie}\} \\ &= \{(\text{movie}, \text{movie})\} \end{aligned}$$

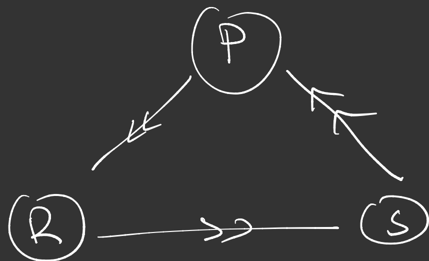
$\Rightarrow (\text{movie}, \text{movie}) \equiv \text{Nash}$

$$\begin{aligned} BR(\text{movie}, \text{theater}) &= \{\text{theater}\} \times \{\text{movie}\} \\ &= \{(\text{theater}, \text{movie})\} \end{aligned}$$

$\Rightarrow (\text{movie}, \text{theater}) \not\equiv \text{Nash}$

Ανάλογα, $(\text{theater}, \text{theater}) \equiv \text{Nash}$,
$(\text{theater}, \text{movie}) \not\equiv \text{Nash}$

- Rock – Paper – Scissors



$\approx\!>$

I \ II	Rock	Paper	Scissors
Rock	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)
Paper	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)
Scissors	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)

Παίγνιο Μηδενικού Αθροίσματος

Βέλτιστες αποκρίσεις:

- $BR_i(\text{Rock}) = \{\text{Paper}\}$
- $BR_i(\text{Paper}) = \{\text{Scissors}\}$
- $BR_i(\text{Scissors}) = \{\text{Rock}\}$

$\Rightarrow BR(\text{Rock}, \text{Paper}) = \{\text{Scissors}, \text{Paper}\}$

....

$\nexists$ προφίλ a^* τ.ω. $BR(a^*) \ni \{a^*\} \Rightarrow \boxed{\nexists \text{ Nash}^*}$

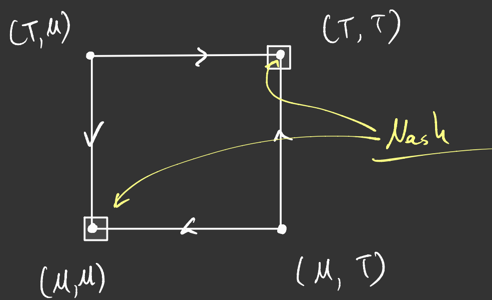
(* σε αμιγείς/καθαρές στρατηγικές)

Διαδοχή Βέλτιστων Αποκρίσεων

I \ II	Rock	Paper	Scissors
Rock	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)
Paper	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)
Scissors	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)

Aside: Preference Graph of a Game

Battle of the Sexes: $\{M, T\} \times \{M, T\}$



• Μεικτή Επέκταση ενός Πεπ/νου Παιγνίου

Έστω ένα πεπ/νο παίγνιο $\Gamma \equiv \Gamma(\mathcal{N}, \mathcal{A}, u)$

Ορσ: Ως μεικτή στρατηγική του παίκτη $i \in \mathcal{N}$, θα καλείται κάθε κατανομή πιθανότητας $x_i \in \Delta(\mathcal{A}_i)$ στα στοιχεία του $\mathcal{A}_i$.

→ ΣυμΒ: $\Delta(\mathcal{A}_i)$ = πλέγμα/simplex πιθανοτήτων στο $\mathcal{A}_i$

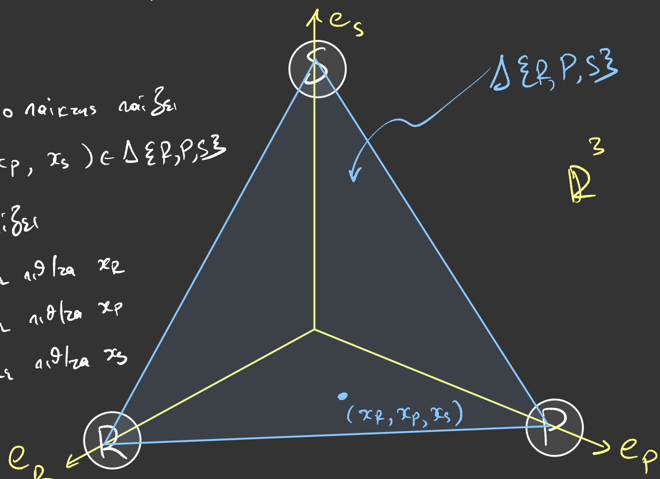
$$= \{x_i \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{A}_i} : \textstyle\sum_{a_i \in \mathcal{A}_i} x_{ia_i} = 1\}$$

→ ΣυμΒ: x_{ia_i} = πιθανότητα επιλογής της $a_i \in \mathcal{A}_i$

→ Αν ο παίκτης παίζει $(x_R, x_P, x_S) \in \Delta\{R,P,S\}$

⇒ παίζει

$$\begin{cases} R \text{ με πιθ/τα } x_R \\ P \text{ με πιθ/τα } x_P \\ S \text{ με πιθ/τα } x_S \end{cases}$$



- Προφίλ μεικτών στρατηγικών: $x = (x_1, \dots, x_N)$
  $x_i \in \Delta(\mathcal{A}_i)$ μεικτή στρατ.

- Πιθ/τα επιλογής προφίλ $a = (a_1, \dots, a_N)$:

$$P(a_1, \dots, a_N) = x_{1a_1} \times \dots \times x_{Na_N} \equiv x_{a_1 \dots a_N} \equiv \prod_j x_{ja_j}$$

- ΣυμΒ: Θα γράφουμε $\mathcal{X}_i \equiv \Delta(\mathcal{A}_i)$, $\mathcal{X} \equiv \prod_j \mathcal{X}_j$ για
  το πλέγμα πιθ/των κάθε παίκτη $(\mathcal{X}_i, i \in \mathcal{N})$
  το χώρο στρατηγικών του παιγνίου $(\mathcal{X} \equiv \prod_j \mathcal{X}_j)$

- Μεικτές Πληρωμές: αν οι παίκτες παίζουν το μεικτό προφίλ $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathcal{X}$, η μεικτή πληρωμή του i-στού παίκτη θα είναι:

$$\mathbb{E}_{\substack{a_1 \sim x_1 \\ \cdots \\ a_N \sim x_N}}[u_i(a_1, \dots, a_N)] = \sum_{a_1 \in \mathcal{A}_1} \cdots \sum_{a_N \in \mathcal{A}_N} x_{1a_1} \cdots x_{Na_N} u_i(a_1, \dots, a_N)$$

$$= \sum_{a \in \mathcal{A}} x_a u_i(a)$$

ΣυμΒ: $u_i(x_1, \dots, x_N) \equiv \mathbb{E}_{a_1 \sim x_1, \dots, a_N \sim x_N}[u_i(a_1, \dots, a_N)]$

$$u_i(x) \equiv \mathbb{E}_{a \sim x}[u_i(a)]$$

$\underline{\text{Ορσ:}}$ Η <u>μεικτή επέκταση</u> ενός πεπ/νου παιγνίου $\Gamma \equiv \Gamma(N, A, u)$ είναι το <u>συνεχές</u> παίγνιο $\Delta(\Gamma)$ με:

- Σύνολο παικτών $N = \{1, \dots, N\}$
- Για κάθε παίκτη $i \in N$, σύνολο δράσεων $\mathcal{X}_i \equiv \Delta(A_i)$
- Για κάθε παίκτη $i \in N$, συνάρτηση πληρωμής $u_i : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ ορισμένη όπως παραπάνω, δηλ. $u_i(x) \equiv \mathbb{E}_{a \sim x}[u_i(a)]$

$\underline{\text{Ορσ:}}$ Στρατηγική ισορροπία σε <u>μεικτές στρατηγικές</u>

Θα λέμε ότι το προφίλ μεικτών στρατηγικών $x^* = (x_1^*, \dots, x_N^*)$ είναι σημείο στρατηγικής ισορροπίας όταν

$$u_i(x_i^*; x_{-i}^*) \geq u_i(x_i; x_{-i}^*) \quad \forall x_i \in \mathcal{X}_i,\ \forall i \in N$$

Εφαρμογή στο RPS:

- <u>Υπολογισμός μεικτών πληρωμών:</u>

$$u_1(x_1, x_2) = x_{1,R}x_{2,R}(0) + x_{1,R}\,x_{2,P}(-1) + x_{1,R}\,x_{2,S}(+1)$$
$$+ x_{1,P}x_{2,R}(+1) + x_{1,P}\,x_{2,P}(0) + x_{1,P}\,x_{2,S}(-1)$$
$$+ x_{1,S}x_{2,R}(-1) + x_{1,S}\,x_{2,P}(+1) + x_{1,S}\,x_{2,S}(0)$$
$$= x_{1,R}(x_{2,S} - x_{2,P}) + x_{1,P}(x_{2,R} - x_{2,S}) + x_{1,S}(x_{2,P} - x_{2,R})$$
$$= x_1^T A x_2 \qquad \text{με } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Αν $x_1^* = x_2^* = (1/3, 1/3, 1/3)$ τότε

$$u_1(x_1, x_2^*) = x_1^T A x_2^* = x_1^T \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$
$$= x_1^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Ομοίως: $u_1(x_1^*, x_2) = 0$

- Συμμετρικά, για τον δεύτερο παίκτη έχουμε

$$u_2(x_1, x_2) = -x_1^T A x_2 = -u_1(x_1, x_2) \qquad [0 \text{ αθροισμα}]$$

- Συμπεραίνουμε το εξής:

$$u_1(x_1, x_2^*) = 0 = u_1(x_1^*, x_2^*)$$

$$u_2(x_1^*, x_2) = 0 = u_2(x_1^*, x_2^*)$$

$\Rightarrow$ Το προφίλ $x_1^* = x_2^* = (1/3, 1/3, 1/3)$ είναι Nash.

Teaser: Γενικά $\underbrace{u_1(x_1, x_2^*)}_{\text{minimax}} \geq u_1(x_1^*, x_2^*) \geq \underbrace{u_1(x_1^*, x_2)}_{\text{maximin}}$

Θεώρημα (Von Neumann): minimax = maximin $\Rightarrow$

Κάθε παίγνιο μηδενικού αθροίσματος επιδέχεται ένα σημείο ισορροπίας Nash σε μικτές στρατηγικές.