16/10/2023

ΓΡΑΦΕΙΣ — 3η Διάλεξη

Βασιλική Μαυρογεώργου

Επισκόπηση:

• ΕΝΝΟΙΕΣ ΛΥΣΗΣ κ' ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΣΕ ΠΕΠ/ΝΑ ΠΑΙΓΝΙΑ

Έστω πεπερασμένο παίγνιο $\Gamma \equiv \Gamma(N, A, u)$

~> κυριαρχημένες στρατηγικές (γνησίως ή ασθενώς)

Η $a_i \in A_i$ είναι γνησίως κυριαρχημένη όταν υπάρχει στρατηγική $a_i' \in A_i$ τ.ω. $u_i(a_i ; a_{-i}) < u_i(a_i' ; a_{-i}) \quad \forall a_{-i} \in A_{-i}$.

~> Βέλτιστες αποκρίσεις (best responses)

Ως βέλτιστη απόκριση στο προφίλ στρατηγικών $a_{-i} \in A_{-i}$ ορίζεται κάθε στρατηγική $a_i^* \in A_i$ τ.ω. $u_i(a_i^* ; a_{-i}) \geq u_i(a_i ; a_{-i}) \quad \forall a_i \in A_i$

ή ισοδύναμα $a_i^* \in \underset{a_i \in A_i}{\operatorname{argmax}}\, u_i(a_i ; a_{-i})$

Απεικόνιση βέλτιστης απόκρισης (best response correspondence)

$BR_i : A_{-i} \rightrightarrows A_i \quad , \quad BR_i(a_{-i}) = \underset{a_i \in A_i}{\operatorname{argmax}}\, u_i(a_i ; a_{-i})$

~> Στρατηγική Ισορροπία κατά Nash.

Ένα προφίλ στρατηγικών $a^* = (a_1^*, \dots, a_N^*) \in A$ είναι σημείο στρατηγικής ισορροπίας Nash (Nash equilibrium) όταν

$$u_i(a_i^* ; a_{-i}^*) \geq u_i(a_i ; a_{-i}^*) \quad \forall a_i \in A_i, \; i \in N$$

ή ισοδύναμα $a_i^* \in BR_i(a_{-i}^*) \quad \forall i \in N$

ή ακόμη πιο συμπαγώς $a^* \in BR(a^*)$ όπου $BR(a) := \prod_j BR_j(a_{-j})$ *

* Αν $S_i(a_{-i}) = \underset{a_i \in A_i}{\operatorname{argmax}}\, u_i(a_i ; a_{-i})$, τότε $BR(a) = \prod_j S_j(a_{-j})$

δηλαδή

$$\hat{a} \in BR(a) \Leftrightarrow \hat{a}_i \in S_i(a_{-i}) = \operatorname{argmax} \dots = BR_i(a_{-i})$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

πιο τυπικά: $BR_1(Split_2)$

- Split or Steal

I \ II	Split	Steal
Split	(5, 5)	$\boxed{(0, 10)}$
Steal	$\boxed{(10, 0)}$	$\boxed{(0, 0)}$

$\rightsquigarrow BR_i(split) = \{steal\}$

$\rightsquigarrow BR_i(steal) = \{split, steal\}$

σημείο Ισορροπίας : $BR_i(a_{-i}^*) \ni a_i^*$

$BR_i(steal) = \{steal, split\} \ni steal \Rightarrow$

$(steal, steal) \equiv Nash$

$BR(\underbrace{split, steal}) = BR_1(steal) \times BR_2(split)$

$= \{split, steal\} \times \{steal\}$

$= \{\underbrace{(split, steal)}, (steal, steal)\}$

$\Longrightarrow (split, steal) \equiv Nash$

Ανάλογα $(steal, split) \equiv Nash$

Άρα, συνολικά, το παίγνιο έχει 3 σημεία αμιγούς στρατηγικής ισορροπίας.

- Battle of the Sexes

R \ C	movie	theater
movie	(3, 2)	(0, 0)
theater	(0, 0)	(2, 3)

$BR_i(movie) = \{movie\}$

$BR_i(theater) = \{theater\}$

$BR_i(movie, movie) = \{movie\} \times \{movie\} = \{(movie, movie)\}$

$\Rightarrow (movie, movie) \equiv Nash$

$BR(movie, theater) = \{theater\} \times \{movie\} = (theater, movie)$

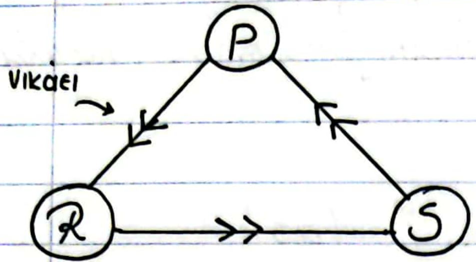
$\Rightarrow (movie, theater) \not\equiv Nash$

Ανάλογα, $(theater, theater) \equiv Nash$ κ' $(theater, movie) \not\equiv Nash$

• Rock- Paper - Scissors

Διαδοχή βέλτιστων αποκρίσεων

παίγνιο μηδενικού αθροίσματος



=>

I \ II	R	P	S
R	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)
P	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)
S	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)

Σημείωση

Ξεκινώντας από οποιοδήποτε από τα σημεία, διαφορετικό του (0,0), και κινούμενοι με βάση τις βέλτιστες αποκρίσεις "παγιδευόμαστε" σε "βρόγχο".

Ξεκινώντας από σημείο (0,0), ανάλογα με το ποιος από τους παίκτες θα αλλάξει την επιλογή του (I, II ή και οι δυο) κινούμενος με βάση τις βέλτιστες αποκρίσεις, παγιδευόμαστε ξανά σε "βρόγχο"

Τα παραπάνω οφείλονται στη μη μεταβατικότητα του προβλήματος ($R \ll P \;\wedge\; P \ll S \not\Rightarrow R \ll S$)

Βέλτιστες Αποκρίσεις

$BR_i(\text{Rock}) = \{\text{paper}\}$

$BR_i(\text{Paper}) = \{\text{Scissors}\}$

$BR_i(\text{Scissors}) = \{\text{Rock}\}$

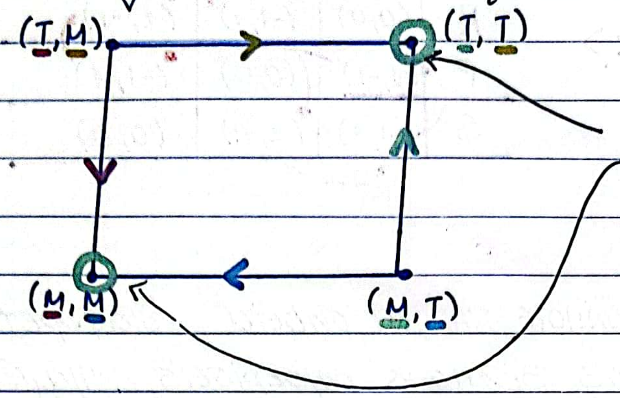
$BR(\text{Rock}, \text{Paper}) = \{(\text{Scissors}, \text{Paper})\}$

$BR(\text{Paper}, \text{Scissors}) = \{(\text{Rock}, \text{Scissors})\}$

⇝ Δεν υπάρχει προφίλ στρατηγικών τ.ώ. $BR(a^*) \ni a^* \Rightarrow \nexists$ Nash (σε αμιγείς ή καθαρές στρατηγικές)

Aside: Preference graph of a game

Battle of the sexes: $\{\overset{M}{\text{movie}}, \overset{T}{\text{theater}}\} \times \{\overset{M}{\text{movie}}, \overset{T}{\text{theater}}\}$



Σ.Ι. Nash

(Οι ακμές είναι προσανατολισμένες προς τα (M,M) κ' (T,T)).

ΜΕΙΚΤΗ ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΕΝΟΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΥ ΠΑΙΓΝΙΟΥ

Έστω ένα πεπερασμένο παίγνιο $\Gamma \equiv \Gamma(N, A, u)$

Ορσ: Ως μεικτή στρατηγική του παίκτη i, θα καλείται κάθε κατανομή πιθανότητας $x_i \in \Delta(A_i)$ στα στοιχεία του A_i.

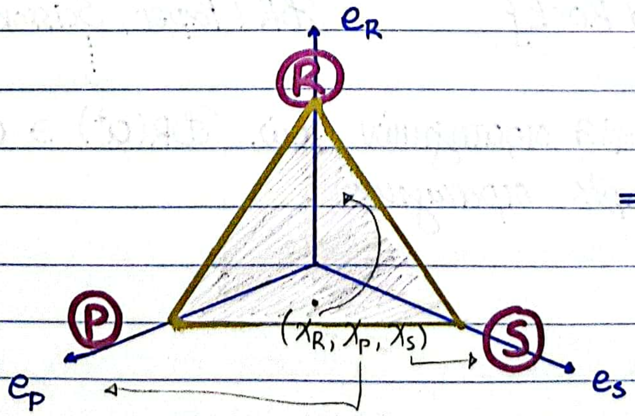
⇝ Σημ: $\Delta(A_i)$ = πλέγμα/simplex πιθανοτήτων στο A_i =

$$= \{ \underbrace{x_i \in \mathbb{R}_+^{A_i}}_{\text{μη αρνητικά}} : \sum_{a_i \in A_i} x_{i a_i} = 1 \}$$

(i: παίκτης i, a_i: στρατηγική παίκτη i)

⇝ Συμβ: $x_{i a_i}$ = πιθ. επιλογής της $a_i \in A_i$.

Παράδειγμα: Rock-Paper-Scissors



→ Αν ο παίκτης παίζει $(x_R, x_P, x_S) \in \Delta\{R,P,S\}$
⇒ παίζει R με πιθανότητα x_R,
P με πιθανότητα x_P κ'
S με πιθανότητα x_S

- Προφίλ Μεικτών Στρατηγικών : $x = (x_1, .., x_N)$, $x_i \in \Delta(A_i)$
μεικτή στρατηγική

- Πιθ/τα επιλογής του προφίλ $a = (a_1, .., a_N)$
$P(a_1, .., a_N) = x_{1a_1} \cdot \ldots \cdot x_{Na_N} \equiv x_{a_1, .., a_N} = \Pi_j x_{ja_j}$

⇝ Συμβ: Θα γράφουμε $\mathcal{X}_i \equiv \Delta(A_i)$, $\mathcal{X} \equiv \Pi_j \mathcal{X}_j$ για το πλέγμα πιθ. κάθε παίκτη ($\mathcal{X}_i$; $i \in \mathcal{N}$) κ' για τον χώρο στρατηγικών του παιχνίου ($\mathcal{X} \equiv \Pi_j \mathcal{X}_j$)

- Μεικτές Πληρωμές :

Αν οι παίκτες παίζουν το μικτό προφίλ $x = (x_1, .., x_N) \in \mathcal{X}$, η μεικτή πληρωμή του i-οστού παίκτη θα είναι :

$$\mathbb{E}_{\substack{a_1 \sim x_1 \\ \vdots \\ a_N \sim x_N}} [u_i(a_1, .., a_N)] = \sum_{a_1 \in A_1} \ldots \sum_{a_N \in A_N} x_{1a_1} \cdots x_{Na_N} \cdot u_i(a_1, .., a_N)$$

$$= \sum_{\substack{a \in A \\ \downarrow \\ (a_1, .., a_N)}} x_a u_i(a)$$

⇝ Συμβ: $u_i(x_1, .., x_N) \equiv \mathbb{E}_{\substack{a_1 \sim x_1 \\ \vdots \\ a_N \sim x_N}} [u_i(a_1, .., a_N)]$

$$u_i(x) = \mathbb{E}_{a \sim x} [u_i(a)]$$

- Η μεικτή επέκταση ενός πεπερασμένου παιχνίου $\Gamma \equiv \Gamma(\mathcal{N}, A, u)$ είναι το συνεχές παίγνιο $\Delta(\Gamma)$ με :
  - ▹ σύνολο παικτών $\mathcal{N} = \{1, .., N\}$
  - ▹ $\forall$ παίκτη $i \in \mathcal{N}$, σύνολο δράσεων $\mathcal{X}_i = \Delta(A_i)$
  - ▹ >> >> , συνάρτηση πληρωμής $u_i : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ ορισμένη όπως παραπάνω, δηλ. $u_i(x) \equiv \mathbb{E}_{a \sim x} [u_i(a)]$

Ορσ: Στρατηγική Ισορροπία σε μεικτές στρατηγικές
Θα λέμε ότι το προφίλ μεικτών στρατηγικών $x^* = (x_1^*, .., x_N^*)$ είναι σημείο στρατηγικής ισορροπίας όταν :

$$u_i(x_i^* ; x_{-i}^*) \geq u_i(x_i ; x_{-i}^*) \quad \forall x_i \in \mathcal{X}_i \quad \forall i \in \mathcal{N}$$

Εφαρμογή στο RPS:

I \ II	R	P	S
R	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)
P	(+1,-1)	(0,0)	(-1,1)
S	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)

- Υπολογισμός μεικτών πληρωμών:

$$u_1(x_1,x_2) = x_{1,R}\, x_{2,R}\cdot(0) + x_{1,R}\, x_{2,P}\cdot(-1) + x_{1,R}\cdot x_{2,S}\cdot(+1)$$
$$+ x_{1,P}\, x_{2,R}\cdot(1) + x_{2,P}\, x_{2,P}\cdot(0) + x_{1,P}\, x_{2,S}\cdot(-1)$$
$$+ x_{1,S}\, x_{2,R}\cdot(-1) + x_{1,S}\, x_{2,P}\cdot(1) + x_{1,S}\, x_{2,S}\cdot(0)$$
$$= x_{1,R}\,(x_{2,P} - x_{2,S}) + x_{1,P}(x_{2,R} - x_{2,S}) + x_{1,S}\cdot(x_{2,P} - x_{2,R})$$

$$= x_1^T A\, x_2 \quad \text{όπου} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Αν $x^* = (1/3, 1/3, 1/3)$ τότε $u_1(x_1; x_2^*) = x_1^T A x_2^* =$

$$= x_1^T \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = x_1^T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Ομοίως, $u_1(x_1^*, x_2) = 0$ "Αλεξίσφαιρη στρατηγική"

- ▷ Αν παίζω εγώ με αυτήν την στρατηγική, δε χάνω ποτέ.
- ▷ Αν ο αντίπαλος παίζει μ' αυτήν την στρατηγική, δεν κερδίζω ποτέ. (Ιδιότητα Ασφαλείας)

Συμμετρικά μοναδ. ευσταθής

Συμμετρικά για τον παίκτη 2 έχουμε $u_2(x_1, x_2) = -x_1^T A\, x_2 = -u_1(x_1, x_2)$
[0 άθροισμα]

⇝ Συμπεραίνουμε τα εξής: $u_1(x_1, x_2^*) = 0 = u_1(x_1^*, x_2^*)$
$u_2(x_1^*, x_2) = 0 = u_2(x_1^*, x_2^*)$

- ▷ Το προφίλ $x_1^* = x_2^* = (1/3, 1/3, 1/3)$ είναι Nash.

Teaser: Γενικά $\underbrace{u_1(x_1, x_2^*)}_{\text{minimax}} \geq \underbrace{u_1(x_1^*, x_2^*)}_{\text{Σ.Μ. ευστ.}} \geq \underbrace{u_1(x_1^*, x_2)}_{\text{maximin}}$

Θ (Von Neumann): minimax = maximin. Κάθε παίγνιο 0-αθροίσματος 2 παικτών επιδέχεται ένα σημείο ισορροπίας Nash σε μεικτές στρατηγικές.